LUCRAREA 2

2.1. Obiectivele lucrării.

Această lucrare îşi propune însuşirea lucrului cu matrici : crearea, accesarea elementelor sau a grupurilor de elemente, calcule elementare cu matrici, funcţii de matrici (inversa, determinantul, etc.).

2.2. Matrici şi vectori

2.2.1. Matrici şi vectori. Definiţii.

În teoria informaţiei o matrice este un tablou în care informaţiile sunt organizate în linii şi coloane. Este cel mai des întâlnit mod de organizare al informaţiei din această cauză matricea fiind supranumită mama structurilor de date. În matematică matricile sunt de obicei tablouri de numere. Pentru notaţii se utilizează paranteze pătrate între care se scrie tabloul de date.
Exemplu: un tablou numeric de două linii şi două coloane:

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

În cazul unei matrici mari se folosesc uneori notaţii simbolice: $\left[a_{ij} \right]$ $i=1,\ldots,n$ $j=1,\ldots,m$ pentru o matrice cu n linii şi m coloane.

Numărul de linii şi de coloane reprezintă tipul matricii. Din exemplele de mai sus prima matrice este de tipul 2X2, iar a doua de tipul nXm. În cazul când n=m matricea se zice pătrată şi are tipul n. În cazul matricilor pătrate elementele de pe diagonala ce porneşte din colţul din stânga sus şi ajung în colţul din dreapta jos formează diagonala principală. Elementele ce pornesc din colţul din dreapta sus şi ajung în colţul din stânga jos formează diagonala secundară.
Matricile de tipul 1Xm se numesc vectori linie cu m elemente. Matricile de tipul nX1 se numesc vectori coloană cu n elemente.

2.2.2. Definirea matricilor în MATLAB

Pentru definirea matricilor în MATLAB se utilizează operatorul []. Astfel în interiorul operatorului elementele matricii se scriu pe linii cu separatori între elemente (spaţiu, virgula), terminarea unei linii fiind indicată de separatorul punct-virgula (;). De exemplu matricea:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Se obţine cu ajutorul comenzii [1,2,3;3,2,1]. Un vector linie [1 2 3] se defineşte în MATLAB exact cum a fost scris mai înainte. Acelaşi vector dar coloană se va defini cu [1;2;3].

Matrici mai des definite au funcţii predefinite: zeros(n,m) va genera matricea de tip nXm a cărui elemente sunt toate zero. Dacă matricea este pătrată de tip n se va scrie zeros(n). ones(n,m) va genera matricea de tip nXm cu toate elementele 1.

Matricea pătrată de tip n cu elemente 1 este generată de ones(n). eye(n) va genera matricea unitate de ordin n, adică matricea ce are elementele egale cu 1 pe diagonala principală şi 0 în rest.

Operatorul [] permite generarea unor noi matrici prin concatenarea unor matrici deja generate. Pentru concatenarea pe orizontală a matricilor A cu B vom scrie [A,B] matricile A şi B trebuind să aibă acelaşi număr de linii. Pentru concatenarea pe verticală vom scrie [A;B] de data aceasta matricile A şi B trebuind să aibă acelşi număr de coloane.

Pentru generarea de matrici poate fi utilizată şi funcţia diag(v,k) unde v este un vector iar k un întreg. Funcţia va genera o matrice în care vectorul v devine o diagonală paralelă cu diagonala principală aflată la distanţa k deasupra (dacă k>0) sau dedesubtul (dacă k<0) diagonalei principale iar restul elementelor matricii sunt nule. Dacă k lipseşte sau este 0 atunci v va deveni chiar diagonala principală. Funcţia diag este utilă la definirea matricilor bandă (cum se numesc matricile ale căror elemente nenule sunt pe diagonale paralele cu diagonala principală, aflate în apropierea diagonalei principale).

2.2.3. Accesarea elementelor unei matrici. Operatorul

Accesarea individuală a unui element se face indicând linia şi coloana lui/ de exemplu pentru matricea A de mai sus elementul din prima linie şi coloana a treia este A(1,3)=3.

Pentru accesarea multiplă MATLAB are mai multe posibilităţi. Astfel putem utiliza la indice operatorul : . Astfel dacă vrem să indicăm elementele liniei 1 din A scriem A(1,1:3). Ţinând cont că elementele matricii A sunt memorate liniar putem indica toate elementele prin A(:).

Putem accesa mai multe elemente neliniar. Astfel dacă dorim elementele din linia i dar coloane impare scriem A(i,1:2:end). Se observă apariţia lui end care este expresia precisă a propoziţiei „până la sfârşit” .

O altă posibilitate este indicarea unei condiţii drept indice. Astfel dacă dorim accesarea doar a elementelor pozitive ale lui A scriem A(A>0). Expresia din paranteză trebuie să fie o expresie logică pe care elementele trebuie să o verifice.

2.2.4. Operaţii cu matrici şi vectori.

Matricile de acelaşi tip se pot aduna obţinându-se o matrice a cărui elemente sunt suma element cu element a celor două matrici, matematic $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$.

Înmulţirea matricilor A cu B este posibilă dacă A este de tip nXm şi B de tip mXp rezultând matricea C de tip nXp. Înmulţirea se face „linii pe coloane”, pentru a obţine elementul c_{ij} se face suma produselor dintre elementele liniei i a lui A cu elementele corespunzătoare ale coloanei j a

m

lui B (matematic $c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} \bullet b_{kj}$). Noi vom scrie A*B şi dacă produsul este posibil MATLAB va efectua înmulţirea.

Datorită modului special în care este abordată împărţirea de către MATLAB aceasta va fi abordată separat în lucrarea următoare .

O matrice poate fi ridicată la putere cu operatorul ^. Această ridicare la putere se face corespunzător operaţiei înmulţire linii pe coloane prezentate mai înainte.

Pentru efectuarea operaţiilor element cu element există aşa numitele ,,operaţii cu punct”. Astfel * este operaţia de înmulţire element cu element, / operaţia de împărţire element cu element iar ^ este ridicarea la putere a fiecărui element al matricii. Aceste operaţii sunt utile în special în formulele ce admit ca variabile matrici sau vectori.

În afara funcţiilor de matrici de mai jos, asupra matricilor se pot aplica funcţiile matematice uzuale efectul aplicându-se fiecărui element. De exemplu sin aplicată unei matrici este matricea sinusurilor fiecărui element.

2.2.5. Funcţii de matrici.

Sunt foarte multe funcţii de matrici. Vom prezenta pe scurt cele mai utilizate dintre ele:

- -size(A) ne dă tipul matricii
- -Nume(A) numărul elementelor lui A
- -min(A) cel mai mic element al lui A
- -max(A) cel mai mare element al lui A
- -prod(A) produsul elementelor lui A
- -sum(A) suma elementelor lui A
- -det(A) determinantul lui A
- -inv(A) inversa lui A

2.3. APLICAŢII

1. Definiţi în MATLAB vectorii şi matricile de mai jos: $v = (1,2,3); w = (4,5,6)$;

a) $u = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad z = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix};$

b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \end{bmatrix};$

2. Creaţi vectorii va, vb, vc şi vd care să aibă următoarele elemente:

a) 2,4,6,8,…,100;

b) 50,48,46,…,-50;
c) 1,1/2,1/3,…,1/100;
d) 0,1/2,2/3,3/4,…,99/100.

3. Prin concatenarea matricilor şi vectorilor de mai sus, definiţi în MATLAB:

a) $r=(1,2,3,4,5,6);\ t=\begin{pmatrix}2\\0\\-1\\-1\\0\\1\end{pmatrix};$

b) $C=\begin{bmatrix}0&0&0&5&0&0\\0&0&0&0&5&0\\0&0&0&0&0&5\\2&0&1&3&3&3\\1&1&1&3&3&3\\-1&2&-2&3&3&3\end{bmatrix};$

3. Cu ajutorul funcţiei diag(v,n), (unde n este distanţa de la diagonala principală), definiţi:

a) $D=\begin{bmatrix}0&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&0\\-2&0&0&0&0&1\\0&-2&0&0&0&0\\0&0&-2&0&0&0\end{bmatrix};$

b) $E=\begin{bmatrix}2&1&0&0&0&0\\1&2&1&0&0&0\\0&1&2&1&0&0\\0&0&1&2&1&0\\0&0&0&1&2&1\\0&0&0&0&1&2\end{bmatrix};$

4. Utilizând matricile şi vectorii definiţi în exerciţiile 1, 2 şi 3, calculaţi:

a) $v\cdot z=$; $r\cdot t=$; b) $A\cdot u\cdot - B\cdot z\cdot =$; c) $C^3+D^3-15\cdot E^3=$;

d)$|B|\cdot B^{2}-5\cdot B^{-1}=$; e) $D^5=$; f) $D\cdot E-E\cdot D=$; g) $D.*E\text{-}E.*D=$; h) $\sin(D)-\cos(E)=$;

6. Utilizând matricile A şi B să se definească matricile:

a) $G=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&2&0&1\\0&0&0&1&1&1\\0&0&0&-1&2&-2\end{bmatrix}$;

b) $H=\begin{bmatrix}1&0&0&-1&0&0\\0&1&0&0&-1&0\\0&0&1&0&0&-1\\2&0&1&2&0&1\\1&1&1&1&1&1\\-1&2&-2&-1&2&-2\end{bmatrix}$

7. Să se creeze sau calculeze, după caz :
   a) Vectorul elementelor impare ale lui r ;
   b) Vectorul elementelor pozitive ale lui H;
   c) Suma elementelor lui H;
   d) Matricea elementelor lui H aflate la intersecţia liniilor 1.2 şi 3 cu coloanele 2,4 şi 6;
   e) vectorul ri in care elementele lui r sunt în ordine inversă.

8. Utilizând matricea B definită la 1.c) scrieţi comenzile necesare pentru a obţine:
   a) un vector format din elementele primei linii a lui B;
   b) o matrice formată cu ultimele două linii ale lui B;
   c) un vector a cărui elemente sunt sumele elementelor din coloanele lui B;
   d) un vector a cărui elemente sunt sumele elementelor din liniile lui B;

2.4. Indicaţii şi soluţii

1.

c) B=[2 0 1;1 1 1;-1 2 -2]

2.

a) va=2:2:100

b) vb=50:-2:-50

c) vt=1:100; vc=1./vt

d) vt1=0:99; vt2=1:100; vd=vt1./vt2

3.

a) r=[v w]; t=[z;u]

b) C=[zeros(3) 5*eye(3); B 3*ones(3)]

4.

a) D=-2*diag(ones(1,3),-3)+diag(ones(1,4),2)

b) E=diag(ones(1,5),-1)+2*diag(ones(1,6))+diag(ones(1,5),1)

5.

a) v*z= -1 r*t= 1

b) $\begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} -180 & -167 & -90 & 170 & 135 & 160 \\ -180 & -255 & -229 & 70 & 145 & 160 \\ -60 & -180 & -300 & -117 & 95 & 70 \\ 54 & 1 & -225 & 18 & 104 & 198 \\ 68 & 81 & -90 & 93 & 33 & 76 \\ 64 & 75 & 10 & 168 & 63 & 18 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} -19.0000 & -8.0000 & -1.0000 \\ -9.0000 & -18.0000 & -1.0000 \\ -7.0000 & 6.0000 & -23.0000 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 \\ -8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

f) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

g) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

h) $\begin{bmatrix} 0.4161 & -0.5403 & -0.1585 & -1.0000 & -1.0000 & -1.0000 \\ -0.5403 & 0.4161 & -0.5403 & -0.1585 & -1.0000 & -1.0000 \\ -1.0000 & -0.5403 & 0.4161 & -0.5403 & -0.1585 & -1.0000 \\ -1.9093 & -1.0000 & -0.5403 & 0.4161 & -0.5403 & -0.1585 \\ -1.0000 & -1.9093 & -1.0000 & -0.5403 & 0.4161 & -0.5403 \\ -1.0000 & -1.0000 & -1.9093 & -1.0000 & -0.5403 & 0.4161 \end{bmatrix}$

6.

a) G=[A zeros(3); zeros(3) B]

b) H=[A –A; B B]

7.

a) r(1:2:end)

b) H(H>0)

c) sum(H(:))

d) H(1:3,2:2:end)

e) ri=r(end:-1:1)

8.

a) va=B(1,1:end)

b) Bb=B(end-1:end,1:end)

c) xc=sum(B)

d) xd=sum(B,2)