

11. Un disc circular omogen are o mișcare de rotație plană în jurul unei axe fixe, axa articulației cilindrice centrale O . Se cunosc masa discului M , raza R și viteza unghiulară ω_0 :

$$\langle M \rangle = \text{Kg}, \quad \langle R \rangle = \text{m}, \quad \langle \omega_0 \rangle = \text{rad/s} = \text{s}^{-1}.$$

La un moment dat asupra discului se aplică o forță radială constantă N prin intermediul unui sabot de frână în contact cu circumferința discului. Coeficientul de frecare la alunecare dintre sabot și disc este μ , iar frecarea din articulația O se neglijează.

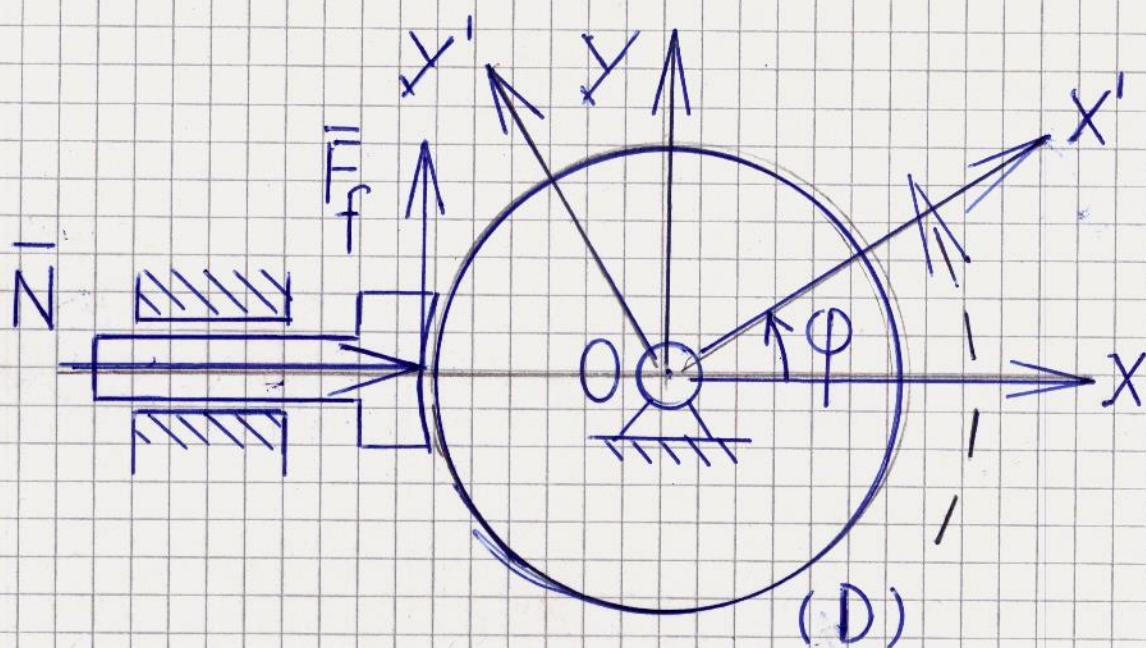
Să se determine timpul de oprire și numărul de rotații efectuate de disc până la oprire.

Fără a restrânge generalitatea problemei se poate considera viteza inițială ω_0 în sens direct (discul se rotește în sens direct trigonometric).

Se raportează discul la un reper fix $OXYZ$ și la un reper mobil $OX'Y'Z'$. Reperele au aceeași origine în O , iar axele OZ și OZ' coincid cu axa

articulației (axa de rotație, notată (Δ)):

$$OZ = OZ' = (\Delta)$$



Planele OXY și $OX'Y'$ coincid cu planul discului, notat (D) pe figura.

Reperul mobil fiind solidar legat de disc, se notează unghiul de rotație între axa fixă OX și axa mobilă OX' :

$$\varphi = \angle(OX, OX'),$$

unghi măsurat în sens direct.

Se scrie ecuația dinamică a mișcării de rotație în jurul unei axe fixe:

$$J_{\Delta} \varepsilon = M_{\Delta}, \quad (*)$$

cu următoarele notații:

ε - accelerația unghiulară (s^{-2})

J_{Δ} - momentul mecanic de inerție al discului în raport cu oxa (Δ);
 M_{Δ} - momentul rezultat al forțelor care acționează asupra discului în raport cu oxa (Δ).

Pentru discul circular omogen de masă M și rază R se cunoaște momentul mecanic de inerție în raport cu oxa perpendiculară în centru pe planul discului:

$$J_{\Delta} = \frac{MR^2}{2} \text{ (Kg} \cdot \text{m}^2 \text{)}$$

Accelerația unghiulară este definită ca derivată în raport cu timpul a vitezei unghiulare:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega} \text{ ,}$$

iar viteza unghiulară este definită ca derivată în raport cu timpul a unghiului de rotație:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} \text{ ,}$$

aceste două relații fiind analoge cu cele din mișcarea rectilinie a punctului material (în loc de spațiu liniar avem unghi de rotație, în loc de viteză avem viteză unghiulară și în loc de

acelerație oronă accelerație unghiulară).

Momentele forțelor care acționează asupra discului se scriu cu regula brațului, adică distanța de la origine la suportul forței. Se observă că forța radială $\vec{N}$ nu are braț, deoarece suportul acestei forțe trece prin origine.

În concluzie, momentul rezultat care acționează asupra discului conține numai momentul forței de frecare, brațul acestei forțe fiind raza discului:

$$M_{\Delta} = - R \cdot F_f$$

La scrierea relației s-a ținut seama că forța de frecare „roteste” discul în sens orar, deci momentul este negativ.

Se scrie legea frecării de alunecare între disc și sabot:

$$F_f = \mu N$$

și se fac toate înlocuirile până în ecuația (*):

$$\frac{MR^2}{2} \dot{\omega} = - R \mu N ,$$

obținând astfel ecuația diferențială a mișcării

$$\dot{\omega} = - \frac{2\mu N}{MR}$$

Această ecuație cu membrul drept constant se integrează în raport cu timpul și cu condiția inițială

$$\omega(0) = \omega_0,$$

obținând legea de variație a vitezei

$$\omega(t) = - \frac{2\mu N}{MR} \cdot t + \omega_0$$

Condiția de oprire este ca viteza unghiulară să fie nulă:

$$\omega = 0 \rightarrow - \frac{2\mu N}{MR} \cdot t + \omega_0 = 0,$$

ecuație din care se obține timpul de oprire:

$$t_{op} = \frac{MR\omega_0}{2\mu N} \text{ (sec)}.$$

Pentru a determina numărul de rotații efectuate de disc până la oprire trebuie obținută legea de variație (în timp) a unghiului de rotație.

Viteza unghiulară fiind definită ca derivata a unghiului de rotație, se mai integrează o dată în raport cu timpul legea de variație a vitezei:

$$\dot{\varphi} = \omega = - \frac{2\mu N}{MR} \cdot t + \omega_0,$$

cu condiția inițială

$$\varphi(0) = 0,$$

adică la momentul inițial reperul mobil coincide cu reperul fix.

Se obține:

$$\varphi(t) = - \frac{\mu N}{MR} t^2 + \omega_0 t$$

Se calculează spațiul unghiular parcurs de disc până la oprire, înlocuind aici timpul de oprire:

$$\varphi(t_{\text{op}}) = - \frac{\mu N}{MR} t_{\text{op}}^2 + \omega_0 \cdot t_{\text{op}}$$

$$\varphi(t_{\text{op}}) = - \frac{\mu N}{MR} \cdot \left(\frac{MR\omega_0}{2\mu N} \right)^2 + \omega_0 \cdot \frac{MR\omega_0}{2\mu N}$$

$$\varphi(t_{\text{op}}) = \frac{MR\omega_0^2}{4\mu N} \text{ (rad)}.$$

Numărul de rotații până la oprire se determină împărțind această valoare la 2π , adică măsura unei rotații:

$$n = \frac{\varphi(t_{\text{op}})}{2\pi} = \frac{MR\omega_0^2}{8\pi\mu N} \text{ (—)}.$$