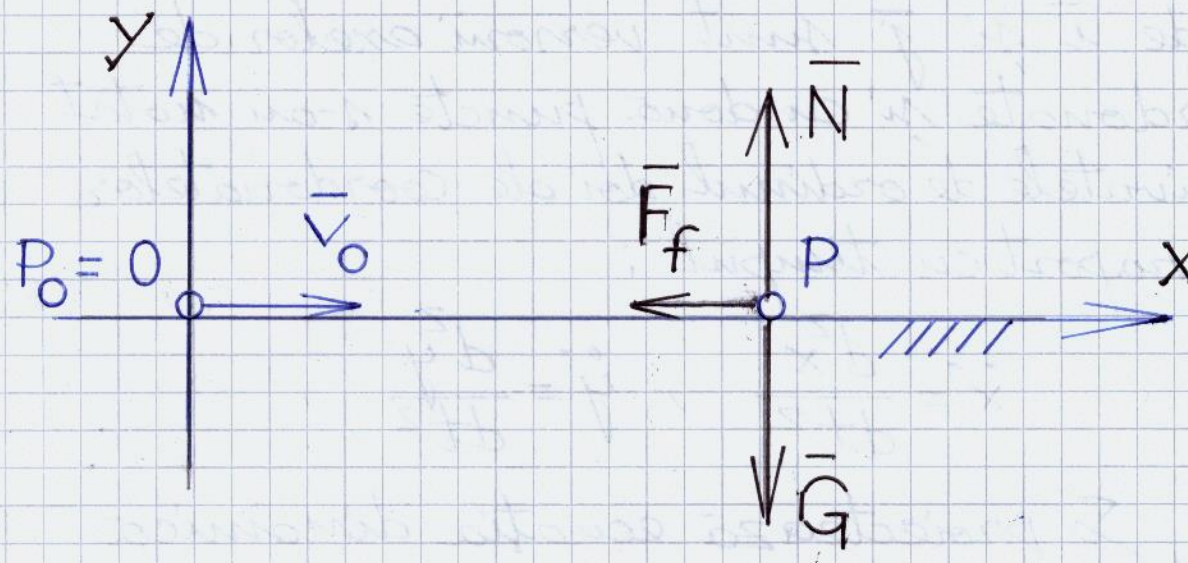
9. Un punct material P de masă m este lansat cu viteza inițială v_0 pe un plan orizontal. Cunoscând coeficientul de frecare la alunecare, μ, să se determine:

a.) distanța parcursă până la oprire;

b.) timpul de mișcare.

Se raportează mișcarea punctului material la un reper OXY cu axa OX pe direcția vitezei inițiale $\bar{v}_0$, originea O în poziția inițială și axa OY verticală.



Se scrie ecuația dinamicii punctului material, adică masa înmulțită cu accelerația este egală cu suma forțelor care acționează asupra acestuia, ecuație vectorială:

$$m\bar{a} = \bar{G} + \bar{N} + \bar{F}_f ,$$

unde notațiile reprezintă:

$\bar{a}$ - accelerația

$\bar{G}$ - greutatea punctului material

$\bar{N}$ - reacțiunea normală a planului

$\bar{F}_f$ - forța de frecare la alunecare, în sens contrar mișcării

Pentru accelerație se consideră expresia din cinematica punctului material în coordonate carteziene:

$$\bar{a} = \ddot{x}\,\bar{i} + \ddot{y}\,\bar{j} ,$$

unde $\bar{i}$ și $\bar{j}$ sunt versorii axelor de coordonate și cu două puncte s-au notat derivatele de ordinul doi ale coordonatelor în raport cu timpul:

$$\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} , \quad \ddot{y} = \frac{d^2y}{dt^2} .$$

Se proiectează ecuația dinamică vectorială pe axele OX și OY, obținând două ecuații diferențiale:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -F_f \\ m\ddot{y} &= N - G \end{aligned} , \qquad (*)$$

cu forțele proiectate conform figurii.

Deoarece mişcarea rectilinie se face pe axa Ox, avem $y=0$ şi din a doua ecuaţie rezultă

$$N = G = mg,$$

unde g este acceleraţia gravitaţională.

Se scrie legea frecării de alunecare

$$F_f = \mu N$$

(forţa de frecare este egală cu coef. de frecare înmulţit cu reacţiunea normală) şi se face înlocuirea în prima relaţie (*):

$$m\ddot{x} = -\mu m g,$$

obţinând ecuaţia diferenţială a mişcării

$$\boxed{\ddot{x} = -\mu g}$$

Ecuaţia diferenţială se integrează în raport cu timpul, obţinând:

$$\dot{x} = \dot{x}(t) = -\mu g \cdot t + C_1$$

$$x = x(t) = -\mu g \cdot \frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2 \qquad , \qquad (*)'$$

unde C_1 şi C_2 sunt constante de integrare.

Expresia vitezei din cinematica punctului material în coordonate carteziene este

$$\bar{v} = \dot{x}\,\bar{i} + \dot{y}\,\bar{j} ,$$

adică $\bar{v} = \dot{x}\,\bar{i}$, deoarece $\dot{y} = 0$.

Prima relație $(*)'$ reprezintă viteza în valoare scalară, a doua relație $(*)'$ reprezintă spațiul parcurs pe axa OX.

Constantele de integrare se determină din condițiile inițiale, adică la momentul inițial viteza este v_0 și spațiul este zero, prin alegerea reperului cu originea în poziția inițială:

$$\dot{x}(0) = v_0 \quad , \quad x(0) = 0$$

Introducând $t = 0$ în relațiile $(*)'$ avem:

$$\dot{x}(0) = C_1 \quad , \quad x(0) = C_2 \quad ,$$

deci constantele de integrare sunt

$$C_1 = v_0 \quad , \quad C_2 = 0 \quad .$$

Astfel, relațiile $(*)'$ devin:

$$v = \dot{x} = -\mu g t + v_0 \quad ,$$

$$s = x = -\mu g \cdot \frac{t^2}{2} + v_0 t \qquad (*)''$$

prima relație reprezintă viteza, a doua spațiul parcurs.

Timpul de mișcare se obține punând condiția de oprire, adică viteza să fie zero ($v=0$). Din prima relație $(*)''$ rezultă timpul de mișcare până la oprire (timpul de oprire):

$$v=-\mu g\cdot t+v_0=0 \longrightarrow t_{op}=\frac{v_0}{\mu g}.$$

Se calculează spațiul parcurs până la oprire cu a doua relație $(*)''$, înlocuind timpul de oprire:

$$S=x(t_{op})=-\mu g\cdot\frac{t_{op}^2}{2}+v_0\cdot t_{op}$$

$$S=-\frac{1}{2}\mu g\cdot\left(\frac{v_0}{\mu g}\right)^2+v_0\cdot\frac{v_0}{\mu g}$$

$$S=-\frac{v_0^2}{2\mu g}+\frac{v_0^2}{\mu g}=\frac{v_0^2}{2\mu g}.$$

Observație: Spațiul parcurs se poate calcula și cu legea conservării energiei, adică energia cinetică la momentul inițial este egală cu lucrul mecanic al forței de frecare, scris ca produs între forță și spațiul parcurs.

$$\frac{m v_0^2}{2}=F_f\cdot S=\mu m g\cdot S \longrightarrow S=\frac{v_0^2}{2\mu g}.$$

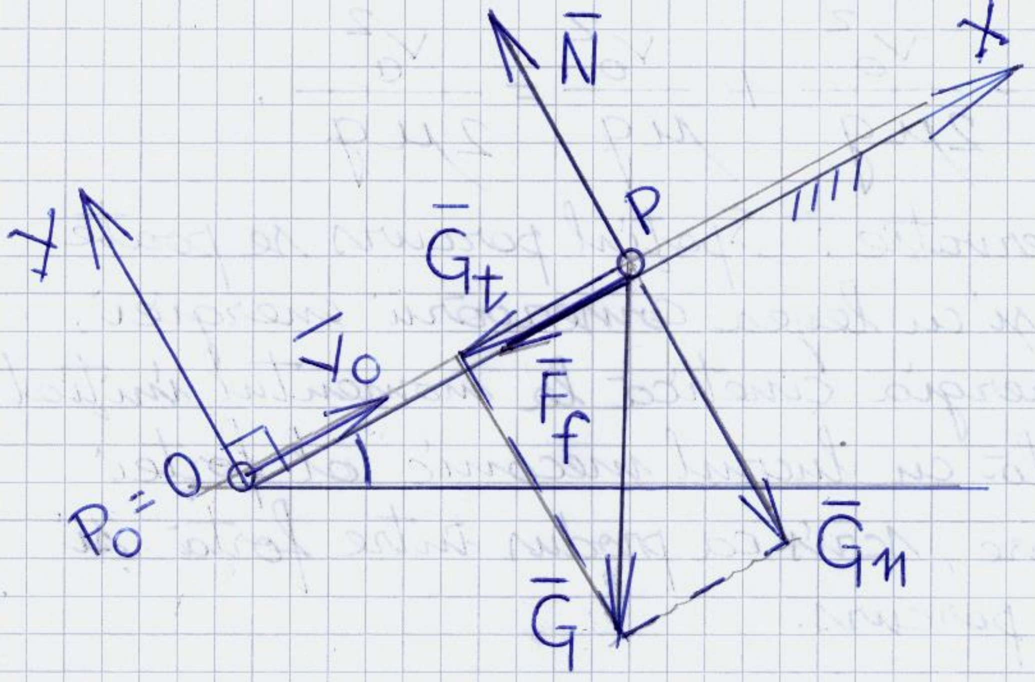
10. Un punct material P de masă m este lansat în sus pe un plan înclinat de unghi α cu viteza inițială v_0. Cunoscând coeficientul de frecare la alunecare, μ, să se determine:

a.) distanța parcursă până la oprire;

b.) timpul de urcare;

c.) timpul de coborâre, în ipoteza $\mu < tg\alpha$.

Se raportează mișcarea punctului material la un reper OXY cu axa OX pe direcția vitezei inițiale $\bar{v}_0$, originea O în poziția inițială și axa OY normală pe suprafața planului.



Se scrie ecuația dinamicii punctului material:

$$m\bar{a} = \bar{G} + \bar{N} + \bar{F}_f ,$$

cu aceleași notații ca la problema 9.

Greutatea are două componente, greutatea tangențială paralelă cu planul și greutatea normală perpendiculară pe plan:

$$\bar{G} = \bar{G}_t + \bar{G}_n$$

Se proiectează ecuația dinamică vectorială pe axele OX și OY, obținând două ecuații diferențiale:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -F_f - G_t \\ m\ddot{y} &= N - G_n \end{aligned} , \qquad (*)$$

cu forțele proiectate conform figurii.

Observând că unghiul dintre greutatea totală $\bar{G}$ și direcția normală pe plan este egal cu unghiul α (unghiuri cu laturile perpendiculare), se scriu componentele greutății:

$$\begin{aligned} G_n &= G \cdot \cos\alpha = mg \cdot \cos\alpha \\ G_t &= G \cdot \sin\alpha = mg \cdot \sin\alpha \end{aligned} ,$$

unde g este accelerația gravitațională.

Deoarece mișcarea rectilinie se face pe axa OX, avem $y = 0$ și din a doua ecuație (*) rezultă:

$$N = G_n = mg \cdot \cos\alpha$$

Se scrie legea frecării de alunecare

$$F_f = \mu N$$

(forța de frecare este egală cu coef. de frecare înmulțit cu reacțiunea normală) și se fac înlocuirile în prima relație (*):

$$m\ddot{x} = -\mu mg \cdot \cos\alpha - mg \cdot \sin\alpha,$$

obținând ecuația diferențială a mișcării de coborâre:

$$\boxed{\ddot{x} = -(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)g}$$

Ecuația diferențială este analoagă cu ecuația din problema 9, adică factorul μ din probl. 9 este înlocuit cu paranteza $(\sin\alpha + \mu \cdot \cos\alpha)$.

Condițiile inițiale sunt aceleași ca în probl. 9, adică la momentul inițial viteza este v_0 și spațiul este zero, prin alegerea reperului cu originea în poziția inițială.

Integrarea ecuației diferențiale de mișcare fiind analoagă cu integrarea ecuației din problema 9, se scriu direct rezultatele, înlocuind μ cu paranteza $(\sin\alpha + \mu \cdot \cos\alpha)$.

Timpul de urcare

$$t_{ur} = \frac{v_0}{(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)g}$$

Spatiul parcurs:

$$S = \frac{v_0^2}{2(\sin\alpha + \mu \cdot \cos\alpha)g}$$

Rezolvarea pct. c.)

După ce atinge înălțimea maximă pe plan, punctul material poate să coboare și să ajungă înapoi în poziția din care a fost lansat, în anumite condiții, adică frecarea să fie mică și unghiul planului să fie suficient de mare, aceste condiții fiind exprimate în ipoteză prin inegalitatea $\mu < tg\alpha$. Dacă aceste condiții nu sunt îndeplinite, punctul material rămâne în repaos în poziția atinsă, așa cum rămâne în cazul cu plan orizontal.

În cazul mișcării de coborâre, forța de frecare își schimbă sensul, fiind o forță opusă mișcării. Celelalte forțe ($\overline{G}$ și $\overline{N}$) rămân la fel ca în cazul mișcării de urcare.

Se poate scrie direct ecuația diferențială a mișcării de coborâre, schimbând semnul termenului care conține coeficientul de frecare în ecuația diferențială a mișcării de urcare.

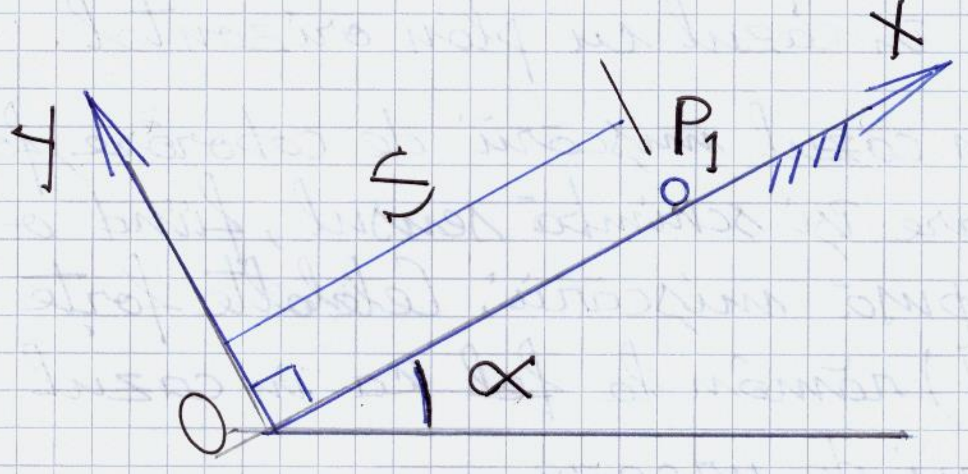
Astfel, pentru mișcarea de coborâre se scrie ecuația diferențială

$$\boxed{\ddot{x} = (\mu \cos\alpha - \sin\alpha)\, g}$$

Această ecuație se integrează cu condițiile inițiale

$$x(0) = S \quad , \quad \dot{x}(0) = 0 \ ,$$

adică se consideră o nouă origine a timpului ($t = 0$) și la acest moment inițial punctul material se află în repaos (viteza nulă, $v = \dot{x} = 0$) în poziția de abscisă S pe axa OX (punctul P_1).



Condițiile inițiale ale mișcării de coborâre

Integrând ecuația diferențială cu condițiile inițiale precizate se obține pentru mișcarea de coborâre:

$$\dot{x} = (\mu\cos\alpha - \sin\alpha)\, g\, t$$

$$x = (\mu\cos\alpha - \sin\alpha)\, g\, \frac{t^2}{2} + S \qquad (*)'$$

prima relație reprezintă viteza, a doua spațiul parcurs.

Timpul de coborâre se determină din a doua ecuație $(*)'$, punând condiția $x = 0$, adică punctul material să ajungă în origine, poziția din care a fost lansat în mișcarea de urcare:

$$(\mu\cos\alpha - \sin\alpha)\, g\, \frac{t^2}{2} + S = 0$$

$$t_c = \sqrt{\frac{2S}{(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)\, g}}.$$

Înlocuind spațiul S cu rezultatul de la pag. 40 se obține

$$t_c = \frac{v_0}{g\sqrt{\sin^2\alpha - \mu^2\cos^2\alpha}},$$

cu condiția

$\mu < tg\alpha$, adică $\sin\alpha > \mu\cos\alpha$, pentru ca valoarea obținută pentru timpul de coborâre să fie reală.

Se poate calcula și viteza cu care punctul material ajunge în origine, înlocuind timpul de coborâre în prima relație (*)':

$$v' = (\mu \cos\alpha - \sin\alpha)\, g \cdot t_c$$

$$v' = (\mu \cos\alpha - \sin\alpha)\, g \cdot \frac{v_0}{g\sqrt{\sin^2\alpha - \mu^2\cos^2\alpha}}$$

$$v' = -v_0 \sqrt{\frac{(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)^2}{\sin^2\alpha - \mu^2\cos^2\alpha}}$$

$$v' = -v_0 \cdot \sqrt{\frac{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}{\sin\alpha + \mu\cos\alpha}},$$

s-a folosit $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.

Viteza v' este negativă, deoarece la coborâre punctul material se deplasează în sensul negativ al axei Ox și mai mică în modul decât viteza inițială v_0, radicalul fiind subunitar. Explicația este că o parte din energia cinetică a fost consumată prin frecare.