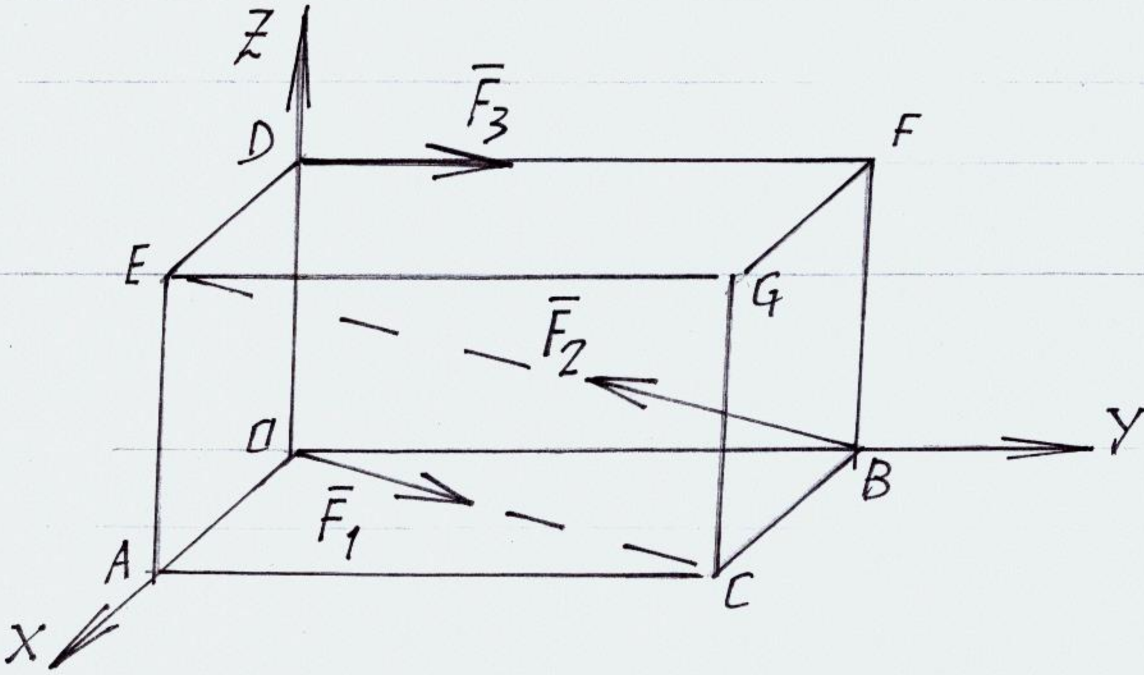
1. Asupra paralelipipedului dreptunghic din figură acționează sistemul de forțe $S=\{\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3\}$: $OA = OD = l$, $OB = 2l$, $|\bar{F}_1| = f\sqrt{5}$, $|\bar{F}_2| = f\sqrt{6}$, $|\bar{F}_3| = f$.



Să se determine rezultanta și momentul rezultant în raport cu polul O, să se precizeze cazul de reducere și să se scrie ecuația axei centrale.

Se stabilesc expresiile analitice ale forțelor:

$$\bar{F}_1 = |\bar{F}_1| \cdot \frac{\overline{OC}}{|\overline{OC}|} = f\sqrt{5} \cdot \frac{l\bar{i} + 2l\bar{j}}{l\sqrt{5}} = f\cdot\bar{i} + 2f\cdot\bar{j},$$

unde s-a înlocuit $C(l, 2l, 0)$ și

$$|\overline{OC}| = \sqrt{l^2 + (2l)^2} = \sqrt{5l^2} = l\sqrt{5}$$

$$\bar{F}_2 = |\bar{F}_2| \cdot \frac{\overline{BE}}{|\overline{BE}|} \quad , \quad \begin{matrix} E(l,\ 0,\ l) \\ B(0,\ 2l,\ 0) \end{matrix}$$

$$\overline{BE} = l\bar{i} - 2l\bar{j} + l\bar{j}$$

$$|\overline{BE}| = \sqrt{l^2 + (-2l)^2 + l^2} = \sqrt{6l^2} = l\sqrt{6}$$

$$\bar{F}_2 = f\sqrt{6} \cdot \frac{l\bar{i} - 2l\bar{j} + l\bar{k}}{l\sqrt{6}} = f \cdot \bar{i} - 2f \cdot \bar{j} + f\bar{k}$$

$$\bar{F}_3 = f \cdot \bar{j} \quad , \quad \bar{F}_3 \parallel OY$$

Rezultanta:

$$\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 = 2f \cdot \bar{i} + f \cdot \bar{j} + f \cdot \bar{k}$$

Momentul forței $\bar{F}_1$ este nul, deoarece punctul de aplicație este în origine:

$$\bar{M}_O(\bar{F}_1) = \bar{0}$$

Se calculează momentele forțelor $\bar{F}_2$ și $\bar{F}_3$:

$$\bar{M}_O(\bar{F}_2) = \overline{OB} \times \bar{F}_2 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 2l & 0 \\ f & -2f & f \end{vmatrix} = 2lf \cdot \bar{i} - 2lf \cdot \bar{k}$$

$$\bar{M}_O(\bar{F}_3) = \overline{OD} \times \bar{F}_3 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & l \\ 0 & f & 0 \end{vmatrix} = -lf \cdot \bar{i}$$

Momentul rezultant:

$$\bar{\mathcal{M}}_O = \bar{M}_O(\bar{F}_1) + \bar{M}_O(\bar{F}_2) + \bar{M}_O(\bar{F}_3) = lf \cdot \bar{i} - 2lf \cdot \bar{k}$$

Se calculează al doilea invariant scalar

$$I_2 = \bar{R} \cdot \bar{\mathcal{M}}_O = 2f \cdot lf + f \cdot 0 + f \cdot (-2lf) = 0$$

și sistemul este echivalent cu un vector unic (cazul trei de reducere).

Axa centrală este în acest caz dreapta suport a rezultantei.

Ecuația axei centrale este

$$(\Delta_c): \ \bar{r} = \frac{\bar{R} \times \bar{M}_O}{\bar{R}^2} + \lambda \bar{R} \ ,$$

unde λ este un parametru real, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Se calculează produsul vectorial dintre rezultantă și momentul rezultant

$$\bar{R} \times \bar{M}_O = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2f & f & f \\ lf & 0 & -2lf \end{vmatrix}$$

$$\bar{R} \times \bar{M}_O = -2lf^2 \cdot \bar{i} + 5lf^2 \cdot \bar{j} - lf^2 \cdot \bar{k}$$

și pătratul rezultantei

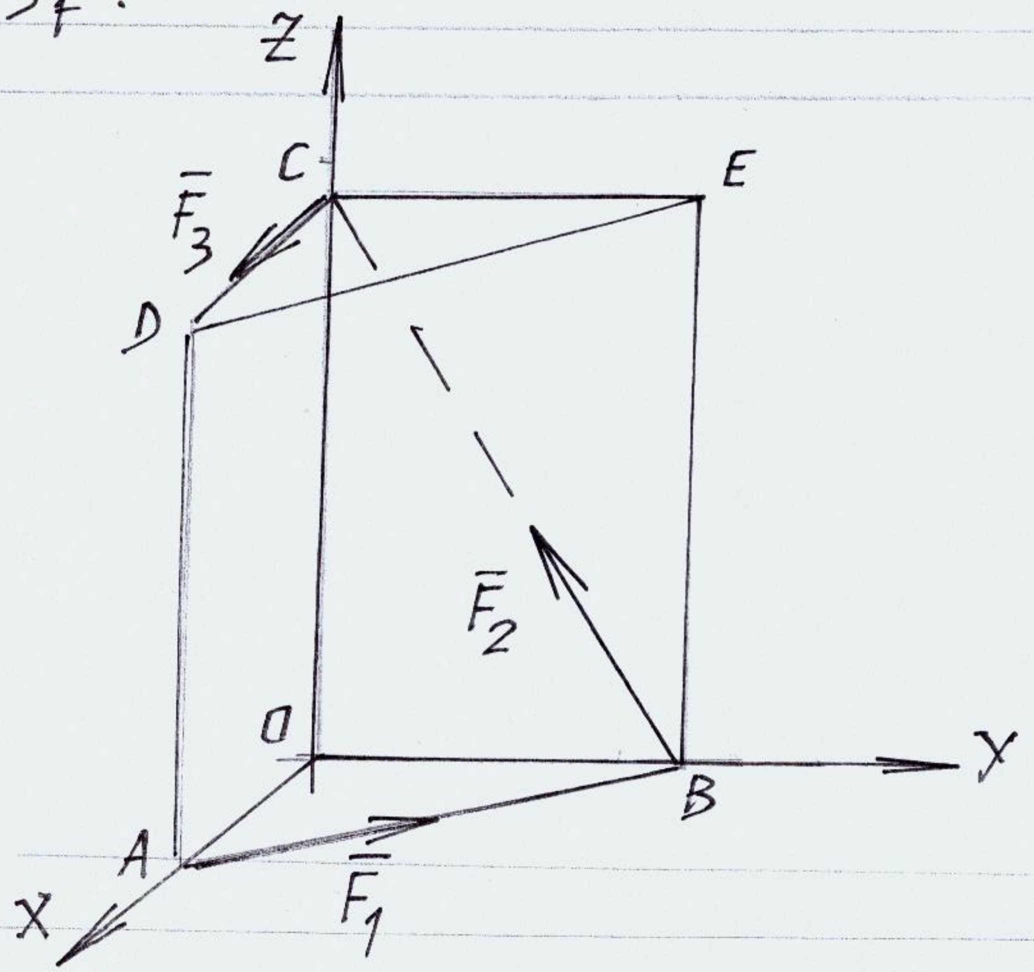
$$\bar{R}^2 = (2f)^2 + f^2 + f^2 = 6f^2 \ ,$$

cu care se obține

$$\bar{r} = \frac{-2lf^2\bar{i} + 5lf^2\bar{j} - lf^2\bar{k}}{6f^2} + \lambda(2f\bar{i} + f\bar{j} + f\bar{k})$$

$$(\Delta_c): \bar{r} = \left(2\lambda f - \frac{l}{3}\right)\bar{i} + \left(\lambda f + \frac{5l}{6}\right)\bar{j} + \left(\lambda f - \frac{l}{6}\right)\bar{k} \ .$$

2. Asupra prismei triunghiulare din figură acționează sistemul de forțe $S=\{\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3\}$: $OA=l$, $OB=2l$, $OC=3l$, $|\bar{F}_1|=f\sqrt{5}$, $|\bar{F}_2|=f\sqrt{13}$, $|\bar{F}_3|=3f$.



Să se determine rezultanta și momentul rezultant în raport cu polul O, să se precizeze cazul de reducere și să se scrie ecuația axei centrale.

Se stabilesc expresiile analitice ale forțelor:

$$\bar{F}_1=|\bar{F}_1|\cdot\frac{\bar{AB}}{|\bar{AB}|}, \qquad \begin{array}{l} B(0,\ 2l,\ 0) \\ A(l,\ 0,\ 0) \end{array}$$

$$\bar{AB}=-l\bar{i}+2l\cdot\bar{j}$$

$$|\overline{AB}|=\sqrt{(-\ell)^2+(2\ell)^2}=\sqrt{5\ell^2}=\ell\sqrt{5}$$

$$\bar{F}_1=f\sqrt{5}\cdot\frac{-\ell\bar{i}+2\ell\cdot\bar{j}}{\ell\sqrt{5}}=-f\cdot\bar{i}+2f\cdot\bar{j}$$

$$\bar{F}_2=|\bar{F}_2|\cdot\frac{\overline{BC}}{|\overline{BC}|}\quad,\qquad \begin{matrix}C(0,\ 0,\ 3\ell)\\ B(0,\ 2\ell,\ 0)\end{matrix}$$

$$\overline{BC}=(x_C-x_B)\bar{i}+(y_C-y_B)\bar{j}+(z_C-z_B)\bar{k}$$

$$\overline{BC}=-2\ell\cdot\bar{j}+3\ell\cdot\bar{k}$$

$$|\overline{BC}|=\sqrt{(-2\ell)^2+(3\ell)^2}=\sqrt{4\ell^2+9\ell^2}=\sqrt{13\ell^2}=\ell\sqrt{13}$$

$$\bar{F}_2=f\sqrt{13}\cdot\frac{-2\ell\cdot\bar{j}+3\ell\cdot\bar{k}}{\ell\sqrt{13}}=-2f\cdot\bar{j}+3f\cdot\bar{k}$$

$$\bar{F}_3=|\bar{F}_3|\cdot\frac{\overline{CD}}{|\overline{CD}|}=3f\cdot\bar{i}\quad,\quad \bar{F}_3\parallel OX$$

Rezultanta

$$\bar{R}=\bar{F}_1+\bar{F}_2+\bar{F}_3=2f\cdot\bar{i}+3f\cdot\bar{k}$$

Se calculează momentele forțelor $F_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3$:

$$\bar{M}_0(\bar{F}_1)=\overline{OA}\times\bar{F}_1=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ \ell & 0 & 0\\ -f & 2f & 0\end{vmatrix}=2\ell f\cdot\bar{k}$$

$$\bar{M}_0(\bar{F}_2)=\overline{OB}\times\bar{F}_2=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 0 & 2\ell & 0\\ 0 & -2f & 3f\end{vmatrix}=6\ell f\cdot\bar{i}$$

$$\bar{M}_0(\bar{F}_3)=\overline{OC}\times\bar{F}_3=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 0 & 0 & 3\ell\\ 3f & 0 & 0\end{vmatrix}=9\ell f\cdot\bar{j}$$

Momentul rezultant

$$\bar{M}_O = \bar{M}_O(\bar{F}_1) + \bar{M}_O(\bar{F}_2) + \bar{M}_O(\bar{F}_3) = 6lf\cdot\bar{i} + 9lf\cdot\bar{j} + 2lf\cdot\bar{k}$$

Se calculează al doilea invariant scalar

$$I_2 = \bar{R}\cdot\bar{M}_O = 2f\cdot 6lf + 0\cdot 9lf + 3f\cdot 2lf = 18lf^2 \neq 0$$

și sistemul este echivalent cu un torsor propriu zis (cazul patru de reducere)

Axa centrală este în acest caz locul geometric al punctelor în raport cu care momentul rezultant calculat are valoare minimă. Ecuația axei centrale este

$$(\Delta_c):\ \bar{r} = \frac{\bar{R}\times\bar{M}_O}{\bar{R}^2} + \lambda\bar{R}\ ,\quad \lambda\in\mathbb{R}.$$

Se calculează

$$\bar{R}\times\bar{M}_O = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2f & 0 & 3f \\ 6lf & 9lf & 2lf \end{vmatrix}$$

$$\bar{R}\times\bar{M}_O = -27lf^2\cdot\bar{i} + 14lf^2\cdot\bar{j} + 18lf^2\cdot\bar{k}$$

și $\bar{R}^2 = (2f)^2 + (3f)^2 = 4f^2 + 9f^2 = 13f^2$,

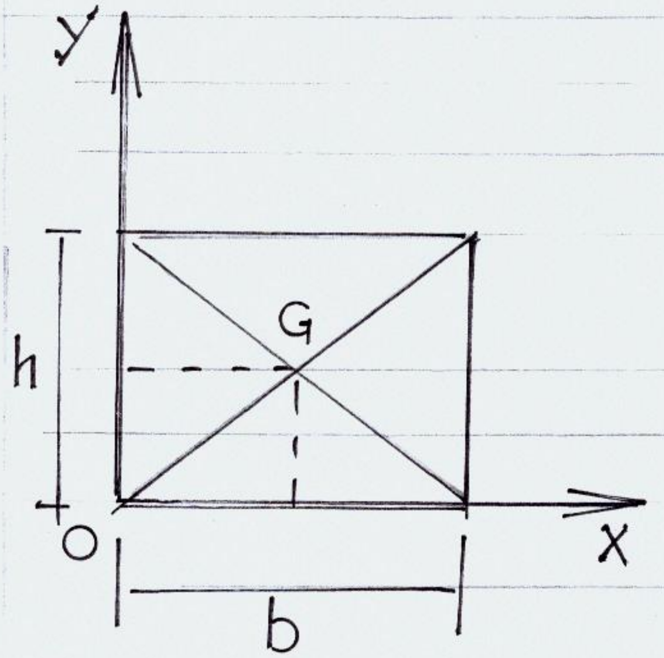
cu care se obține:

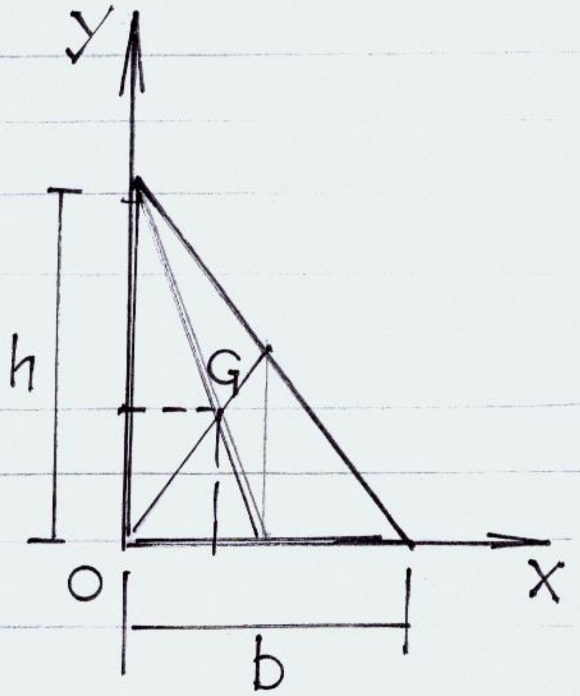
$$\bar{r} = \frac{-27lf^2\bar{i} + 14lf^2\bar{j} + 18lf^2\bar{k}}{13f^2} + \lambda(2f\bar{i} + 3f\bar{k})$$

$$(\Delta_c):\ \bar{r} = \left(2\lambda f - \frac{27}{13}l\right)\bar{i} + \frac{14}{13}l\cdot\bar{j} + \left(3\lambda f + \frac{18}{13}l\right)\bar{k}.$$

Centrul de greutate al unei plăci plane omogene de formă dreptunghiulară se află la intersecția diagonalelor. Acest punct se proiectează pe laturi la jumătățile acestora.

Centrul de greutate al unei plăci plane omogene de formă triunghiulară se află la intersecția medianelor (linia care unește vârful cu mijlocul laturii opuse). În cazul triunghiului dreptunghic, centrul de greutate se proiectează pe catete la o treime de bază și două treimi de vârf.



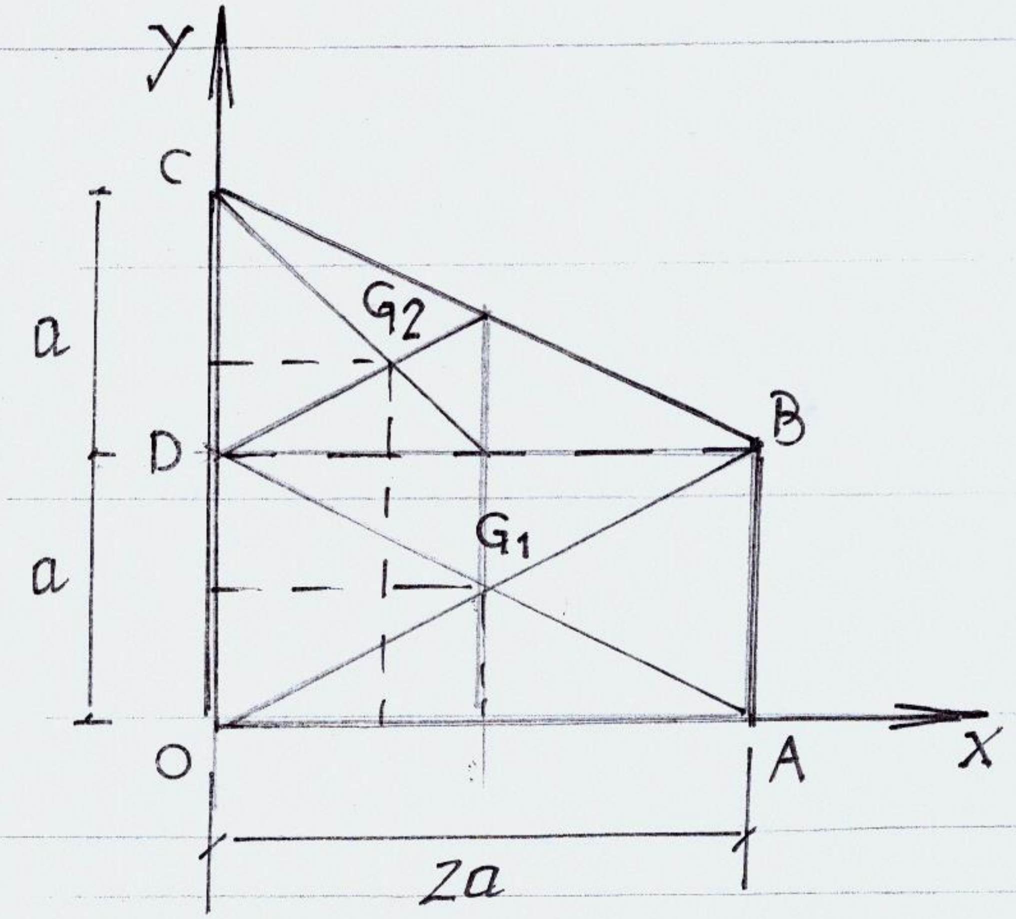


$x_G = \frac{b}{2}, \; y_G = \frac{h}{2}$

$x_G = \frac{b}{3}, \; y_G = \frac{h}{3}$

3. Să se calculeze coordonatele centrului de greutate al plăcii plane omogene din figură pentru care se cunosc:

$OA = 2a$, $AB = a$, $OC = 2a$, $AB \parallel Oy$.



Se descompune placa în figuri simple:

(1) – dreptunghi OABD

(2) – triunghi dreptunghic BDC

Dreptunghiul (1) are laturile OA și AB:

$OA = 2a$, $AB = a$

Triunghiul (2) are catetele BD și CD:

$BD = OA = 2a$, $CD = OC - OD = 2a - a = a$

Se notează G_1 și G_2 centrele de greutate ale figurilor, G_1 se află la intersecția diagonalelor dreptunghiului (1), G_2 se află la intersecția medianelor triunghiului (2).

Coordonatele centrului de greutate G al plăcii se calculează cu relațiile

$$x_G = \frac{\sum_{\mu=1}^{2} x_{G_\mu} A_\mu}{\sum_{\mu=1}^{2} A_\mu} \; , \quad y_G = \frac{\sum_{\mu=1}^{2} y_{G_\mu} A_\mu}{\sum_{\mu=1}^{2} A_\mu} \; ,$$

unde x_{G_μ}, y_{G_μ} sunt coordonatele centrelor G_μ și A_μ sunt ariile figurilor, $\mu = 1, 2$.

Ariile:

$$A_1 = OA \cdot AB = 2a \cdot a = 2a^2$$

$$A_2 = \frac{BD \cdot CD}{2} = \frac{2a \cdot a}{2} = a^2$$

Coordonatele centrelor:

$$x_{G_1} = \frac{OA}{2} = \frac{2a}{2} = a \; , \quad y_{G_1} = \frac{OD}{2} = \frac{a}{2}$$

$$x_{G_2} = \frac{BD}{3} = \frac{2a}{3} \; , \quad y_{G_2} = OD + \frac{CD}{3} = a + \frac{a}{3} = \frac{4a}{3}$$

Se completează următorul tabel:

	$x_{G\mu}$	$y_{G\mu}$	A_μ	$x_{G\mu}A_\mu$	$y_{G\mu}A_\mu$
(1)	a	$\frac{a}{2}$	$2a^2$	$2a^3$	a^3
(2)	$\frac{2a}{3}$	$\frac{4a}{3}$	a^2	$\frac{2}{3}a^3$	$\frac{4}{3}a^3$

Abscisa centrului de greutate se obține ca raport al sumelor de pe a patra și a treia coloană:

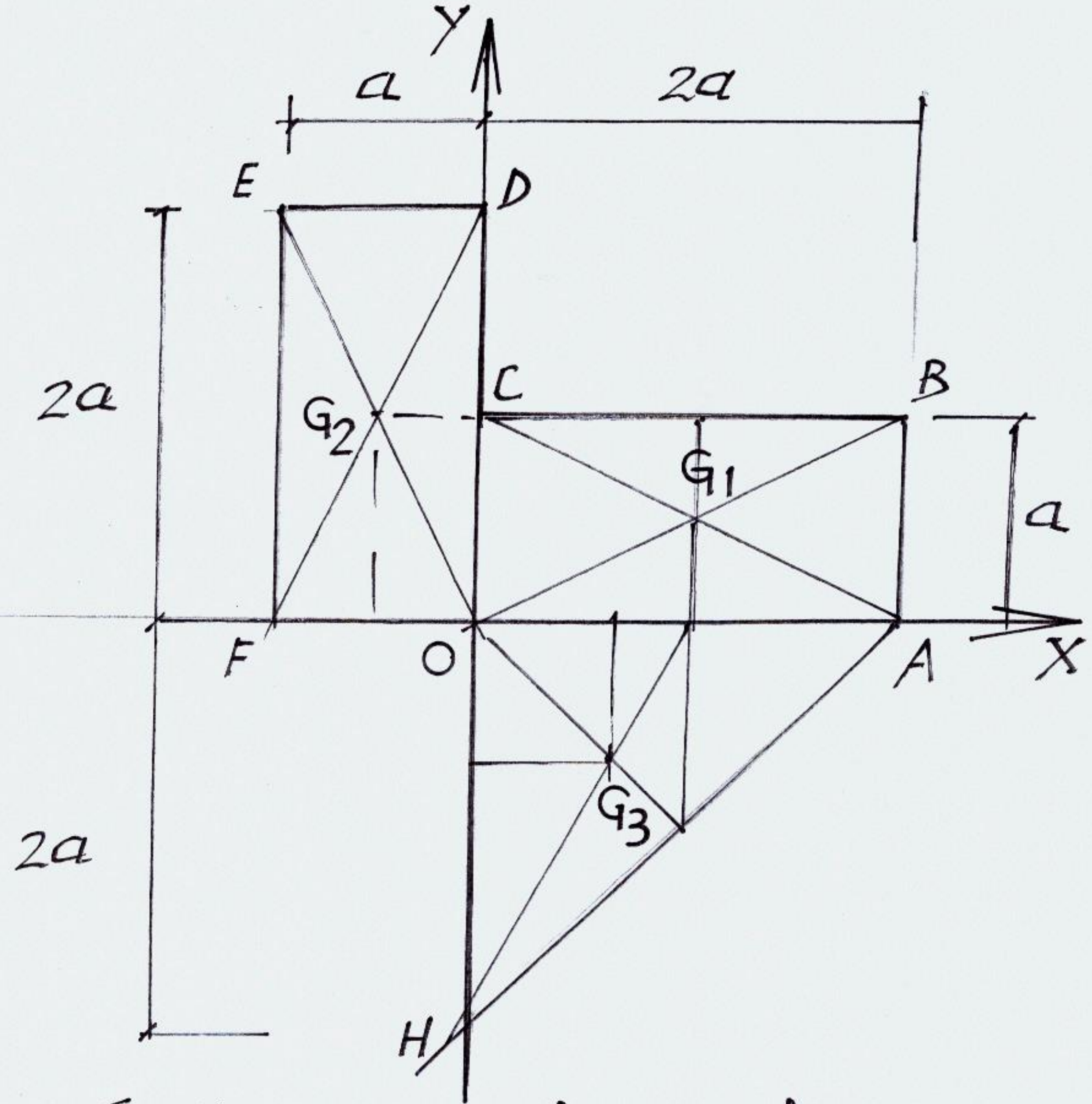
$$x_G = \frac{2a^3 + \frac{2}{3}a^3}{2a^2 + a^2} = \frac{8}{9}a^3$$

Ordonata centrului de greutate se obține ca raport al sumelor de pe a cincea și a treia coloană:

$$y_G = \frac{a^3 + \frac{4}{3}a^3}{2a^2 + a^2} = \frac{7}{9}a.$$

4. Să se calculeze coordonatele centrului de greutate al plăcii plane omogene din figură pentru care se cunosc:

$OA = OD = OH = 2a$, $AB = ED = a$,
$AB \parallel OY$, $ED \parallel OX$, $BC \parallel OX$, $EF \parallel OY$.



Se descompune placa în figuri simple:

(1) – dreptunghi OABC
(2) – dreptunghi ODEF
(3) – triunghi dreptunghic isoscel OAH

Se notează G_1, G_2, G_3 centrele de greutate ale figurilor, G_1 și G_2 se află la intersecțiile diagonalelor dreptunghiurilor, G_3 se află la intersecția medianelor triunghiului.

Coordonatele centrului de greutate al plăcii se calculează cu relațiile:

$$x_G = \frac{\sum_{\mu=1}^{3} x_{G\mu} A_\mu}{\sum_{\mu=1}^{3} A_\mu}, \quad y_G = \frac{\sum_{\mu=1}^{3} y_{G\mu} A_\mu}{\sum_{\mu=1}^{3} A_\mu},$$

cu aceleași notații ca la problema 3.

Se completează următorul tabel:

	$x_{G\mu}$	$y_{G\mu}$	A_μ	$x_{G\mu}A_\mu$	$y_{G\mu}A_\mu$
(1)	a	$\frac{a}{2}$	$2a^2$	$2a^3$	a^3
(2)	$-\frac{a}{2}$	a	$2a^2$	$-a^3$	$2a^3$
(3)	$\frac{2a}{3}$	$-\frac{2a}{3}$	$2a^2$	$\frac{4}{3}a^3$	$-\frac{4}{3}a^3$

și se calculează

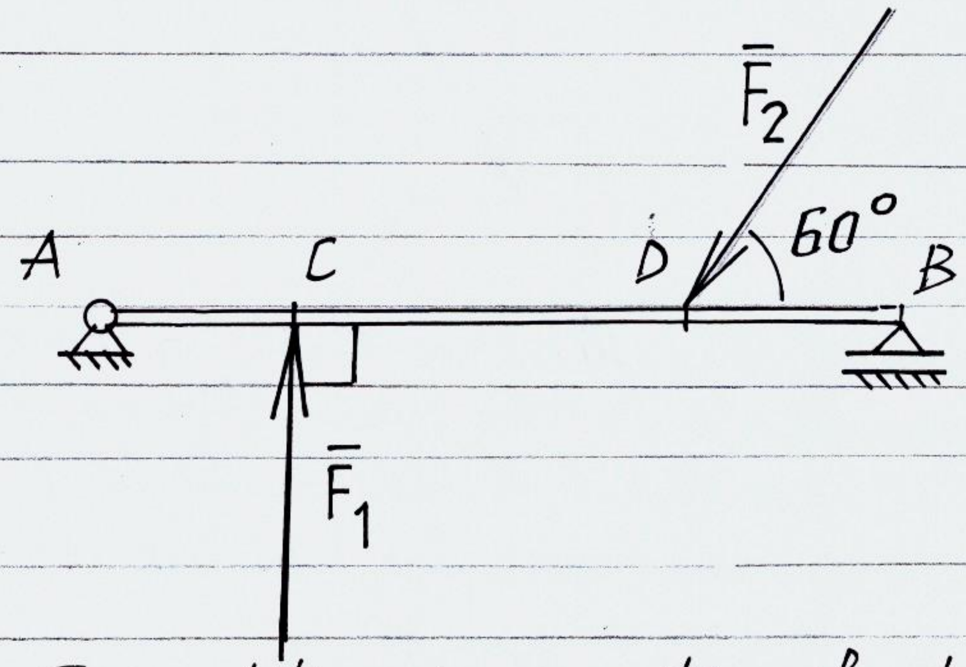
$$x_G = \frac{2a^3 - a^3 + \frac{4}{3}a^3}{2a^2 + 2a^2 + 2a^2} = \frac{7}{18}a$$

$$y_G = \frac{a^3 + 2a^3 - \frac{4}{3}a^3}{2a^2 + 2a^2 + 2a^2} = \frac{5}{18}a.$$

5. Pe bara dreaptă rigidă AB acționează forțele $\bar{F}_1$ și $\bar{F}_2$ ca în figură:

$|\bar{F}_1| = 2f$, $|\bar{F}_2| = f\sqrt{3}$, $\bar{F}_1 \perp AB$

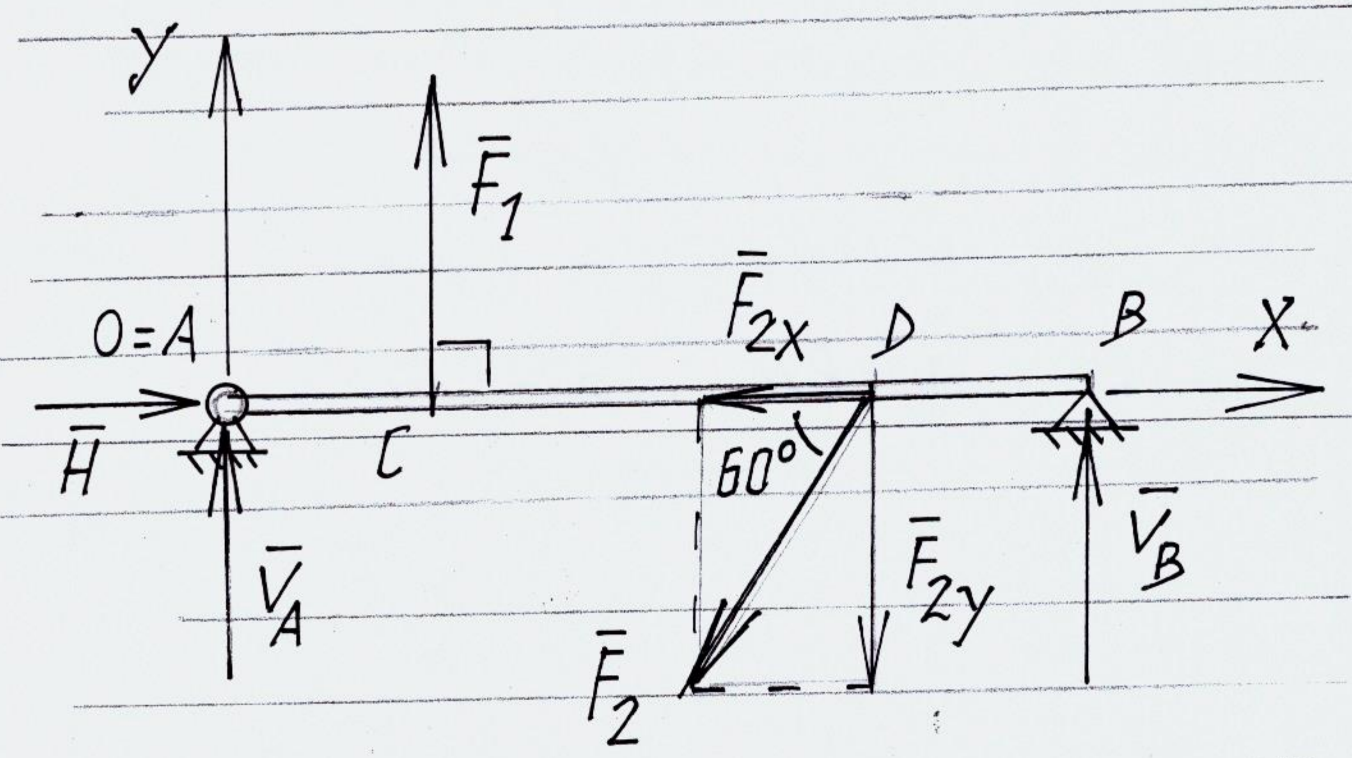
$AB = \ell$, $AC = \ell/4$, $BD = \ell/4$



Să se determine reacțiunile din articulația A și din reazemul simplu B.

Se raportează bara la un reper OXY cu originea în A, axa OX în lungul barei.

În articulația A apar două reacțiuni, una orizontală și una verticală. În reazemul simplu B apare o reacțiune pe direcție verticală. Sensurile reacțiunilor se pun aleatoriu pe figură, de exemplu $\bar{H}_A$ la dreapta, $\bar{V}_A$ și $\bar{V}_B$ în sus.



Condiția de echilibru static a barei este ca rezultanta forțelor care acționează și momentul rezultant al acestor forțe (în raport cu originea reperului) să fie nule:

$$\bar{R}=\bar{0} \quad \text{și} \quad \bar{M}_0=\bar{0}$$

Rezultanta include forțele active ($\bar{F}_1$ și $\bar{F}_2$) și forțele pasive ($\bar{H}_A$, $\bar{V}_A$, $\bar{V}_B$).

$$\bar{R}=\bar{F}_1+\bar{F}_2+\bar{H}_A+\bar{V}_A+\bar{V}_B$$

Momentul rezultant este dat de suma (vectorială) a momentelor forțelor:

$$\bar{M}_0=\bar{M}_0(\bar{F}_1)+\bar{M}_0(\bar{F}_2)+\bar{M}_0(\bar{H}_A)+\bar{M}_0(\bar{V}_A)+\bar{M}_0(\bar{V}_B)$$

$$\bar{M}_0=\bar{M}_0(\bar{F}_1)+\bar{M}_0(\bar{F}_2)+\bar{M}_0(\bar{V}_B)\ ,$$

observând că momentele reacțiunilor din articulația A sunt nule.

Ecuația de forțe

$$\bar{R} = \bar{0}$$

se proiectează scalar pe axele OX și OY, iar ecuația de momente

$$\bar{M}_O = \bar{0}$$

se proiectează scalar pe axa OZ.

Momentele forțelor se scriu cu ajutorul brațului (distanța de la origine la suportul forței) cu regula de semn: dacă forța rotește bara în sens direct momentul este pozitiv, dacă rotește în sens orar momentul este negativ.

Ecuațiile de forțe:

$$OX:\ H_A - F_{2x} = 0$$

$$OY:\ V_A + F_1 - F_{2y} + V_B = 0\ ,$$

$$F_{2x} = F_2 \cdot \cos 60^\circ = \frac{f\sqrt{3}}{2}\ ,\quad F_{2y} = F_2 \cdot \sin 60^\circ = f\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2} f$$

Din prima ecuație rezultă

$$H_A = \frac{f\sqrt{3}}{2}$$

Din a doua ecuație se obține

$$V_A + 2f - \frac{3}{2} f + V_B = 0$$

$$V_A + V_B = -\frac{f}{2} \qquad (*)$$

Ecuatia de momente se scrie observând că numai componenta verticală a forței $\bar{F}_2$ are moment în raport cu originea:

$$F_1 \cdot AC - F_{2y} \cdot AD + V_B \cdot AB = 0$$

Înlocuind forțele și lungimile în ecuație se obține

$$2f \cdot \frac{l}{4} - \frac{3f}{2} \cdot \frac{3l}{4} + V_B \cdot l = 0,$$

$$\frac{f}{2} - \frac{9f}{8} + V_B = 0 \quad , \quad V_B = \frac{5}{8} f \, .$$

Înlocuind rezultatul în relația (*) se obține

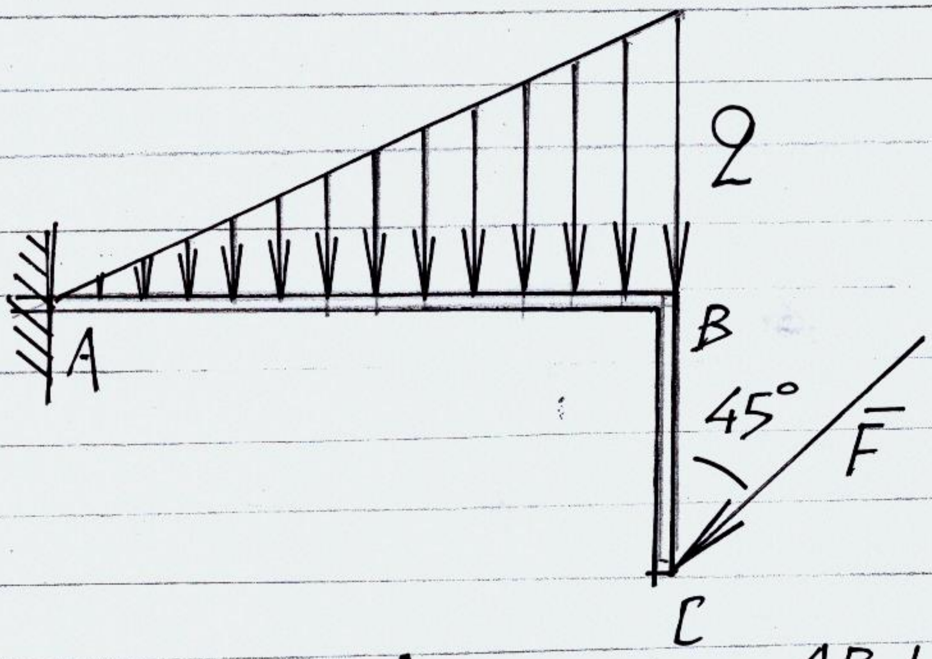
$$V_A + \frac{5}{8} f = -\frac{f}{2}, \quad V_A = -\frac{9}{8} f \, .$$

În concluzie reacțiunile sunt:

$$H_A = \frac{f\sqrt{3}}{2}, \quad V_A = -\frac{9}{8} f \, , \quad V_B = \frac{5}{8} f \, ,$$

cu observația că $\bar{V}_A$ are sens contrar celui din figură (acționează în jos).

6. Să se determine reacțiunile din reazemul triplu A al barei cotite ABC încărcată ca în figură:



Se cunosc: $AB = 2l$, $BC = l$, $AB \perp BC$, $|F| = ql\sqrt{2}$. Pe segmentul AB acționează o distribuție liniară de forțe de intensitate nulă în A și intensitate q în B.

Se raportează bara la un reper OXY cu originea în A, axa OX pe direcția AB.

În reazemul triplu A apar trei reacțiuni, două forțe ($\bar{V}_A$-verticală, $\bar{H}_A$-orizontală) și un moment ($\bar{M}_A$ - pe direcția axei OZ, axa perpendiculară pe planul desenului).

Sensurile reacțiunilor:

$\bar{H}_A$ la dreapta, $\bar{V}_A$ în sus,

M_A în sens direct, observând că momentele solicitărilor active sunt în sens orar.

Condiția de echilibru static a barei este ca rezultanta forțelor care acționează și momentul rezultant al acestor forțe (inclusiv momentul de reacțiune) în raport cu originea reperului să fie nule:

$$\bar{R} = \bar{0} \quad \text{și} \quad \bar{\mathcal{M}}_O = \bar{0}$$

Avem:

$$\bar{R} = \bar{Q} + \bar{F} + \bar{H}_A + \bar{V}_A$$

$$\bar{\mathcal{M}}_O = \bar{M}_O(\bar{Q}) + \bar{M}_O(\bar{F}) + \bar{M}_O(\bar{H}_A) + \bar{M}_O(\bar{V}_A) + \bar{M}_A$$

$$\bar{\mathcal{M}}_O = \bar{M}_O(\bar{Q}) + \bar{M}_O(\bar{F}) + \bar{M}_A ,$$

deoarece $\bar{M}_O(\bar{H}_A) = \bar{0}$ și $\bar{M}_O(\bar{V}_A) = \bar{0}$, unde s-a notat $\bar{Q}$ rezultanta locală a distribuției de forțe pe segmentul AB.

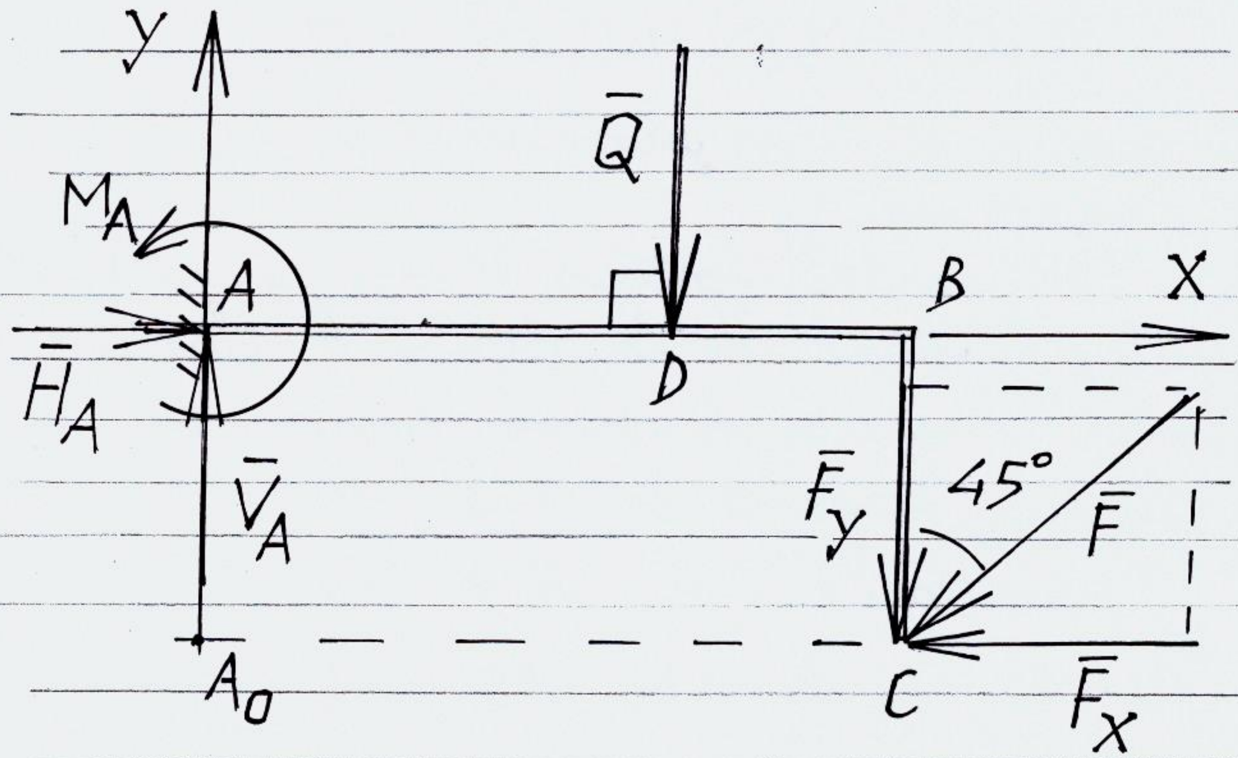
Rezultanta distribuției de forțe este egală cu aria figurii de distribuție, care este un triunghi dreptunghic cu cateta orizontală AB și cateta verticală q:

$$Q = \frac{1}{2} \cdot 2l \cdot q = ql$$

Rezultanta $\bar{Q}$ acționează prin centrul de greutate al figurii de distribuție, în punctul D al barei. Deoarece figura de distribuție este un triunghi dreptunghic, se scrie:

$$AD = \frac{2}{3} \cdot AB = \frac{2}{3} \cdot 2\ell = \frac{4\ell}{3},$$

adică poziția punctului D pe cateta AB este la două treimi de vârf (A) și la o treime de bază (B).



Ecuațiile scalare de forțe sunt:

$OX: \quad H_A - F_X = 0 \quad , \quad F_X = F \cdot \sin 45°$

$OY: \quad V_A - Q - F_Y = 0 \, , \quad F_Y = F \cdot \cos 45°$

Din prima ecuație se obține reacțiunea orizontală:

$$H_A = F \cdot \sin 45^\circ = q l \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = q l \quad ,$$

iar din a doua ecuație se obține reacțiunea verticală:

$$V_A = Q + F \cdot \cos 45^\circ = q l + q l \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2 q l$$

Ecuația scalară de momente este

$$M_O(\bar{Q}) + M_O(\bar{F}_x) + M_O(\bar{F}_y) + M_A = 0 \quad ,$$

în care s-a scris momentul forței $\bar{F}$ pe componente.

Momentele forțelor se scriu cu ajutorul brațului (distanța de la origine la suportul forței), cu regula de semn: pozitiv în sens direct, negativ în sens orar.

Ecuația de momente devine:

$$-Q \cdot AD - F_x \cdot BC - F_y \cdot AB + M_A = 0 ,$$

observând că brațul forței $\bar{F}_x$ este $A_0 A$, segment paralel și egal cu BC.

Componentele forței $\bar{F}$ sunt:

$$F_x = F \cdot \sin 45^\circ = q l \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = q l$$

$$F_y = F \cdot \cos 45^\circ = q l \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = q l$$

Înlocuind forțele și brațele în ecuația de momente se obține:

$$-ql\cdot\frac{4l}{3}-ql\cdot l-ql\cdot 2l+M_A=0\,,$$

$$M_A=\frac{13}{3}ql^2\,.$$

În concluzie, reacțiunile sunt:

$$H_A=ql\,,\quad V_A=2ql\,,\quad M_A=\frac{13}{3}ql^2\,.$$

Valorile obținute fiind pozitive, sensurile sunt cele din figură.