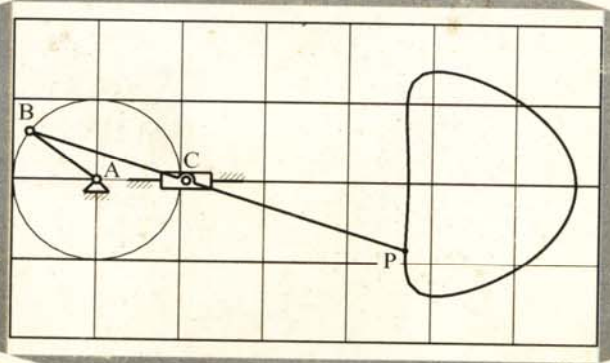
CEZAR D. DUCA
FLORENTIN BUIUM
GABRIEL PÂRÃOARU

MECANISME



EDITURA "GH. ASACHI" IAŞI

CEZAR D. DUCA FLORENTIN BUIUM GABRIEL PÂRĂOARU

MECANISME

Editura “GH. ASACHI” IAŞI
2003

Editura "Gh.Asachi"
Universitatea Tehnică Iaşi
Bd. D. Mangeron, nr.67,
6600, Iaşi, România
Tel: 0232 – 23.13.43
Fax: 0232 – 21.42.90

Director editură:
Prof. univ. dr .ing. Mihail VOICU

Referenţi ştiinţifici:
Prof. univ. dr .ing. Virgil ATANASIU
Prof. univ. dr. ing. Cezar OPRIŞAN

Redactor:
Prof. Georgeta ANICULĂESEI

Colecţia: INGINERIE MECANICĂ

Răspunderea pentru tot ceea ce conţine prezenta carte aparţine în întregime autorului (autorilor) ei.

Descrierea CIP a Bibliotecii Naţionale a României
DUCA, CEZAR
Mecanisme /Cezar Duca, Florentin Buium, Gabriel Pârăoaru – Iaşi, Editura Gheorghe Asachi, 2003.
492 p. 17 x 24
ISBN 973-621-048-0
I. Buium, Florentin
II. Pârăoaru, Gabriel

62-23

PREFAȚĂ

Lucrarea de față este, în intenția autorilor, un **manual** de nivel universitar, cuprinzînd elementele fundamentale ale disciplinei de Mecanisme. Având în vedere acest caracter, în procesul de elaborare, s-a pus un accent deosebit pe definirea riguroasă a noțiunilor specifice şi pe tratarea problematicii într-o structură logică, simplu de urmărit.Conținutul şi organizarea materialului sunt cele consacrate în literatura de specialitate, dar apar şi unele aspecte, formale sau de fond, cu caracter original, care vor fi reliefate în continuare.

Manualul cuprinde şase capitole: 1.Structura mecanismelor, 2.Mecanisme cu cuple inferioare (cu bare), 3.Mecanisme cu came, 4.Mecanisme cu roți dințate, 5.Dinamica mecanismelor şi a maşinilor, 6.Proiectarea mecanismelor. In capitolul 1. se definesc noțiunile de bază ale disciplinei şi se prezintă clasificarea mecanismelor după diverse criterii. O problemă deosebit de importantă şi dificilă, tratată în acest capitol, este determinarea gradului de mobilitate şi a numărului de legături pasive. S-a încercat o rezolvare cât mai riguroasă a acestei probleme în limitele unui spațiu destul de restrâns. În acest scop s-au introdus şi s-au utilizat noțiunile de clasă constructivă şi de clasă funcțională pentru cuplele cinematice. În capitolele 2,3 şi 4 sunt tratate, separat, cele trei categorii mari de mecanisme: cu bare, cu came şi cu roți dințate. Fiecare dintre aceste capitole cuprinde, în general, următoarea problemetică: analiza cinemaică, analiza cinetostatică şi randamentul, analiza preciziei şi sinteza. În raport cu alte manuale, am considerat oportun să tratăm analiza cinetostatică şi randamentul la fiecare categorie de mecanisme deoarece rezolvările prezintă aspecte specifice. Subliniem, de asemenea, prezența unui subcapitol de analiza preciziei, asociat cu fiecare categorie de mecanisme. Justificăm această opțiune prin importanța problemei preciziei în tehnica modernă. Odată cu prezentarea metodelor de analiză cinematică şi cinetostatică, se formulează şi condițiile de obținere a soluțiilor reale. Interpretarea acestor condiții este legată de existența fenomenului de autoblocare şi a pozițiilor critice care, în felul aceste sunt puse într-o lumina nouă. In cadrul sintezei dimensionale a mecanismelor cu bare se propune o sistematizare a problemeticii, prin delimitarea unui domeniu de utilizare curentă, numit sinteza elementară, care este tratat în mod exhaustiv. În capitolul 3 se prezintă o interpretare originală a fenomenului de subtăiere la came, legată de o formulă inedită pentru calculul razei de curbură, care permite determinarea caracterului convex sau concav al profilului. În legătură cu

mecanismele cu came se indică şi o metodă nouă pentru analiza preciziei de funcţionare. Expresiile de calcul ale randamentului pentru mecanismele cu came şi pentru angrenajele paralele , în care se ia în considerare frecarea din toate cuplele cinematice, au, de asemenea , un caracter original. Menţionăm că, în capitolul 5, pe lângă problemele consacrate, privind analiza dinamică şi echilibrarea forţelor de inerţie, am introdus un subcapitol de analiză elestodinamică în care se încearcă o abordare mai aprofundată, în raport cu alte manuale similare, a fenomenului vibrator la mecanisme. În capitolul 6 al lucrării, autorii îşi propun să arate modul în care intervin operaţiile de analiză şi de sinteză, în conexiune cu proiectarea organologică, în procesul de proiectare a mecanismelor. Scopul acestei încercări este de a demonstra locul şi utilitatea domeniului ştiinţific asociat disciplinei didactice de Mecanisme în practica de proiectare.

O trăsătură esnţială, pe care autorii au dorit să o imprime lucrării, este legată de finalizarea numerică a metodelor şi procedeelor prezentate. În acest sens se oferă indicaţii precise cu privire la aplicarea metodelor numerice sau a programelor utilitare de rezolvare a modelelor matematice aferente fiecărei probleme. De altfel, toate diagramele din manual sunt obţinute pe baza unor calcule, pornind de la valori concrete ale parametrilor care intervin.

Ne exprimăm speranţa că lucrarea va fi utilă, atât pentru studenţii din învăţămîntul tehnic, cât şi pentru inginerii din indusrie şi din proiectare.

Dr. ing. Cezar DUCA
Dr. ing. Florentin BUIUM
Ing. Gabriel PÂRĂOARU

CUPRINS

Pag.		
1	**Cap. 1**	**STRUCTURA MECANISMELOR**
1	1.1.	Noțiuni fundamentale
1	1.1.1.	Elemente şi cuple cinematice
7	1.1.2.	Lanțuri cinematice, mecanisme
11	1.2.	Determinarea gradului de mobilitate
11	1.2.1.	Stabilirea formulelor de calcul
15	1.2.2.	Familii de mecanisme, exemple
16	1.2.2.1.	Familia $f = 4$ ▪Mecanismele plane cu cuple de translație ▪Mecanismele cu şurub ▪ Mecanismele cu roți de fricțiune
19	1.2.2.2.	Familia $f = 3$ ▪Mecanismele plane (cu excepția celor care au numai cuple de translație) ▪Mecanismele sferice
23	1.2.2.3.	Familia $f = 0$
23	1.2.3.	Situații particulare privind determinarea gradului de mobilitate
24	1.2.3.1.	Mobilități locale
24	1.2.3.2.	Lanțuri cinematice pasive
26	1.3.	Clasificarea structurală a mecanismelor plane
26	1.3.1.	Înlocuirea cuplei superioare
28	1.3.2.	Noțiunea de grupă structurală ▪Grupele structurale cu $L = 0$ (Assur) ▪Grupele conducătoare (Duca, Simionescu) cu $L = 1$
31	1.3.3.	Formarea mecanismelor şi descompunerea în grupe structurale
39	**Cap. 2**	**MECANISME CU CUPLE INFERIOARE (CU BARE)**
39	2.1.	Analiza cinematică
39	2.1.1.	Considerații generale
41	2.1.2.	Metoda intersecției locurilor geometrice ▪Grupa structurală RRR ▪Grupa structurală RRT ▪Grupa structurală RTR ▪Grupa structurală RTRR
51	2.1.3.	Metoda ecuațiilor vectoriale
51	2.1.3.1.	Prezentare generală▪Ecuații de tipul I ▪Ecuații de tipul II
53	2.1.3.2.	Analiza cinematică a grupelor structurale ▪Grupa structurală RRT ▪Grupa structurală 0 / 3 / 3 cu cuple de rotație
65	2.1.4.	Metoda contururilor vectoriale
65	2.1.4.1.	Prezentare generală
67	2.1.4.2.	Mecanismul patrulater articulat plan

Pag.		
72	2.1.4.3.	Mecanismul manivelă – piston (bielă – manivelă) ▪Formule aproximative
74	2.1.4.4.	Mecanismul cu culisă de rotație
76	2.1.4.5.	Mecanismul cu culisă de translație
77	2.1.4.6.	Mecanismul cu cilindru oscilant
79	2.1.5.	Metoda transformărilor de coordonate (matriceală)
79	2.1.5.1.	Prezentare generală
81	2.1.5.2.	Analiza cinematică a unui mecanism de robot
83	2.1.6.	Metoda funcțiilor de transmitere
85	2.1.7.	Procedee indirecte de analiză cinematică
86	2.1.7.1.	Procedeul schimbării cuplei conducătoare
88	2.1.7.2.	Procedeul schimbării bazei
91	2.1.8.	Mecanismul cardanic
94	2.1.9.	Mecanismul patrulater articulat spațial ▪Problema pozițiilor ▪Problema vitezelor şi a accelerațiilor
102	2.1.10.	Mecanismul manivelă – piston spațial ▪Problema pozițiilor ▪Problema vitezelor şi a accelerațiilor
106	2.2.	Analiza cinetostatică
106	2.2.1.	Forțele în mecanisme
106	2.2.1.1.	Obiectul analizei cinetostatice
106	2.2.1.2.	Forțele aplicate
108	2.2.1.3.	Forțele de inerție ▪Reducerea forțelor de inerție ▪Metoda concentrării maselor ▪Concentrarea statică în două puncte ▪Concentrarea dinamică în două puncte ▪Concentrarea dinamică în trei puncte coliniare, dintre care unul este centrul de masă
111	2.2.1.4.	Forțele de legătură ▪Reacțiunile normale ▪Forțele de frecare
117	2.2.2.	Analiza cinetostatică fără frecare ▪Considerații generale
118	2.2.2.1.	Analiza cinetostatică a grupelor structurale ▪Grupa structurală RRT ▪Grupa structurală 0 / 3 / 3 cu cuple de rotație
131	2.2.2.2.	Mecanismul patrulater articulat plan
133	2.2.3.	Analiza cinetostatică în prezența frecării
133	2.2.3.1.	Considerații generale
138	2.2.3.2.	Modelul matematic ▪Grupa RRT ▪Metoda aproximațiilor succesive
140	2.2.3.3.	Fenomenul de autoblocare ▪Explicarea producerii fenomenului de autoblocare ▪Analiza comportării grupelor structurale
148	2.2.4.	Randamentul mecanic
153	2.2.5.	Mecanismul cu şurub

Pag.		
159	2.3.	Analiza preciziei
159	2.3.1.	Introducere. Abateri elementare
161	2.3.2.	Metoda deterministă ▪Influența jocurilor
164	2.3.3.	Metoda probabilistică
166	2.4.	Sinteza dimensională
166	2.4.1.	Considerații generale
168	2.4.2.	Sinteza elementară
168	2.4.2.1.	Problematica sintezei elementare ▪Problema rotabilității ▪Sinteza pentru asigurarea calității transmiterii forțelor ▪Sinteza în funcție de pozițiile extreme ale elementului condus ▪Sinteza după coeficientul de productivitate
170	2.4.2.2.	Mecanismul patrulater articulat plan ▪Problema rotabilității ▪Sinteza după unghiul de presiune ▪Sinteza în funcție de pozițiile extreme ale balansierului ▪Sinteza în funcție de coeficientul de productivitate ▪Sinteza elementară combinată
186	2.4.2.3.	Mecanismul manivelă – piston ▪Problema rotabilității ▪Sinteza după unghiul de presiune ▪Sinteza în funcție de pozițiile extreme ale patinei ▪Sinteza în funcție de coeficientul de productivitate ▪Sinteza elementară combinată
191	2.4.2.4.	Mecanismul cu culisă de rotație ▪Problema rotabilității ▪Sinteza în funcție de calitatea transmiterii forțelor ▪Sinteza elementară combinată
192	2.4.2.5.	Mecanismul cu cilindru oscilant
195	2.4.3.	Sinteza mecanismelor pentru generarea curbelor
195	2.4.3.1.	Aplicație la mecanismul patrulater articulat plan ▪Teorema Roberts – Cebâşev
198	2.4.3.2.	Mecanisme generatoare de traiectorii rectilinii şi circulare
201	2.4.4.	Sinteza mecanismelor pentru ghidarea elementelor
204	2.4.5.	Sinteza mecanismelor generatoare de funcții
206	2.4.6.	Sinteza mecanismelor cu mişcare intermitentă (cu opriri)
206	2.4.6.1.	Mecanisme cu mişcare intermitentă în acelaşi sens ▪Mecanisme cu clichet ▪Mecanisme cu cruce de Malta
209	2.4.6.2.	Mecanisme cu mişcare intermitentă însoțită de schimbarea sensului
212	2.4.7.	Sinteza mecanismelor pentru reproducerea curbelor asemenea (pantografe)
214	**Cap. 3**	**MECANISME CU CAME**
214	3.1.	Clasificare, transformări

Pag.		
214	3.1.1.	Clasificare
216	3.1.2.	Transformări
216	3.1.2.1.	Transformarea prin schimbarea bazei (procedeul inversării mişcărilor)
217	3.1.2.2.	Transformarea prin eliminarea rolei
218	3.1.2.3.	Transformarea mecanismelor spațiale în mecanisme plane
219	3.1.2.4.	Transformarea mecanismelor cu came în mecanisme cu cuple inferioare
220	3.2.	Analiza cinematică
223	3.3.	Legile de mişcare
223	3.3.1.	Ciclul de funcționare
224	3.3.2.	Adoptarea legii de mişcare ▪Criteriul funcțional ▪Criteriul dinamic ▪Criteriul tehnologic
226	3.3.3.	Legi de mişcare uzuale
226	3.3.3.1.	Legi de mişcare elementare ▪Legea de mişcare cu viteză constantă ▪Legea de mişcare cu accelerație constantă (mişcare uniform accelerată) ▪Legea de mişcare cu accelerație cosinusoidală ▪Legea de mişcare cu accelerație sinusoidală
228	3.3.3.2.	Legi de mişcare polinomiale ▪Legea de mişcare polinomială 2-3 ($k=1$) ▪Legea de mişcare polinomială 3-4-5($k=2$) ▪Legea de mişcare polinomială 4-5-6-7($k=3$) ▪Legea de mişcare polinomială 3-4-5-6($k=2$)
231	3.3.3.3.	Legi de mişcare combinate ▪Legea de mişcare cu viteză trapezoidală ▪Legea de mişcare cu viteză trapezoidală modificată sinusoidal ▪Legea de mişcare cu accelerație trapezoidală
235	3.4.	Elemente de geometrie şi cinematică
235	3.4.1.	Problematica generală ▪Caracterizarea constructivă a mecanismului ▪Sinteza profilului teoretic ▪Cinematica cuplei superioare ▪Unghiul de presiune ▪Sinteza profilelor reale ▪Raza de curbură, subtăierea
241	3.4.2.	Mecanismul plan cu tachet de translație şi rolă ▪Caracterizarea constructivă ▪Sinteza profilului teoretic ▪Cinematica cuplei superioare ▪Unghiul de presiune ▪Sinteza profilului real ▪Raza de curbură
245	3.4.3.	Mecanismul plan cu tachet de rotație şi rolă ▪Caracterizarea constructivă ▪Sinteza profilului teoretic ▪Cinematica cuplei superioare ▪Unghiul de presiune ▪Sinteza profilului real ▪Raza de curbură

Pag.		
249	3.4.4.	Mecanismul plan cu tachet de translaţie şi talpă ▪Caracterizarea constructivă ▪Cinematica cuplei superioare ▪Sinteza profilului ▪Raza de curbură
251	3.4.5.	Mecanismul spaţial cu camă cilindrică şi tachet de translaţie ▪Caracterizarea constructivă ▪Sinteza profilului teoretic ▪Cinematica cuplei superioare ▪Unghiul de presiune ▪Sinteza profilului real ▪Raza de curbură
254	3.5.	Analiza cinetostatică
254	3.5.1.	Forţele de legătură din cupla superioară
254	3.5.1.1.	Cupla superioară simplă
255	3.5.1.2.	Cupla superioară cu rolă
258	3.5.2.	Mecanismul plan cu tachet de translaţie şi rolă
258	3.5.2.1.	Analiza cinetostatică
261	3.5.2.2.	Randamentul, autoblocarea
264	3.5.3.	Mecanismul plan cu tachet de rotaţie şi rolă
264	3.5.3.1.	Analiza cinetostatică
265	3.5.3.2.	Randamentul, autoblocarea
266	3.5.4.	Mecanismul plan cu tachet de translaţie şi talpă
266	3.5.4.1.	Analiza cinetostatică
269	3.5.4.2.	Randamentul, autoblocarea
270	3.6.	Analiza preciziei
274	3.7.	Sinteza dimensională
274	3.7.1.	Formularea generală a problemei
278	3.7.2.	Mecanismul plan cu tachet de translaţie şi rolă
280	3.7.3.	Mecanismul plan cu tachet de rotaţie şi rolă
283	3.7.4.	Mecanismul spaţial cu camă cilindrică şi tachet de translaţie
284	**Cap. 4**	**MECANISME CU ROŢI DINŢATE**
284	4.1.	Mecanisme elementare cu roţi dinţate (angrenaje)
284	4.1.1.	Suprafeţele şi liniile caracteristice ale roţilor dinţate
288	4.1.2.	Clasificarea angrenajelor ▪Variaţia raportului de transmitere ▪Poziţia relativă a axelor şi forma suprafeţelor de rostogolire ▪Angrenaje exterioare şi interioare ▪Forma liniilor de divizare ale flancurilor ▪Modul de definire geometrică ▪Forma profilului frontal
294	4.1.3.	Angrenaje paralele formate din roţi dinţate cilindrice cu dinţi drepţi
294	4.1.3.1.	Raportul de transmitere. Legea fundamentală a angrenării
296	4.1.3.2.	Utilizarea evolventei cercului ca profil de dinte ▪Evolventa cercului. Definiţie, ecuaţii, proprietăţi ▪Verificarea legii fundamentale a angrenării în cazul profilelor evolventice

Pag.		
300	4.1.3.3.	Definirea geometrică a roții dințate cilindrice cu dinți drepți ▪Cremaliera de referință ▪Parametrii geometrici principali ai roții dințate cilindrice exterioare cu dinți drepți ▪Parametrii geometrici ai roții dințate pe un cerc oarecare
307	4.1.3.4.	Angrenajul paralel exterior ▪Parametrii geometrici ▪Angrenarea cu joc radial standardizat
310	4.1.3.5.	Angrenajul paralel interior
313	4.1.3.6.	Formarea şi întreruperea contactului dintre dinți. Continuitatea angrenării
317	4.1.3.7.	Fenomenul de interferență
322	4.1.3.8.	Alunecarea relativă a profilelor
325	4.1.3.9.	Analiza cinetostatică. Randamentul
331	4.1.3.10.	Adoptarea coeficienților de deplasare
332	4.1.4.	Angrenaje paralele formate din roți dințate cilindrice cu dinți înclinați
332	4.1.4.1.	Definirea roții dințate cilindrice cu dinți înclinați ▪Cremaliera de referință cu dinți înclinați ▪Parametrii geometrici principali ai roții dințate cilindrice cu dinți înclinați
337	4.1.4.2.	Angrenajul paralel cu diți înclinați ▪Parametrii geometrici ai angrenajului ▪Aspecte specifice ale angrenajelor paralele cu dinți înclinați
341	4.1.5.	Angrenaje concurente
341	4.1.5.1.	Angrenajul analog
342	4.1.5.2.	Definirea roții dințate conice cu dinți drepți
344	4.1.5.3.	Angrenajul concurent format din roți conice cu dinți drepți
345	4.1.5.4.	Angrenaje concurente cu dinți înclinați şi curbi
347	4.1.6.	Angrenaje melcate
350	4.1.7.	Angrenaje cilindrice cu axe încrucişate (elicoidale)
352	4.1.8.	Angrenaje hipoide
353	4.1.9.	Precizia angrenajelor
353	4.1.9.1.	Problema jocului dintre flancuri ▪Modificarea deplasărilor de profil ▪Majorarea distanței dintre axe
356	4.1.9.2.	Bazele geometrice ale măsurării danturii ▪Coarda de divizare şi coarda constantă ▪Cota peste dinți ▪Cota peste role
360	4.2.	Mecanisme complexe cu roți dințate
360	4.2.1.	Mecanisme complexe cu axe fixe
360	4.2.1.1.	Analiza cinematică
362	4.2.1.2.	Randamentul, transmiterea momentelor
363	4.2.2.	Mecanisme planetare

Pag.		
363	4.2.2.1.	Structura mecanismelor planetare
366	4.2.2.2.	Analiza cinematică
369	4.2.2.3.	Transmiterea momentelor, randamentul
372	4.2.2.4.	Diferențialul de automobil
376	**Cap. 5**	**DINAMICA MECANISMELOR ŞI MAŞINILOR**
376	5.1.	Analiza dinamică
376	5.1.1.	Modele dinamice
378	5.1.2.	Fazele funcționării maşinii
380	5.1.3.	Ecuațiile mişcării maşinii
383	5.1.4.	Rezolvarea ecuațiilor de mişcare
383	5.1.4.1.	Cazul $M_{red}^{m}(\omega)$, $M_{red}^{r}(\omega)$, $J_{red} = ct$.
387	5.1.4.2.	Cazul $M_{red}^{m}(\omega)$, $M_{red}^{r}(\varphi)$
388	5.1.4.3.	Cazul $M_{red}^{m}(\varphi)$, $M_{red}^{r}(\varphi)$
391	5.1.5.	Uniformizarea mişcării maşinii
394	5.1.6.	Comportarea energetică a maşinii
395	5.2.	Analiza elastodinamică
395	5.2.1.	Considerații generale
398	5.2.2.	Maşini cu transmisii elastice
398	5.2.2.1.	Modelul fizic
400	5.2.2.2.	Modelul matematic
406	5.2.3.	Mecanisme cu came
406	5.2.3.1.	Modelarea fizică şi matematică
407	5.2.3.2.	Coeficientul dinamic ▪Legea de mişcare cu accelerație cosinusoidală ▪Legea de mişcare cu accelerație sinusoidală
412	5.2.3.3.	Sinteza legii de mişcare
414	5.3.	Echilibrarea forțelor de inerție
415	5.3.1.	Echilibrarea rotoarelor
415	5.3.1.1.	Condițiile de echilibrare
417	5.3.1.2.	Reducerea forțelor de inerție în două plane. Echilibrarea experimentală
421	5.3.2.	Echilibrarea mecanismelor
421	5.3.2.1.	Condițiile de echilibrare
424	5.3.2.2.	Echilibrarea statică. Metoda punctelor principale ▪Determinarea centrului de masă al mecanismului ▪Echilibrarea statică a mecanismului patrulater articulat ▪Echilibrarea statică a mecanismului manivelă – piston
430	5.3.2.3.	Metoda analizei armonice

Pag.		
434	5.3.2.4.	Noțiuni privind echilibrarea motoarelor policilindrice ▪Motorul cu doi cilindri ▪Motorul cu trei cilindri ▪Motorul cu patru cilindri
440	**Cap. 6**	**PROIECTAREA MECANISMELOR**
440	6.1.	Considerații generale
442	6.2.	Adoptarea schemei cinematice
447	6.3.	Strategii (proceduri) de proiectare
457		**ANEXE**
457	Anexa 1	Noțiuni de geometrie analitică şi diferențială
457	1.1.	Transformări de coordonate ▪Transformări între două sisteme carteziene plane ▪Transformări dintr-un sistem cartezian într-un sistem polar
458	1.2.	Tangenta şi normala la o curbă
459	1.3.	Raza de curbură, convexitatea, concavitatea
461	1.4.	Unghiul de poziție al unui vector
462	Anexa 2	Noțiuni de analiză matematică
462	2.1.	Derivatele funcțiilor inverse
462	2.2.	Derivatele funcțiilor implicite
462	2.3.	Derivatele funcțiilor date parametric
463	Anexa 3	Mişcarea relativă dintre două corpuri (roți dințate) care execută mişcări absolute de rotație în jurul a două axe fixe
464	3.1.	Axa instantanee a mişcării relative
465	3.2.	Axoidele mişcarii relative
466	Anexa 4	Demonstrația relației $a_x \geq a$
469		**BIBLIOGRAFIE**
471		**AFTERWORD**
473		**CONTENTS**

Capitolul 1

STRUCTURA MECANISMELOR

1.1. NOȚIUNI FUNDAMENTALE

1.1.1. Elemente şi cuple cinematice

Prin **element cinematic** se înțelege un corp solid constituit dintr-o piesă mecanică sau din mai multe piese îmbinate rigid între ele. Elementele cinematice se consideră rigide în majoritatea problemelor studiate în manualul de față. În unele cazuri (analiza cinetoelastodinamică) se renunță la această ipoteză, admițând deformațiile elastice. Sistemele care conțin elemente flexibile - curele, cabluri - nu fac obiectul lucrării.

Cupla cinematică este **legătura mobilă** dintre două elemente cinematice, formată prin **contactul direct** între suprafețele lor.

Numărul de parametri independenți, care determină complet poziția relativă a unui element în raport cu celălalt, reprezintă **gradul de mobilitate** al cuplei - m ($1 \le m \le 5$).Gradul de mobilitate arată, de asemenea, numărul de mişcări elementare posibile. Acestea sunt proiecțiile, diferite de zero, ale vitezei de translație şi ale vitezei unghiulare în mişcarea relativă, pe axele unui sistem de coordonate solidar cu unul dintre elemente.

Numărul de mişcări elementare care nu se pot executa (**restricții** sau **legături**) se numeşte **grad de restrictivitate** - k ($1 \le k \le 5$). Gradul de restrictivitate poate fi interpretat ca fiind egal cu numărul de condiții (ecuații independente) care intervin între parametrii de poziție sau de viteză ai celor două elemente. Între gradul de mobilitate şi gradul de restrictivitate există relația evidentă

$$m + k = 6. \tag{1.1}$$

Conform axiomei eliberării de legături, restricțiile cinematice se înlocuiesc printr-un sistem de reacțiuni ideale (normale la suprafețele în contact). Mai precis, vitezele de translație se înlocuiesc prin forțe de reacțiune, iar vitezele unghiulare prin momente de reacțiune. Se observă că numărul de

componente ale torsorului de reacțiune este egal cu gradul de restrictivitate, iar sistemul vitezelor şi cel al reacțiunilor sunt complementare.

Cuplele cinematice se clasifică după mai multe criterii. Astfel, ele se împart în cinci clase - **clasa** fiind egală cu gradul de restrictivitate.

După modul de realizare a contactului există cuple **inferioare** sau **congruente**, când contactul are loc după o suprafață, şi cuple **superioare** sau **necongruente**, când contactul este punctual sau liniar.

În funcție de mişcarea relativă dintre elemente există cuple **plane**, când această mişcare este plan - paralelă, şi **spațiale**, când mişcarea relativă este spațială.

Orice cuplă cinematică se poate construi în două variante: **închisă** sau **deschisă**. Cuplele cinematice sunt închise, atunci când legăturile împiedică deplasările în ambele sensuri fiind caracterizate printr-un contact **bilateral**, şi deschise, atunci când deplasările sunt împiedicate numai într-un sens datorită unui contact **unilateral**. În cazul cuplelor deschise, permanența contactului se asigură prin acțiunea unor forțe care, în general, sunt de natură elastică, generate de arcuri.

În Tab.1.1 se prezintă cuplele cinematice uzuale, indicându-se forma suprafețelor în contact, reprezentarea constructivă şi cea schematică, tabelul cu mişcările elementare şi reacțiunile, precum şi clasificarea după criteriile arătate.

În general, legăturile unei cuple cinematice sunt determinate de forma suprafețelor în contact (legături geometrice). Cuplele 1 - 12 din Tab.1.1 sunt de acest fel. În aplicațiile tehnice se întâlnesc, uneori, şi cuple cu mişcare relativă de rostogolire, caracterizate prin legături cinematice. Pentru a defini mişcarea de rostogolire să considerăm o cuplă superioară cu contact punctual, formată între elementele 1 şi 2 (Fig.1.1). În punctul de contact P se confundă punctele P_1 aparținând elementului 1 şi P_2 aparținând elementului 2. Între vitezele lor se poate scrie relația

$$\overline{v}_{P_2} = \overline{v}_{P_1} + \overline{v}_{P_{21}} . \tag{1.2}$$

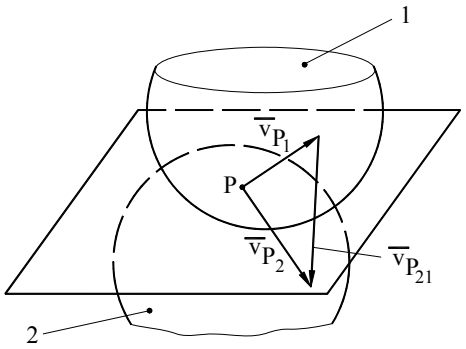


Fig. 1.1

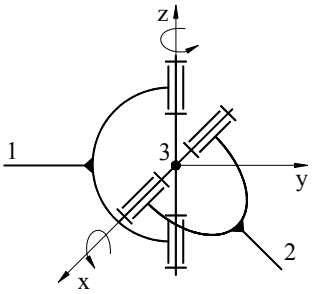


Fig. 1.2

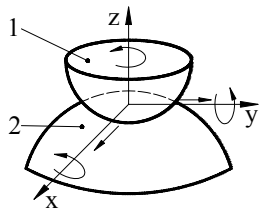
Vectorul $\overline{v}_{P_{21}}$ este paralel cu planul tangent la cele două suprafețe în contact şi se numeşte viteză relativă de alunecare. Dacă $\overline{v}_{P_2} = \overline{v}_{P_1}$ şi, deci, $\overline{v}_{P_{21}} = 0$, mişcarea relativă este de rostogolire pură. Când unul dintre punctele P_1, P_2 este punct de contact permanent mişcarea este de alunecare pură. Dacă $\overline{v}_{P_{21}} \neq 0$, iar punctul de contact se deplasează pe ambele suprafețe, mişcarea relativă este combinată – rostogolire cu alunecare. În cazul cuplelor inferioare mişcarea relativă este de alunecare pură. Cupla din poziția 13 – Tab.1.1 - admite numai o mişcare de rostogolire pură între suprafețele cilindrice. Mişcarea de alunecare este împiedicată datorită forțelor de frecare cauzate, la rândul lor, de proprietățile de aderență ale suprafețelor.

Uneori, cuplele cinematice, care presupun contactul direct între elemente, se înlocuiesc prin subansamble cu elemente intermediare numite **policuple cinematice**. Astfel, în locul cuplelor de rotație, cu mişcare relativă de alunecare, se folosesc rulmenți având avantajul utilizării frecării de rostogolire. În acelaşi mod, cuplele de translație şi cele elicoidale se pot inlocui prin ghidaje cu role şi şuruburi cu bile.

Un alt exemplu de policuplă este articulația Hooke (Fig.1.2) care permite două mişcări de rotație între elementele 1 şi 2 ca şi cupla sferică cu deget pe care o poate înlocui. Precizăm că policuplele au aceleaşi proprietăți cinematice (mişcări relative) şi statice (reacțiuni) ca şi cuplele pe care le înlocuiesc.

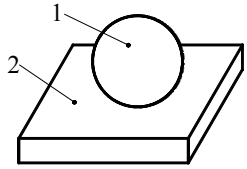
Tabelul 1.1

1. <u>Două suprafețe în contact punctual</u>

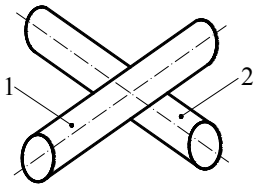


a)

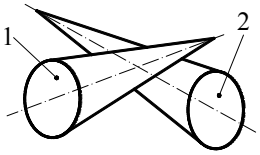
	R	T	
			- clasa 1 (m =5, k =1)
x	ω_x	v_x	- superioară
y	ω_y	v_y	- spațială
z	ω_z	R_z	- deschisă



b)



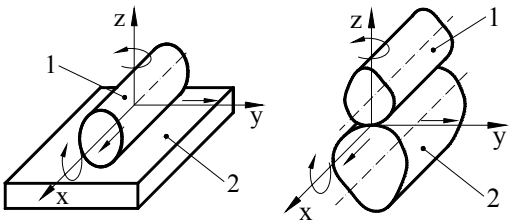
c)



d)

Tabelul 1.1 (continuare)

2. Cilindru* - plan, Doi cilindri* în contact după o generatoare

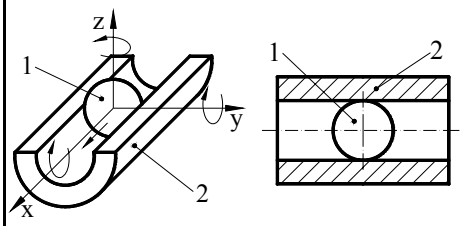


a) ***b)***

	R	T	
			- clasa 2 (m =4, k =2)
x	ω_x	v_x	- superioară
y	M_{ry}	v_y	- spațială
z	ω_z	R_z	- deschisă

* - cilindru oarecare

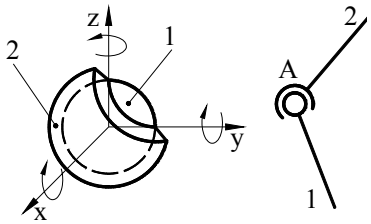
3. Sferă - cavitate cilindrică



a) ***b)***

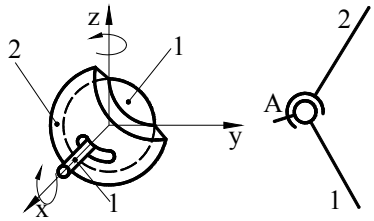
	R	T	
			- clasa 2 (m =4, k =2)
x	ω_x	v_x	- superioară
y	ω_y	R_y	- spațială
z	ω_z	R_z	a)- deschisă b)- închisă

4. Sferă - cavitate sferică (Cuplă sferică)



	R	T	
			- clasa 3 (m =3, k =3)
x	ω_x	R_x	- inferioară
y	ω_y	R_y	- spațială
z	ω_z	R_z	- închisă

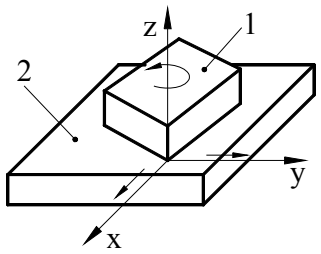
5. Sferă - cavitate sferică + cilindru - plan (Cuplă sferică cu deget)



	R	T	
			- clasa 4 (m =2, k =4)
x	ω_x	R_x	- inferioară – superioară
y	M_{ry}	R_y	- spațială
z	ω_z	R_z	- închisă

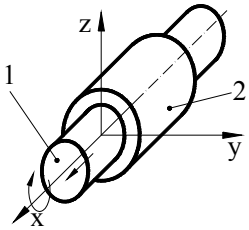
Tabelul 1.1 (continuare)

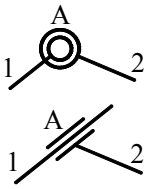
6. Plan - plan



	R	T	
			- clasa 3 (m =3, k =3)
x	M_{rx}	v_x	- inferioară
y	M_{ry}	v_y	- plană
z	ω_z	R_z	- deschisă

7. Cilindru* - cavitate cilindrică (Cuplă cilindrică)

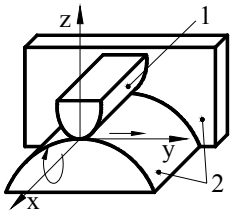


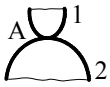


	R	T	
			- clasa 4 (m =2, k =4)
x	ω_x	v_x	- inferioară
y	M_{ry}	R_y	- spațială
z	M_{rz}	R_z	- închisă

* - cilindru circular

8. Cilindru* - cilindru* + plan - plan

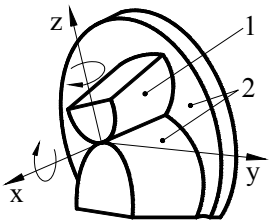




	R	T	
			- clasa 4 (m =2, k =4)
x	ω_x	R_x	- superioară-inferioară
y	M_{ry}	v_y	- plană
z	M_{rz}	R_z	- deschisă

* - cilindru oarecare

9. Con* - con* + sferă - cavitate sferică

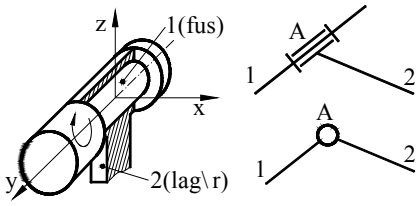


	R	T	
			- clasa 4 (m =2, k =4)
x	ω_x	R_x	- superioară-inferioară
y	M_{ry}	R_y	- spațială
z	ω_z	R_z	- deschisă

* - con oarecare

Tabelul 1.1 (continuare)

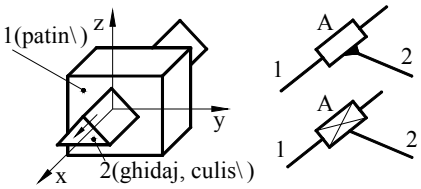
10. Cilindru* - cavitate cilindrică + plan - plan (Cuplă de rotaţie)



	R	T	
			- clasa 5 (m =1, k =5)
x	M_{rx}	R_x	- inferioară
y	ω_y	R_y	- plană
z	M_{rz}	R_z	- închisă

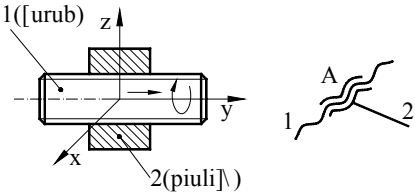
* - cilindru circular

11. Prismă - cavitate prismatică (Cuplă de translaţie)



	R	T	
			- clasa 5 (m =1, k =5)
x	M_{rx}	v_x	- inferioară
y	M_{ry}	R_y	- plană
z	M_{rz}	R_z	- închisă

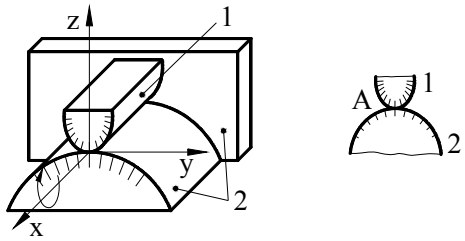
12. Elicoid - cavitate elicoidală (Cuplă elicoidală)



	R	T	
			- clasa 5 (m =1, k =5)
x	M_{rx}	R_x	- inferioară
y	ω_y^*	v_y^*	- spaţială
z	M_{rz}	R_z	- închisă

* $v_y = f(\omega_y)$

13. Cilindru* - cilindru* + plan - plan



	R	T	
			- clasa 5 (m =1, k =5)
x	ω_x	R_x	- superioară - inferioară
y	M_{ry}	R_y	- plană
z	M_{rz}	R_z	- deschisă

* - Cilindru oarecare

Observaţie: Cilindrul 1 se rostogoleşte pe suprafaţa cilindrului 2.

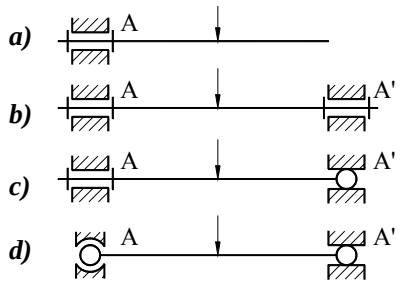


Fig. 1.3

Uneori legătura mecanică dintre două elemente se realizează prin dublarea (sau suplimentarea) unor cuple, rezultând mai multe zone de contact. Acest procedeu urmăreşte mărirea rigidităţii şi a rezistenţei construcţiei. Situaţia este ilustrată în exemplul din Fig.1.3. Soluţia din Fig.1.3.a este deficitară sub aspectul solicitării elementului 1, situat în consolă. Prin adăugarea unei noi cuple de rotaţie (Fig.1.3.b) acest nejuns este înlăturat, dar intervine o altă situaţie nedorită. Cele două cuple introduc un număr de legături reale $k_r = k_A + k_{A'} = 5 + 5 = 10$. Deoarece mobilitatea relativă este m = 1 (o mişcare de rotaţie) înseamnă că numărul de legături necesare este $k_{nec} = 6 - m = 5$. Diferenţa $k_{pl} = k_r - k_{nec} = 10 - 5 = 5$ reprezintă numărul de legături pasive locale (din cuple). Existenţa lor pretinde o execuţie foarte precisă a suprafeţelor pentru că, altfel, intervin pretensionări şi deformări la operaţia de montare. Acestea conduc la o funcţionare necorespunzătoare şi reduc durabilitatea. Situaţia se poate îmbunătăţi prin reducerea numărului de legături pasive. Astfel, dacă se adoptă soluţia din Fig.1.3.c, unde $k_r = k_A + k_{A'} = 5 + 2 = 7$, rezultă $k_{pl} = k_r - k_{nec} = 7 - 5 = 2$. În fine, pentru cazul din Fig.1.3.d, $k_r = k_A + k_{A'} = 3 + 2 = 5$, iar $k_{pl} = k_r - k_{nec} = 5 - 5 = 0$ şi, deci, nu intervin legături pasive. Trebuie menţionat că prezenţa legăturilor pasive nu influenţează comportarea cinematică, astfel că, în calculele structurale, toate variantele din Fig.1.3 sunt interpretate ca o singură cuplă de rotaţie.

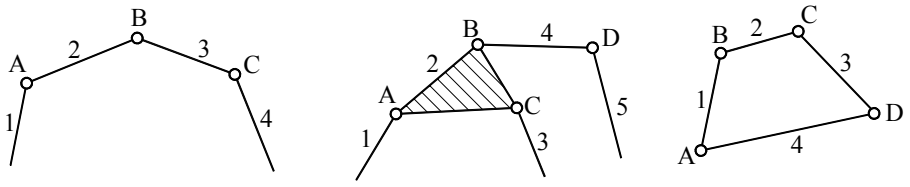
1.1.2. Lanţuri cinematice, mecanisme

Prin **lanţ cinematic** se înţelege un ansamblu (o înşiruire) de elemente legate prin cuple cinematice. Numărul de cuple în care intervine un element atunci când face parte dintr-un lanţ cinematic se numeşte **rang** (r).

Lanţurile cinematice pot fi **deschise** atunci când conţin şi elemente de rang r =1 (Fig.1.4.a şi Fig.1.4.b) sau **închise**, când toate elementele au rangul $r \geq 2$ (Fig.1.4.c).

Lanţurile sunt **simple**, dacă toate elementele au rangul $r \leq 2$ (Fig.1.4.a şi Fig.1.4.c) sau **complexe**, când conţin şi elemente cu rangul $r > 2$ (Fig.1.4.b).

Numărul de parametri care determină poziţia unui lanţ cinematic, în raport cu un sistem de referinţă situat în afara sa, se numeşte **grad de libertate** (L).



a) ***b)*** ***c)***

Fig. 1.4

Mecanismul este un lanț cinematic care are următoarele proprietăți:

1) Conține un element de referință, considerat fix, numit **bază** sau **batiu**, în raport cu care se concepe mişcarea celorlalte elemente;
2) Are un număr de **cuple conducătoare**, stabilit astfel încât mişcarea tuturor elementelor să fie determinată.

Mecanismele provin, în general, din lanțuri cinematice închise. Fac excepție mecanismele roboților industriali care sunt formate, de regulă, din lanțuri cinematice deschise.

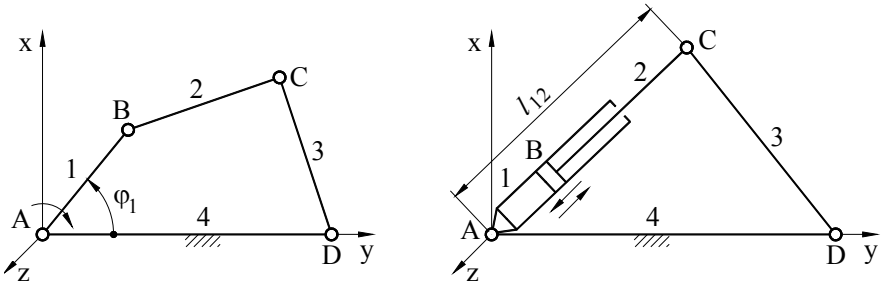
Cuplele conducătoare (de intrare) se caracterizează prin faptul că mişcarea relativă dintre elemente este dată, impusă, de existența unor sisteme de acționare. De obicei cuplele conducătoare sunt monomobile (clasa 5), iar parametrii care determină poziția relativă dintre elemente sunt **parametrii independenți (coordonatele generalizate)** ai mecanismului. Numărul de parametri independenți care determină univoc poziția mecanismului, în raport cu elementul de referință, se numeşte **grad de mobilitate** (M). Se înțelege că pentru a obține o mişcare determinată pentru toate elementele mobile, numărul de cuple conducătoare (monomobile) trebuie să fie egal cu gradul de mobilitate.

În Fig.1.5 sunt reprezentate schematic două mecanisme care provin din lanțuri cinematice închise.

Mecanismul patrulater articulat plan (Fig.1.5.a) are ca bază elementul 4 şi o cuplă conducătoare notată cu A. Parametrul independent al cuplei conducătoare este unghiul φ_1. Considerente geometrice elementare arată că poziția elementelor 1, 2 şi 3 este determinată de valoarea unghiului φ_1. Deci mişcarea mecanismului este, astfel, determinată. Cuplele conducătoare de rotație, asociate cu motoare rotative (electrice sau termice), se adoptă astfel ca unul dintre elemente să fie baza. În această situație elementul mobil al cuplei conducătoare se numeşte **element conducător**. Astfel, cupla conducătoare A este formată din elementul conducător 1 şi elementul fix 4.

Mecanismul cu cilindru oscilant (Fig.1.5.b) are ca bază elementul 4 şi o cuplă conducătoare de translație - B, formată dintr-un cilindru 1 şi un piston 2 (motor hidraulic). Parametrul independent al cuplei conducătoare, constituită, aici, din două elemente mobile, este distanța $\ell_{12} = \mathrm{AC}$. Se observă că poziția

mecanismului depinde numai de mărimea parametrului ℓ_{12}, rezultând o mişcare determinată.



a) ***b)***

Fig. 1.5

Mecanismele sunt sisteme complexe şi se clasifică după multiple criterii. Un criteriu foarte important, cu consecinţe deosebite pentru analiza comportării cinematice şi statice, este **dimensiunea spaţiului cinematic activ asociat mecanismului** (s). Determinarea acestui parametru apelează la noţiuni de algebră liniară sau de teoria şuruburilor cinematice [6]. O abordare mai simplă, dar mai puţin riguroasă, asimilează acest spaţiu ca fiind definit de mişcările elementare ale elementelor mobile raportate la un sistem de referinţă fix, solidar cu batiul. Dimensiunea spaţiului (s) este egală cu numărul de mişcări elementare luate o singură dată. Diferenţa $f = 6 - s$ constituie numărul de mişcări elementare care nu sunt executate de nici un element (legături comune) şi se numeşte **familia** mecanismului (Dobrovolski). Există 5 familii de mecanisme: 0, 1, 2, 3 şi 4. Caracterul mişcării elementelor şi, deci, familia mecanismului sunt determinate de felul cuplelor cinematice şi de amplasarea suprafeţelor acestora în raport cu fiecare element. Astfel, mecanismul din Fig.1.5.a are patru cuple de rotaţie cu axele paralele. Această particularitate geometrică determină caracterul plan al mecanismului. Elementele mobile (1, 2 şi 3) se deplasează paralel cu planul Axy, perpendicular pe axele cuplelor. În felul acesta dimensiunea spaţiului cinematic activ asociat este s =3(v_x, v_y, ω_z), iar familia este $f = 6 - s = 3$, legăturile comune fiind ω_x, ω_y, v_z.

O clasificare legată de tipul cuplelor şi de forma elementelor care intervin în construcţia mecanismelor este următoarea:

1. Mecanisme cu bare (cu cuple inferioare) (Fig.1.5.a, 1.5.b)
2. Mecanisme cu came (Fig.1.6)
3. Mecanisme cu roţi dinţate (Fig.1.7)
4. Mecanisme cu şurub (Fig.1.8)
5. Mecanisme combinate (Fig.1.9)

Mecanismele cu bare conțin numai cuple inferioare - de rotație, de translație, cilindrice, sferice, etc. Mecanismele cu came şi cele cu roți dințate conțin atât cuple inferioare (de rotație şi de translație) cât şi, cel puțin, o cuplă superioară, iar mecanismele cu şurub au, cel puțin, o cuplă elicoidală (şurub - piuliță). Mecanismele combinate sunt o asociere a două dintre celelalte categorii. Astfel, în Fig.1.9 este reprezentat un mecanism combinat cu bare şi roți dințate. Această clasificare este importantă pentru că domeniile de utilizare şi metodele de studiu sunt specifice pentru fiecare dintre categoriile de mecanisme menționate.

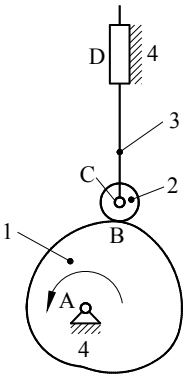


Fig. 1.6

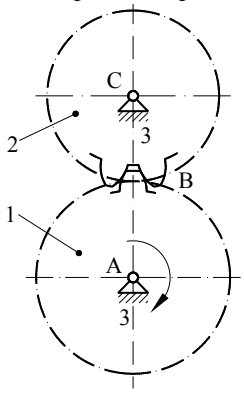


Fig. 1.7

În funcție de caracterul mişcării elementelor mecanismele pot fi **plane**, atunci când toate elementele mobile se deplasează paralel cu un plan fix, sau **spațiale** când nu este îndeplinită această condiție. Această diferențiere este utilă deoarece studiul mecanismelor spațiale implică dificultăți mai mari şi procedee de rezolvare mai complexe decât cel al mecanismelor plane.

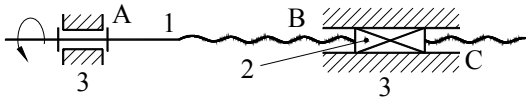


Fig. 1.8

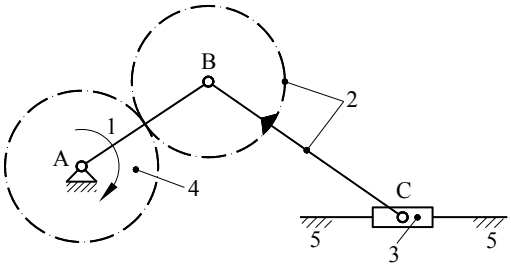


Fig. 1.9

1.2. DETERMINAREA GRADULUI DE MOBILITATE

1.2.1. Stabilirea formulelor de calcul

Se consideră un lanț cinematic având următoarele caracteristici structurale: n - numărul de elemente, c_k (k =1...5) - numărul cuplelor de clasă k. Gradul de libertate (L) se determină ca diferența dintre numărul de parametri (necunoscute) şi numărul de ecuații care intervin în problema pozițiilor. Având în vedere că un element cinematic liber are 6 parametri de poziție, iar o cuplă de clasa k generează un număr de k ecuații, se ajunge la relația

$$L = 6n - \sum_{1}^{5} k \cdot c_k \ . \tag{1.3}$$

Dacă lanțul cinematic se transformă într-un mecanism, prin adoptarea unui element de referință fix, numărul de elemente mobile este (n-1), iar formula de calcul a gradului de mobilitate este următoarea

$$M = 6 \cdot (n - 1) - \sum_{1}^{5} k \cdot c_k \ . \tag{1.4}$$

Formulele (1.3) şi (1.4) sunt valabile dacă ecuațiile sunt independente. În realitate numărul de ecuații independente poate fi mai mic decât cel luat în calcul datorită existenței unor legături pasive globale (pe contur). Dacă numărul acestora se notează k_{pg}, formula (1.4) se modifică astfel

$$M = 6 \cdot (n - 1) - \left(\sum_{1}^{5} k \cdot c_k - k_{pg} \right). \tag{1.5}$$

Pentru a înțelege modul în care intervin legăturile pasive globale să considerăm, pentru exemplificare, mecanismul din Fig.1.10.a. Acesta este un mecanism patrulater spațial de familie f =0 deoarece nu are legături comune - elementul 2 are o mişcare generală spațială cu componente de rotație şi de translație după cele trei axe de coordonate. Gradul de mobilitate se calculează cu formula (1.3) în care n =4, c_5 =2(A, D), c_4 =1(C), c_3 =1(B). Rezultă M =1, deci se poate adopta o cuplă conducătoare - de exemplu A. În Fig.1.10.b este reprezentat un mecanism identic structural cu cel din Fig.1.10.a, dar care are unele particularități geometrice. Astfel, axele cuplelor C şi D, invariabile în raport cu elementul 3, se adoptă paralele, iar axele cuplelor A şi D invariabile în elementul 4, se iau tot paralele. Gradul de mobilitate se calculează în acelaşi fel şi rezultă, evident, tot M =1. Se observă, însă, că mecanismul este plan, de familie f =3, deoarece toate elementele se deplasează paralel cu planul xOy, iar mişcările din cuplele B şi C sunt rotații simple paralele cu axa Oz. Ca urmare, aceste cuple se pot înlocui (ambele sau numai una) prin cuple de rotație fără a modifica starea cinematică a mecanismului. Se obțin, în felul acesta,

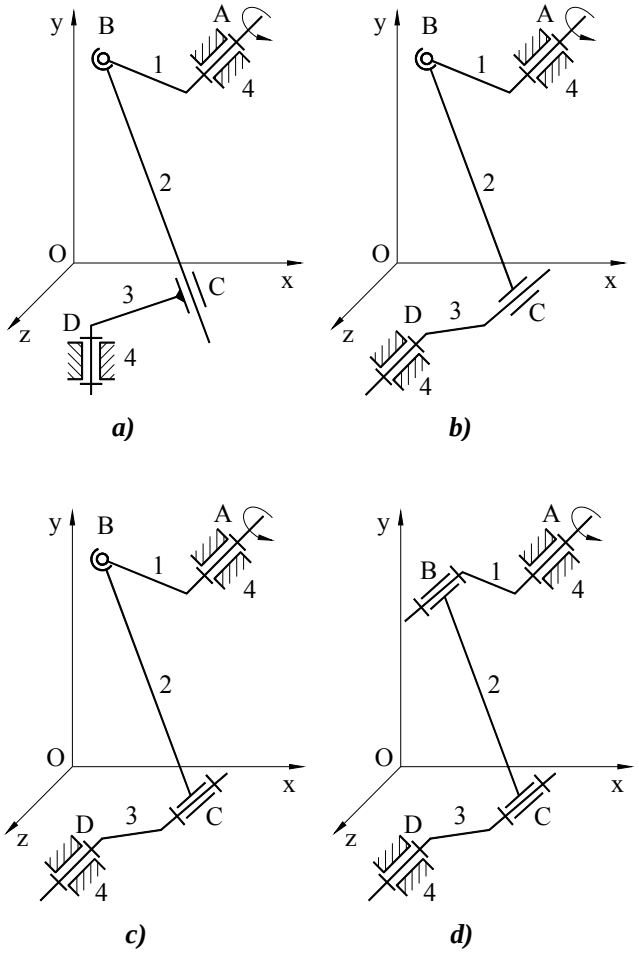


Fig. 1.10

mecanismele din Fig.1.10.c şi d. Cele trei mecanisme (Fig.1.10.b, c, d) au mişcări (absolute şi relative) identice, dar structură diferită. Astfel, dacă ne raportăm la mecanismul din Fig.1.10.b, cupla cilindrică C (k =4) a fost înlocuită printr-o cuplă de rotație (k =5) obținând mecanismul din Fig.1.10.c. În felul acesta s-a introdus o legătură pasivă: $k_{pg} = 5 - 4 = 1$. Pentru a calcula gradul de mobilitate se aplică formula (1.5) în care n =4, c_5 =3, c_3 =1 şi k_{pg} =1. Rezultă $M = 1$. Mecanismul din Fig.1.10.d care este un patrulater articulat plan, s-a obținut înlocuind atât cupla cilindrică C (k =4) cât şi cea sferică B (k =3) cu două cuple de rotație (k =5). Prin aceasta s-au introdus o serie de legături pasive

în număr de $k_{pg} = 2 \cdot 5 - 4 - 3 = 3$. Mecanismul are n =4, c_5 =4, k_{pg} =3, iar gradul de mobilitate, calculat cu formula (1.5) este M =1.

Din cele arătate rezultă că pentru a determina gradul de mobilitate cu formula (1.5) trebuie să se cunoască numărul de legături pasive globale - k_{pg}. Această cerință crează dificultăți în aplicarea practică a formulei. O altă cale de abordare a problemei face apel la clasificarea mecanismelor în familii.

După cum s-a arătat, un mecanism (lanț cinematic) de familia f se deplasează într-un spațiu cu $s = 6 - f$ dimensiuni. În acest spațiu poziția unui element liber este determinată de (6-f) parametri, iar o cuplă de clasa k are $(6 - f) - m = (6 - f) - (6 - k) = k - f$ legături (ecuații). În aceste ipoteze expresiile de calcul pentru gradul de libertate L şi pentru gradul de mobilitate M sunt

$$L = (6 - f) \cdot n - \sum_{k=f+1}^{5} (k - f) \cdot c_k \tag{1.6}$$

$$M = (6 - f) \cdot (n - 1) - \sum_{k=f+1}^{5} (k - f) \cdot c_k \ . \tag{1.7}$$

În legătură cu aplicarea formulelor (1.6) şi (1.7) trebuie făcute următoarele observații:

1) Determinarea clasei cuplelor se face în funcție de deplasările relative efective (funcționale) compatibile cu spațiul $s = 6 - f$, chiar atunci când construcția cuplelor permite o mobilitate mai mare. Vom denumi clasa unei cuple, determinată astfel, clasă funcțională. În aceste condiții, pentru fiecare cuplă, m < s şi k > f aşa cum se observă şi din formulele (1.6) şi (1.7).

2) În aceste formule nu apare numărul de legături pasive globale deoarece acestea nu intervin în spațiul cu (6-f) dimensiuni, în care se deplasează mecanismul. Să ne referim, pentru exemplificare, la mecanismele din Fig.1.10.b şi d, la care spațiul cinematic activ este definit de parametrii (v_x, v_y, ω_z), iar restricțiile comune sunt (ω_x, ω_y, v_z). Prin înlocuirea cuplei cilindrice C (Fig.1.10.b) cu o cuplă de rotație C (Fig.1.10.d) s-a introdus restricția pasivă (v_z), iar prin înlocuirea cuplei sferice B (Fig.1.10.b) cu o cuplă de rotație B (Fig.1.10.d) s-au introdus restricțiile pasive (ω_y, ω_z). După cum se observă aceste restricții nu intervin în spațiul cinematic activ. Să calculăm gradul de mobilitate al mecanismelor din Fig.1.10 utilizând formula (1.7). Mecanismul din Fig.1.10.a este de familia f =0. Dacă introducem această valoare în formula (1.7) se obține formula (1.3) pe care am utilizat-o şi înainte pentru a determina gradul de mobilitate al mecanismului. Mecanismele din Fig.1.10.b, c, d sunt de familie f =3, iar cuplele lor sunt, toate, de clasă funcțională k =5 (cuple de rotație). Aplicând formula (1.7) cu parametrii structurali f =3, n =4, c_5 =5 se obține, ca şi înainte, M =1.

Dacă gradul de mobilitate (M) se calculează cu formula (1.7), numărul de legături pasive globale (k_{pg}) se poate determina din formula (1.5)

$$k_{pg} = M - \left(6 \cdot (n - 1) - \sum_{1}^{5} k \cdot c_k \right). \tag{1.8}$$

În formula (1.8) clasa cuplelor este cea reală (constructivă) stabilită numai pe baza geometriei suprafeţelor. Valoarea maximă a parametrului k_{pg} se obţine atunci când clasa reală coincide cu clasa funcţională pentru toate cuplele mecanismului şi se poate calcula introducând în formula (1.8) expresia lui M (1.7)

$$k_{pgmax} = (6 - f) \cdot (n - 1) - \sum_{k=f+1}^{5} (k\text{-}f) \cdot c_k - \left(6 \cdot (n\text{-}1) - \sum_{k=f+1}^{5} k \cdot c_k \right). \tag{1.9}$$

De aici rezultă

$$k_{pgmax} = f\left(\sum_{k=f+1}^{5} c_k - n + 1 \right) = f(c - n + 1), \tag{1.10}$$

în care c este numărul total de cuple, indiferent de clasă. În cazul mecanismelor închise monocontur n =c, astfel că k_{pgmax} =f. În cazul mecanismelor simple deschise $c = n - 1$, iar k_{pgmax} =0. Prin urmare aceste mecanisme nu au legături pasive globale, iar gradul de mobilitate se poate calcula cu oricare dintre formulele (1.3) sau (1.7) obţinând acelaşi rezultat.

Legăturile pasive globale prezintă aceleaşi neajunsuri ca şi legăturile pasive locale - reclamă precizie de execuţie ridicată pentru a evita pretensionările şi deformaţiile elementelor. Ca urmare, este recomandabil să fie eliminate total sau parţial, dar în corelaţie cu aspectele tehnologice şi economice implicate de această operaţie. Reducerea legăturilor pasive se face prin micşorarea numărului de legături (restricţii) la unele cuple ale mecanismului. Trebuie menţionat că restricţiile eliminate trebuie să facă parte din legăturile comune ale mecanismului.

*

Gradul de mobilitate poate rezulta, din calcul, pozitiv, negativ sau zero. Fiecare dintre aceste cazuri are o interpretare cinematică şi una statică. Interpretarea statică pleacă de la ideea că, în problema determinării reacţiunilor din cuplele cinematice, numărul de ecuaţii de echilibru este egal cu numărul de parametri cinematici ai elementelor libere, iar numărul de reacţiuni necunoscute este egal cu numărul de ecuaţii de legătură. Prin urmare, în analiza statică numerele de ecuaţii şi de necunoscute se inversează în raport cu analiza cinematică. În felul acesta gradul de mobilitate rezultă ca diferenţa dintre numărul de ecuaţii statice şi numărul de necunoscute (reacţiuni). În Tab.1.2 sunt

prezentate cele trei cazuri posibile privind valoarea gradului de mobilitate şi interpretările lor.

Tabelul 1.2

M	Problema cinematică	Problema statică
M > 0	Sistem cinematic nedeterminat. Pentru evitarea nedeterminării se adoptă un număr de cuple conducătoare egal cu M prin care se impun valori pentru M parametri independenți. Menționăm că majoritatea mecanismelor au M = 1.	Sistem incompatibil. Pentru a-l transforma într-un sistem compatibil determinat se adoptă M cuple conducătoare care generează M parametri necunoscuți: forțele (momentele) de echilibrare.
M = 0	Sistem cinematic determinat. Poziţie unică - construcţie fixă.	Sistem static determinat
M < 0	Sistem cinematic incompatibil. Nu se poate monta cu parametri constructivi prestabiliți. Pentru a se putea monta este necesar ca |M| parametri constructivi să fie asimilați ca necunoscute, iar construcția rezultată este fixă.	Sistem static nedeterminat (dacă este construibil).

1.2.2. Familii de mecanisme, exemple

În cele ce urmează vom prezenta cele mai importante categorii de mecanisme, grupate pe familii. Pentru fiecare categorie vom analiza unul sau mai multe exemple de mecanisme urmărind determinarea gradului de mobilitate şi a numărului de legături pasive locale şi globale. Vom analiza, de asemenea, posibilitățile de reducere a numărului de legături pasive. Gradul de mobilitate se calculează cu formula (1.7) în care numerele de cuple c_k se stabilesc după clasa funcțională. Numărul de legături pasive globale se determină cu formula (1.8), în care numerele de cuple se stabilesc după clasa constructivă (reală). Pentru a face distincție între cele două situații, vom nota cu c'_k numerele de cuple determinate după clasa constructivă, astfel încât formula (1.8) devine

$$k_{pg} = M - \left(6 \cdot (n\text{-}1) - \sum_{1}^{5} k \cdot c'_k \right). \qquad (1.11)$$

Dificultatea principală care intervine în această analiză constă în stabilirea familiei mecanismului. Pentru majoriatea mecanismelor problema se rezolvă prin raportarea mişcărilor la un sistem de referință fix şi evaluarea numărului de legături comune. Acest procedeu prezintă unele limite privind

aplicabilitatea sa. O abordare riguroasă reclamă utilizarea unor algoritmi care implică noțiuni de teoria spațiilor vectoriale sau de teoria şuruburilor(*). Cum această dezvoltare depăşeşte cadrul lucrării de față, în astfel de cazuri vom indica familia fără a face justificarea încadrării respective.

1.2.2.1. Familia f =4

Formula de calcul a gradului de mobilitate se obține prin particularizarea formulei (1.7)

$$M=2(n-1)-c_5, \qquad (1.12)$$

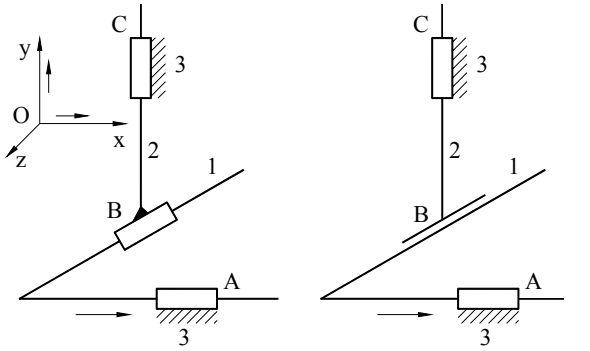
iar numărul maxim de legături pasive globale, pentru un mecanism monocontur, este k_{pgmax} = f = 4. În această familie se încadrează mai multe categorii de mecanisme, cu largi aplicații, pe care le vom menționa în continuare.

- **Mecanismele plane cu cuple de translație**

În această grupă intră mecanismele care au numai cuple de translație amplasate cu axele în plane paralele. Este evident că elementele mobile pot executa numai mişcări de translație paralele cu un plan fix (de exemplu planul xOy). În aceste condiții dimensiunea spațiului cinematic activ este s =2(v_x, v_y), iar familia f=4($\omega_x, \omega_y, \omega_z, v_z$). În Fig.1.11 este reprezentat cel mai simplu mecanism de acest fel numit mecanism cu pană, în patru variante constructive. Toate variantele au n =3, c_5=3 şi M =1. Varianta 1.11.a are toate cuplele de translație (k =5) pe când celelalte variante conțin şi cuple cu mobilități mai mari, dar clasa funcțională este pentru toate cuplele k =5 (mişcarea relativă de translație). Mecanismul din Fig.1.11.a are un număr de legături pasive globale k_{pg} = k_{pgmax} =4. Pentru a reduce valoarea parametrului k_{pg}, se majorează mobilitatea unor cuple, obținându-se mecanismele din Fig.1.11.b, c şi d. Astfel, în cazul mecanismului din Fig.1.11.b, cupla de translație B se înlocuieeşte cu o cuplă plan - plan (poz. 6, Tab.1.1) de clasă constructivă k =3. Introducând în formula (1.11) M =1, n =3, c'_5 =2(A, C) şi c'_3=1(B) se obține: k_{pg} =2. În varianta din Fig.1.11.c, cupla B este de clasă k =1 (poz. 1, Tab.1.1). Aplicând, din nou, formula (1.8) cu M =1, n =3, c'_5 =2(A, C) şi c'_1 =1(B) se obține: k_{pg} =0. În sfârşit, varianta din Fig.1.11.d are toate cuplele cilindrice (poz. 7 – Tab.1.1) de clasă k =4. În acest caz M =1, n=3, c'_4 =3 şi k_{pg} =1.

(*) *Teorie matematică legată de reducerea sistemelor de vectori alunecători. A nu se confunda cu elementul - având aceeaşi denumire - al cuplei elicoidale.*

$s = 2(v_x, v_y)$, $f = 4(\omega_x, \omega_y, \omega_z, v_z)$, $n = 3$, $c_5 = 3$, $M = 1$



a)

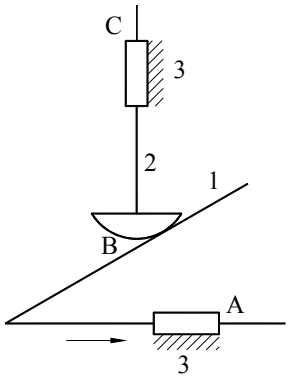
$c'_5 = c_5 = 3$

$k_{pg} = k_{pgmax} = 4$

b)

$c'_5 = 2(A,C)$, $c'_3 = 1(B)$

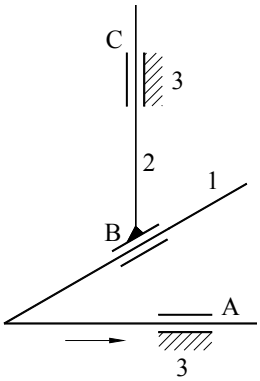
$k_{pg} = 2$



c)

$c'_5 = 2(A,C)$, $c'_1 = 1(B)$

$k_{pg} = 0$



d)

$c'_4 = 3\ (A,B,C)$

$k_{pg} = 1$

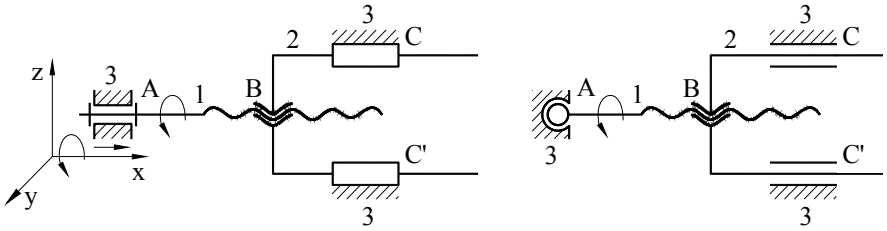
Fig. 1.11

- **Mecanismele cu şurub**

Aceste mecanisme conțin cuple de rotație şi elicoidale cu axele suprapuse şi cuple de translație cu axele paralele (sau suprapuse) cu primele. Mişcările posibile sunt rotația şi translația în raport cu o axă (Ox). Deci $s = 2(\omega_x, v_x)$ şi $f = 4(\omega_y, v_y, \omega_z, v_z)$. În Fig.1.12 este reprezentat un mecanism

cu şurub în două variante, care au n =3, c_5 =3 şi M =1. În varianta din Fig.1.12.a clasa funcţională coincide cu cea constructivă, astfel că k_{pg} =k_{pgmax} =4. Această variantă are cupla de translaţie C - dublată ceea ce conduce la apariţia unor legături pasive locale. Numărul acestora k_{pl} este egal cu diferenţa dintre clasa reală a cuplelor C şi C' : k_{rC} =k_C + $K_{C'}$ =5+5 =10 şi clasa necesară: k_{necC} =6-m_C= = 6 -1 =5. Rezultă k_{pl} = k_{rC} - k_{necC} = 10-5 = 5. În varianta din Fig.1.12.b cupla de rotaţie A este înlocuită cu o cuplă sferică. Având M =1, n =3, c'_5 =2(B, C) şi c'_3 =1(A) rezultă din k_{pg} =2. Cuplele de translaţie C şi C' se înlocuiesc cu cuple cilindrice (k =4). În felul acesta k_{rC} =k_C + $K_{C'}$ =4+4 =8, iar k_{pl} = k_{rc} - k_{necC} = 8 –5 = 3.

s=2(ω_x , v_x), f=4(ω_y , v_y , ω_z , v_z), n =3, c_5 =3, M =1



a)

$c'_5 = c_5 = 3$

k_{pg} =k_{pgmax} =4

k_{pl} = k_{rC} - k_{necC} = 10-5 = 5

b)

c'_5 =2(B, C), c'_3 =1(A)

k_{pg} =2

k_{pl} = k_{rC} - k_{necC} = 8-5 = 3

Fig. 1.12

■ Mecanismele cu roţi de fricţiune

Aceste mecanisme conţin roţi de fricţiune cilindrice sau conice între care se formează cuple de rostogolire de clasa k =5 (poz. 13, Tab.1.1). În Fig.1.13 este reprezentat un mecanism cu roţi de fricţiune în două variante constructive având n= 3, c_5 =5, M =1. În varianta din Fig.1.13.a cupla B este constructiv de clasă k =3, astfel că c'_5 =2(A, C), c'_3 =1(B) şi k_{pg} =2. În varianta din Fig.1.13.b, cupla B este de clasa k =2, ceea ce conduce la c'_5 =2(A, C), c'_2 =1(B), k_{pg} =1. Trebuie menţionat că în structura acestor mecanisme cupla de rostogolire dintre roţi nu se construieşte niciodată în varianta constructivă arătată în Tab.1.1 la poz.13, ci numai în variantele din Fig.1.13.a şi b având clasa constructivă mai mică decât cea funcţională. În felul acesta numărul de legături pasive globale este mai mic decât valoarea maximă k_{pg} < k_{pgmax}=4.

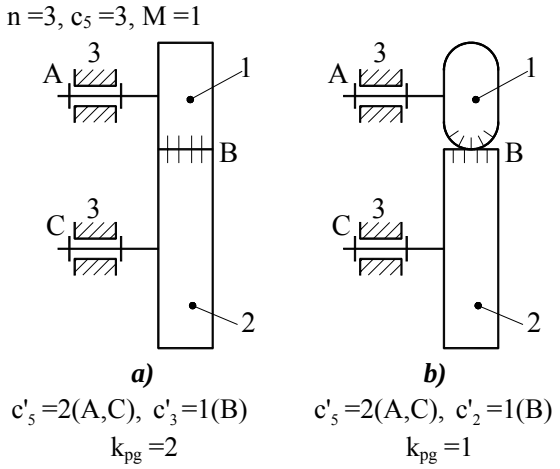


Fig. 1.13

1.2.2.2. Familia f =3

Gradul de mobilitate se calculează cu formula

$$M = 3(n-1) - 2c_5 - c_4 , \qquad (1.13)$$

iar numărul maxim de legături pasive globale, la mecanismele cu un singur contur, este $k_{pgmax} = f = 3$.

- **Mecanismele plane (cu excepția celor care au numai cuple de translație)**

Elementele acestor mecanisme se deplasează paralel cu un plan fix (xOy) astfel că $s = 3(v_x, v_y, \omega_z)$ şi $f = 3(\omega_x, \omega_y, v_z)$. Pentru a obține această proprietate cinematică trebuie să conțină numai cuple plane de clasele $k = 4$ şi $k = 5$. Aceste condiții sunt îndeplinite de următoarele cuple:

- clasa k =5 $\begin{cases} - \text{ cupla de rotație} \\ - \text{ cupla de translație} \end{cases}$
- clasa k =4 - cupla de la poziția 8 – Tab.1.1

Pe lângă aceasta, amplasarea cuplelor trebuie să se facă astfel încât axele mişcărilor de rotație să fie paralele, iar axele mişcărilor de translație să fie conținute în plane perpendiculare pe axele de rotație.

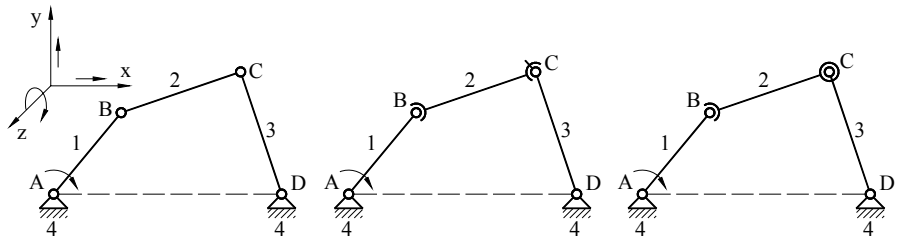
În Fig.1.14 este reprezentat mecanismul patrulater articulat plan în trei variante constructive care au n =4, c_5 =4, M =1. În varianta 1.14.a toate cuplele au clasa constructivă egală cu cea funcțională (k =5) şi, deci, $k_{pg} = k_{pgmax}$ =3. În varianta din Fig.1.14.b cupla B este sferică (k =3) iar C - sferică cu deget (k =4). În aceste condiții c'_5 =2 (A, D), c'_4 =1 (C), c'_3 =1 (B), iar k_{pg} =0. În varianta din Fig.1.14.c, cupla B este sferică (k =3), iar C este cilindrică (k =4). Rezultă aceleaşi caracteristici ca şi la varianta precedentă.

În Fig.1.15 este reprezentat mecanismul manivelă - piston plan care are n =4, c_5 =4, M =1. În varianta din Fig.1.15.a toate cuplele au clasa constructivă egală cu cea funcțională (k =5) şi k_{pg} =k_{pgmax} =3. Mecanismul se întâlneşte în aplicațiile din construcția motoarelor şi pompelor sub forma din Fig.1.13.b, unde cupla de translație este înlocuită printr-o cuplă cilindrică piston - cilindru. În acest caz c'_5 =3 (A, B, C), c'_4 =1 (D), iar k_{pg} =2. O situație asemnănătoare intervine la mecanismul cu cilindru oscilant (Fig.1.16) unde cupla B este funcțional de translație (k =5), iar constructiv - cilindrică (k =4).

În Fig.1.17 este reprezentat un mecanism cu camă care are n =3, c_5 =2, c_4 =1 (poz. 8, Tab.1.1) şi M =1. În varianta din Fig.1.17.a cupla B are clasa constructivă k=2 (poz. 2, Tab.1.1) rezultând c'_5 =2, c'_4 =1, k_{pg} =1, iar în varianta din Fig.1.17.b, cupla B este de clasă constructivă k =1, obținându-se c'_5 =2, c'_1 =1, k_{pg} =0.

În Fig.1.18 este reprezentat un mecanism cu roți dințate cu axele de rotație paralele care are aceleaşi caracteristici structurale cu mecanismul cu camă din Fig.1.17.a.

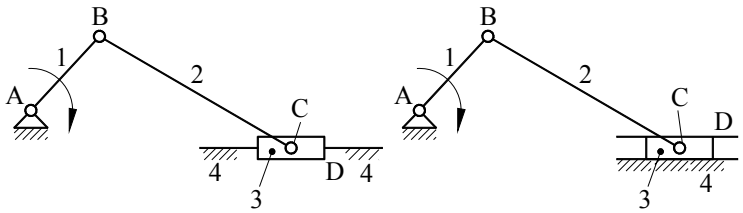
s =3(ω_z, v_x, v_y), f =3(ω_x, ω_y, v_z), n =4, c_5 =4, M =1



a)	*b)*	*c)*
$c'_5 = c_5 = 4$	c'_5 =2(A,D), c'_4 =1(C)	c'_5 =2(A,D), c'_4 =1(C)
k_{pg} =k_{pgmax} =3	c'_3 =1(B), k_{pg} =0	c'_3 =1(B), k_{pg} =0

Fig. 1.14

$n = 4$, $c_5 = 4$, $M = 1$

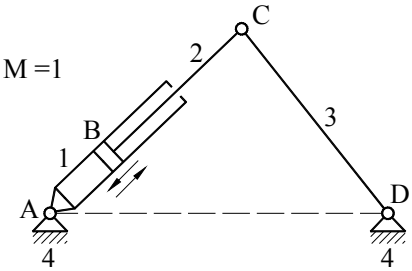


a) ***b)***

$c'_5 = c_5 = 4$, $k_{pg} = k_{pgmax} = 3$ $c'_5 = 3(A,B,C)$, $c'_4 = 1$, $k_{pg} = 2$

Fig. 1.15

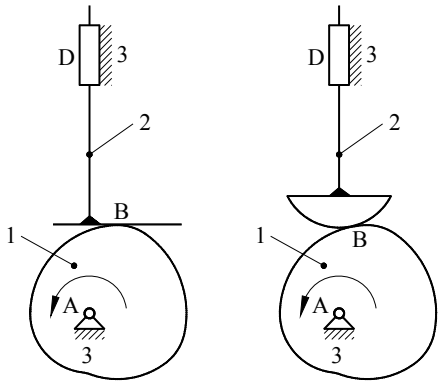
$n = 4$, $c_5 = 4$, $M = 1$



$c'_5 = 3(A,C,D)$, $c'_4 = 1(B)$, $k_{pg} = 2$

Fig. 1.16

$n = 3$, $c_5 = 2(A, C)$, $c_4 = 1(B)$, $M = 1$



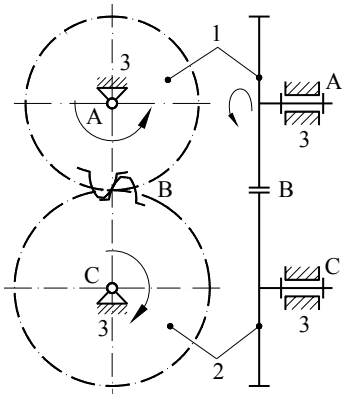
a) ***b)***

$c'_5 = 2(A,C)$, $c'_2 = 1(B)$ $c'_5 = 2(A,C)$, $c'_1 = 1(B)$

$k_{pg} = 1$ $k_{pg} = 0$

Fig. 1.17

$n=3$, $c_5=2(A,C)$, $c_4=1(B)$, $M=1$



$c'_5 = 2(A,C)$, $c'_2 = 1(B)$

$k_{pg} = 1$

Fig. 1.18

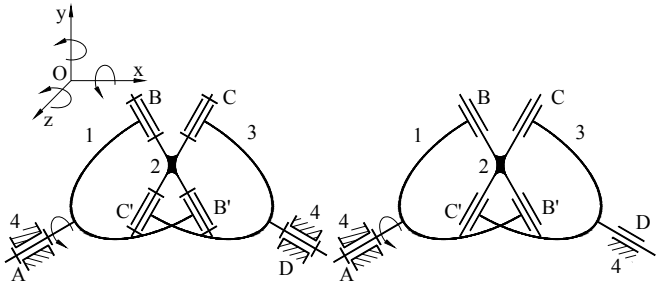
■ Mecanismele sferice

Aceste mecanisme se caracterizează prin faptul că toate elementele mobile au un punct fix comun. Deci, traiectoriile punctelor se înscriu pe sfere concentrice. Pentru a forma mecanisme sferice se folosesc numai cuple de rotație şi de clasa k =4 (poz. 9, Tab.1.1) aşezate în aşa fel ca axele de rotație să fie concurente. În aceste condiții elementele pot executa numai mişcările de rotație în raport cu cele trei axe: s =3 (ω_x, ω_y, ω_z), f =3 (v_x, v_y, v_z).

Cel mai cunoscut mecanism sferic este mecanismul cardanic (Fig.1.19) care, de fapt, este un patrulater articulat sferic (axele celor patru cuple de rotație sunt concurente), care are n =4, c_5 =4, şi M =1. În varianta din Fig.1.19.a toate cuplele au clasa constructivă şi cea funcțională identice. Prin urmare, k_{pg} = k_{pgmax} =3. Mecanismul are cuplele de rotație (k =5) B şi C dublate astfel că există k_{pl} =10 legături pasive locale. Mecanismul din Fig.1.19.b are cuplele B, C şi D - cilindrice (k =4), astfel că c'_5 =1, c'_4 =3, k_{pg} =0. Numărul legăturilor pasive locale $k_{pl} = 2(k_r - k_{nec}) = 2(8-4) = 8$.

În categoria mecanismelor sferice intră, de asemenea, mecanismele cu roți dințate cu axe concurente (Fig.1.20). Caracteristicile lor structurale sunt similare cu cele ale mecanismelor cu roți dințate cu axe paralele (Fig.1.18).

s=3(ω_x, ω_y, ω_z), f=3(v_x,v_y,v_z), n=4, c_5=4, M=1



a)

$c'_5 = c_5 = 4$,

$k_{pg} = k_{pgmax} = 3$

$k_{pl} = (k_{rB}-k_{necB}) + (k_{rC}-k_{necC}) =$
$= (10 - 5) + (10 - 5) = 10$

b)

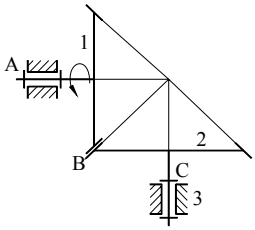
$c'_5 = 1$, $c'_4 = 3$,

$k_{pg} = 0$

$k_{pl} = (k_{rB}-k_{necB}) + (k_{rC}-k_{necC}) =$
$= (8 - 4) + (8 - 4) = 8$

Fig. 1.19

n=3,c_5=2(A,C),c_4=1(B),M=1



$c'_5 = 2(A,C)$, $c'_2 = 1(B)$

$k_{pg} = 1$

Fig. 1.20

1.2.2.3. Familia f =0

Pentru determinarea gradului de mobilitate se foloseşte formula

$$M = 6(n-1) - 5c_5 - 4c_4 - 3c_3 - 2c_2 - c_1 . \qquad (1.14)$$

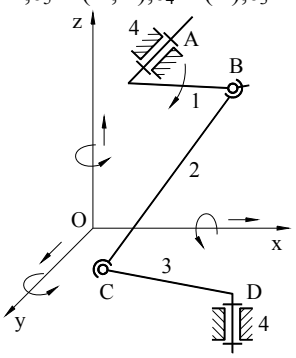
Aceste mecanisme nu prezintă legături pasive globale ($k_{pgmax} = f = 0$).

În Fig.1.21 este reprezentat mecanismul patrulater articulat spațial care are n =4, c_5 =2(A, D), c_4 =1(B), c_3 =1(C) şi M =1.

În Fig.1.22 este reprezentat un mecanism de robot care provine dintr-un lanț cinematic deschis. Mecanismele de acest fel conțin numai cuple de clasa k =5, iar c_5 = n-1. Introducând această condiție în formula (1.14) rezultă M = c_5 = n-1. Prin urmare, pentru a obține o mişcare determinată toate cuplele trebuie să fie conducătoare. În cazul nostru n =6, deci M = n-1 = c_5 = 5.

$s=(\omega_x, \omega_y, \omega_z, v_x, v_y, v_z)$, f =0

n=4,c_5=2(A,D),c_4=1(B),c_3=1(C),M=1



k_{pg} =0

Fig. 1.21

n =6, c_5 =5, M = n - 1 = c_5 =5

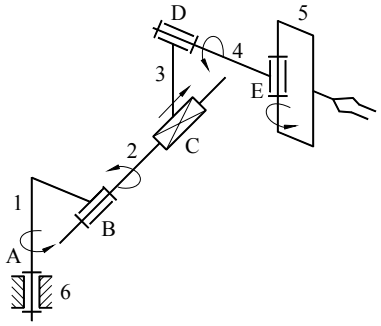


Fig. 1.22

1.2.3. Situații particulare privind determinarea gradului de mobilitate

În unele cazuri calculul gradului de mobilitate conduce la rezultate eronate sau contradictorii. Ele apar datorită unor particularități constructiv - geometrice ale mecanismelor în cauză şi pot fi grupate în două categorii pe care le vom prezenta în continuare.

1.2.3.1. Mobilități locale

Pentru înțelegerea fenomenului vom analiza două mecanisme reprezentative unde apare acesta. În Fig.1.23 este reprezentat un mecanism patrulater articulat spațial de tip RSSR de familia f =0 şi care are n =4, c_5 =2(A, D), c_3 =2(B, C). Calculând gradul de mobilitate cu formula (1.14) rezultă M =2. Cu toate acestea se adoptă o singură cuplă conducătoare, de exemplu cupla A. În această ipoteză intervine o mobilitate locală arbitrară (necontrolată) - rotația bielei 2 în jurul centrelor cuplelor sferice B şi C. Această mişcare este reflectată de valoarea gradului de mobilitate, dar poate rămâne arbitrară pentru că nu influențează mişcarea elementului 3 care interezează în mod obişnuit.

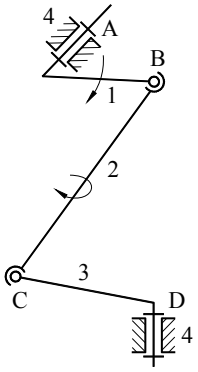


Fig. 1.23

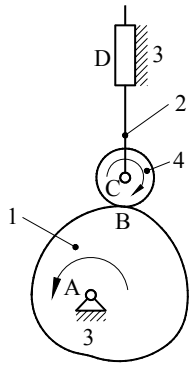


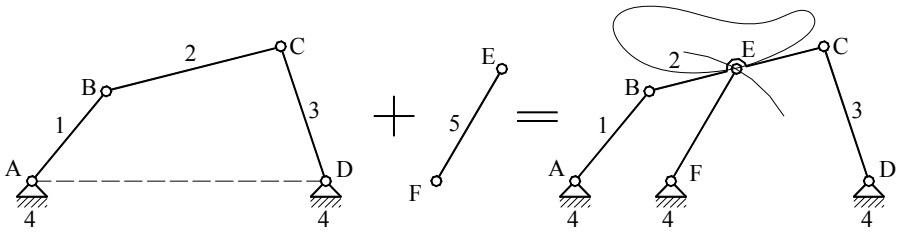
Fig. 1.24

O situație asemănătoare intervine la mecanismele cu camă când legătura dintre camă şi tachet se face printr-o rolă articulată. Mecanismul cu camă din Fig.1.24 este plan şi are n =4, c_5 =3(A, C, D), c_4 =1(B). Aplicând formula (1.13) rezultă M=2, însă mecanismul are un singur element conducător - cama 1. Şi aici intervine o mobilitate locală - rotația arbitrară a rolei care nu influențează, însă, deplasarea tachetului - esențială pentru funcționarea mecanismului.

1.2.3.2. Lanțuri cinematice pasive

Un mecanism complex poate fi format dintr-un mecanism simplu la care se adaugă un lanț cinematic. Dacă parametrii structurali ai lanțului inițial (presupunând f=3) sunt: n_1, c_{51}, c_{41} şi $M_1 = 3(n_1-1) - 2c_{51} - c_{41}$ iar cei ai lanțului cinematic sunt n_2, c_{52}, c_{42} şi $L_2 = 3n_2 - 2c_{52} - c_{42}$, atunci parametri structurali ai mecanismului obținut rezultă astfel $n = n_1 + n_2$, $c_5 = c_{51} + c_{52}$, $c_4 = c_{41} + c_{42}$, iar $M = 3(n-1) - 2c_5 - c_4 = M_1 + L_2$. Dacă $L_2 < 0$ se obține $M < M_1$. Aceasta înseamnă că lanțul cinematic introduce condiții suplimenatre care îngrădesc mişcarea mecanismului inițial, reducând gradul de mobilitate. Uneori, datorită unor particularități constructive, condițiile suplimentare nu sunt independente în raport cu cele ale mecanismului inițial. În această ipoteză $M = M_1$ deşi, din calcul, rezultă $M < M_1$. Lanțul cinematic adăugat este, atunci, **pasiv**. Un exemplu, în acest sens, este prezentat în Fig.1.25 unde se arată modul de formare a unui mecanism complex dintr-un patrulater (M_1 = 1) şi un lanț

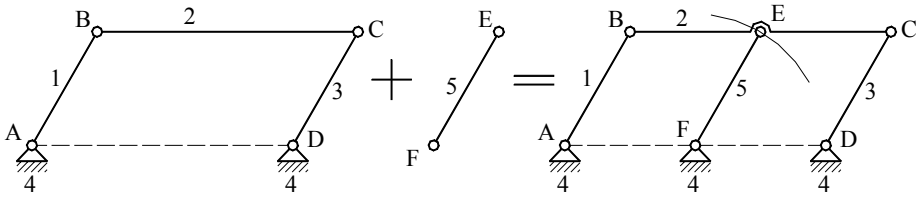
cinematic cu L_2 = -1. Mecanismul obținut are $M = M_1 + L_2 = 0$, deci trebuie să fie o construcție rigidă. Această situație se înregistrează întradevăr în cazul mecanismului din Fig.1.25.a. În cazul din Fig.1.25.b, când elementele formează niște paralelograme, se obține un mecanism cu M = 1 datorită faptului că lanțul cinematic adăugat este pasiv. Acest lucru se poate înțelege dacă analizăm, în ambele situații, rolul acestui lanț cinematic.



$n_1 = 4$, $c_{51} = 4$, $M_1 = 1$ $\quad$ $n_2 = 1$, $c_{52} = 2$ $\quad$ $n = 5$, $c_5 = 6$, $M = 0$

$L_2 = -1$

a)



b)

Fig. 1.25

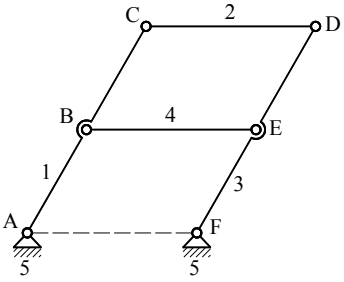


Fig. 1.26

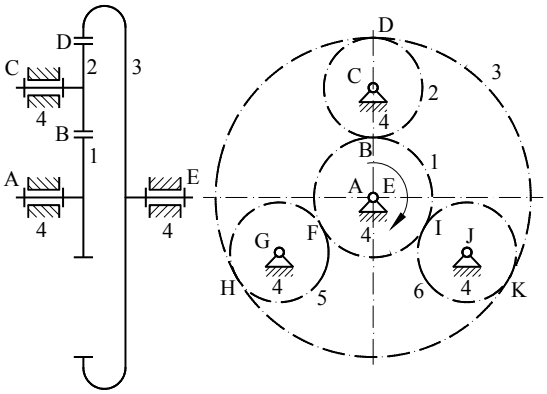


Fig. 1.27

Să presupunem că desfacem articulația E la mecanismul din Fig.1.25.a. În această ipoteză, punctul E aparținând bielei patrulaterului ABCD descrie o curbă de bielă, iar dacă aparține barei EF descrie un cerc cu centrul în F. Legând elementele 2 şi 5 prin articulația E, acest punct este obligat să ocupe o poziție fixă la intersecția dintre curba de bielă şi cerc şi, deci, sistemul devine rigid. În cazul mecanismului din Fig.1.25.b, datorită faptului că patrulaterul ABCD este paralelogram, curba de bielă este tot un cerc care se suprapune peste cel descris de punctul E când aparține barei EF. Rezultă că mişcarea mecanismului inițial nu este influențată de adăugarea lanțului cinematic, iar gradul de mobilitate rămâne $M = M_1 = 1$. O situație similară se înregistrează la mecanismul din Fig.1.26 format tot din paralelograme, care are gradul de mobilitate M = 1 deşi din calcul rezultă M = 0.

Un alt exemplu, din aceeaşi categorie, este dat în Fig.1.27 unde este reprezentat un mecanism plan cu roți dințate. Gradul de mobilitate calculat este $M = -1$ ($n = 6$, $c_5 = 5$(A, E, C, G, J), $c_4 = 6$(B, D, F, H, I, K)), însă cel real este $M = 1$. Situația se explică prin faptul că mişcarea de rotație se transmite de la roata 1 la roata 3 pe trei căi cu aportul unor roți intermediare identice 2, 5 şi 6. Este evident că, cinematic, este suficientă o singură roată intermediară, obținând, în felul acesta, un mecanism cu gradul de mobilitate $M = 1$, $n = 4$(1, 2, 3, 4), $c_5 = 3$(A, C, E), $c_4 = 2$(B, D). Celelalte două roți cu cuplele aferente formează lanțuri cinematice pasive care nu modifică starea cinematică a mecanismului inițial.

1.3. CLASIFICAREA STRUCTURALĂ A MECANISMELOR PLANE

1.3.1. Înlocuirea cuplei superioare

Aşa cum am arătat, mecanismele plane se încadrează în familia f = 3 (cu excepția celor formate numai din cuple de translație care au f = 4) şi conțin cuple de rotație, de translație (ambele de clasa 5 şi inferioare) şi cuple de clasa 4 obținute prin contactul a doi cilindri după o generatoare şi din contactul a două plane. În aplicațiile tehnice se renunță întotdeauna la contactul plan - plan din motive care țin de simplificarea constructivă şi de reducerea legăturilor pasive. În felul acesta rezultă o cuplă pur superioară dar care, în calculele structurale, îşi păstrează clasa k =4. Cuplele superioare se pot transforma în lanțuri cinematice care conțin numai cuple inferioare. Această transformare trebuie să îndeplinească două condiții:

1) Condiția structurală: menținerea gradului de mobilitate al mecanismului;

2) Condiția cinematică: păstrarea nemodificată a mişcărilor elementelor.

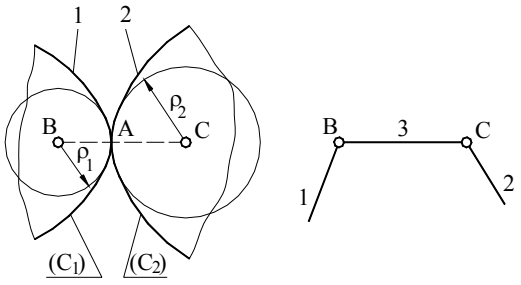
Condiția structurală conduce la determinarea parametrilor structurali ai lanțului cinematic înlocuitor. Să considerăm un mecanism având caracteristicile: n, c_5, c_4, şi M. Să presupunem că o cuplă de clasa 4 se înlocuieşte cu un lanț cinematic având n_s - numărul de elemente şi c_{5s} - numărul cuplelor inferioare (clasa 5). Pe baza condiției structurale se poate scrie

$$M = 3(n-1) - 2c_5 - c_4 = 3(n+n_s-1) - 2(c_5+c_{5s}) - (c_4-1), \qquad (1.15)$$

de unde rezultă

$$3n_s - 2c_{5s} + 1 = 0. \qquad (1.16)$$

Soluțiile întregi şi pozitive ale ecuației (1.16) ne arată structura lanțului cinematic înlocuitor. Din punct de vedere practic interesează soluția cu cele mai mici valori pentru necunoscute: n_s =1, c_{5s} =2. Din condiția cinematică rezultă parametrii constructivi (geometrici) ai lanțului înlocuitor. Să considerăm o cuplă formată din elementele 1 şi 2 (Fig.1.28). Dacă avem în vedere o deplasare infinit mică, mişcarea relativă dintre elemente nu se modifică dacă se înlocuiesc curbele (C_1) şi (C_2) cu două cercuri având razele de curbură ale curbelor (C_1) şi (C_2) în punctul A. Considerând acum cupla superioară definită cu ajutorul cercurilor, rezultă că distanța BC dintre centrele lor rămâne constantă în timpul mişcării. Această proprietate trebuie să existe şi după transformare. Pentru aceasta elementul unic (n_s =1) al lanțului cinematic înlocuitor trebuie să se lege de elementele 1 şi 2 prin două cuple de rotație (c_{5s} =2) situate în centrele de curbură B şi C (Fig.1.28.a, 1.28.b). Astfel, lungimea elementului 3 este egală cu suma razelor de curbură: $l_{BC} = \rho_1 + \rho_2$. Din cele arătate rezultă că transformarea cuplei superioare are un caracter instantaneu, deoarece odată cu schimbarea poziției mecanismului punctul de contact se deplasează şi, deci, se modifică razele de curbură. Mecanismul care se obține după înlocuirea cuplei superioare are dimensiuni invariabile numai când curbele (C_1) şi (C_2) au curburi constante: sunt cercuri, drepte ($\rho = \infty$) sau degenerează în puncte ($\rho = 0$). Când una dintre curbe este o dreaptă, centrul de curbură este aruncat la infinit, iar cupla de rotație se transformă în cuplă de translație având ca axă dreapta respectivă.

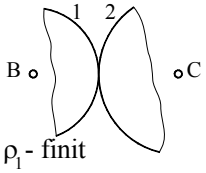
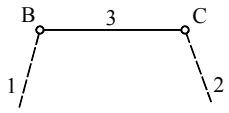
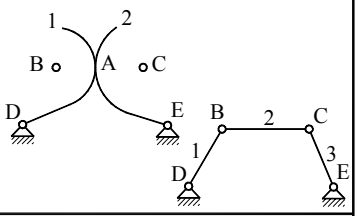
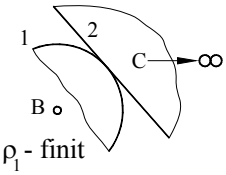
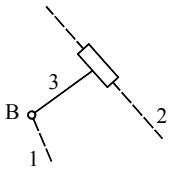
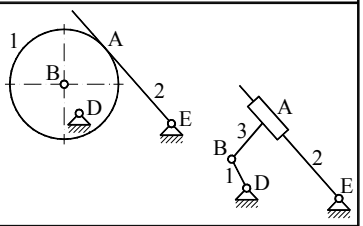
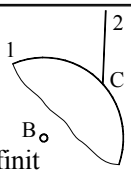
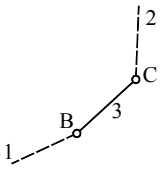
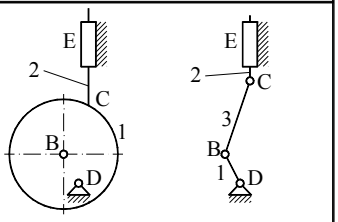
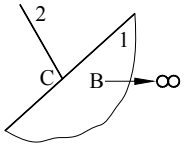
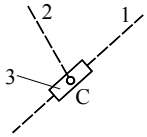
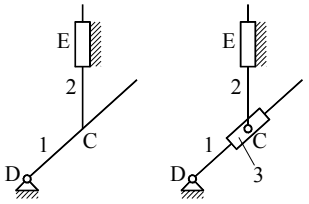


a) ***b)***

Fig. 1.28

În Tab.1.3 se prezintă transformarea cuplei superioare pentru toate cazurile reprezentative.

Tabelul 1.3

Cupla superioar\	Lan]ul cinematic înlocuitor	Exemplu
 ρ_1- finit ρ_2- finit		
 ρ_1- finit ρ_2- ∞		
 ρ_1- finit ρ_2- 0		
 ρ_1 - ∞ ρ_2 - 0		

1.3.2. Noțiunea de grupă structurală

Grupa structurală este un lanț cinematic care face parte dintr-un mecanism şi are următoarele proprietăți:

1) Are un număr de cuple conducătoare egal cu gradul de libertate;
2) Are un număr de cuple exterioare cu care se leagă în mecanism;
3) Nu se poate descompune în grupe structurale mai simple.

Grupele structurale cu L = 0 se numesc grupe Assur, iar cele cu L > 0 se numesc grupe conducătoare (Duca, Simionescu). Utilizarea noțiunii de grupă structurală este utilă, în special, pentru studiul mecanismelor cu cuple inferioare. De aceea în compunerea lor vom considera numai astfel de cuple. Ne propunem să stabilim schemele structurale ale grupelor uzuale. Pentru aceasta vom trata pe rând cazul grupelor cu L = 0 şi L = 1.

■ Grupele structurale cu L = 0 (Assur)

Din condiția de definiție se obține

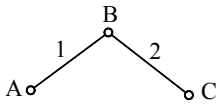
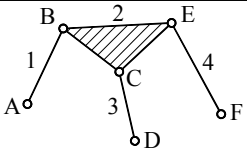
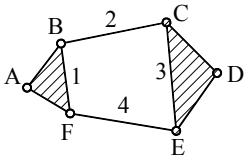
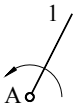
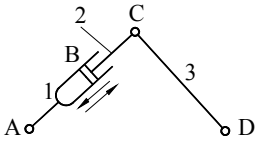
$$L = 3n - 2c_5 = 0 \,. \qquad (1.17)$$

Din această ecuație rezultă n şi c_5. Cele mai mici soluții întregi şi pozitive sunt:

n	2	4	6	...
c_5	3	6	9	...

Fiecare soluție numerică conduce la una sau mai multe soluții structurale distincte. În Tab.1.4 se indică toate soluțiile structurale pentru primele două soluții numerice. De fapt, acestea sunt grupele cu L = 0 care au importanță practică.

Tabelul 1.4

L = 0	n = 2, c_5 = 3	n = 4, c_5 = 6	
	 L | cl. | ord. 0 | 2 | 2	 L | cl. | ord. 0 | 3 | 3	 L | cl. | ord. 0 | 4 | 2
L = 1	n = 1, c_5 = 1	n = 3, c_5 = 4	
	 L | cl. | ord. 1 | 1 | 1	 L | cl. | ord. 1 | 2 | 2	

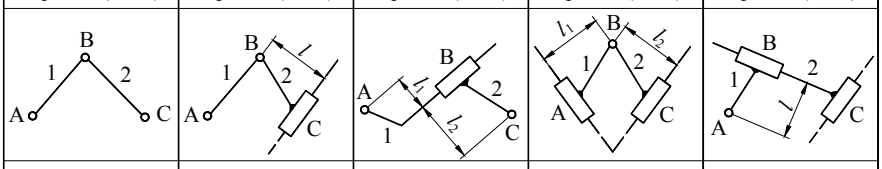
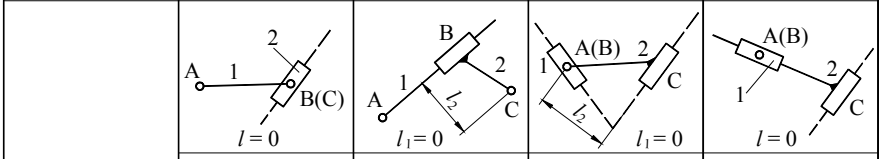
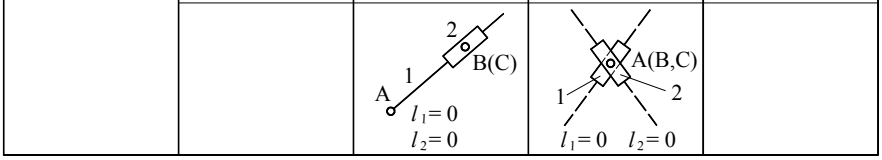
Grupele structurale se clasifică în **clase** şi **ordine**. **Clasa** se stabileşte astfel:

- Dacă grupa conține contururi închise deformabile clasa este egală cu numărul maxim de laturi ale acestora;
- Dacă grupa nu conține astfel de contururi, clasa este egală cu rangul maxim al elementelor.

Ordinul este egal cu numărul cuplelor exterioare.

În Tab.1.4 se precizează, la fiecare grupă, clasa şi ordinul. În cadrul schemelor din Tab.1.4 s-au folosit, pentru simplificare, numai cuple de rotație. Este evident că fiecare grupă poate avea atât cuple de rotație cât şi de translație. Prin combinarea lor se obțin, pentru fiecare soluție structurală, un număr de variante, numite **aspecte**. În cazul grupei 0/2/2 (L / clasa / ordinul) există 5 aspecte numerotate convențional aşa cum se indică în Tab.1.5. În acest tabel sunt arătate şi formele degenerate ale grupelor, caracterizate prin unele dimensiuni egale cu zero. Aceste forme au importanță practică pentru că sunt favorabile din punct de vedere al solicitărilor elementelor.

Tabelul 1.5

Aspect 1 (RRR)	Aspect 2 (RRT)	Aspect 3 (RTR)	Aspect 4 (TRT)	Aspect 5 (RTT)
				
				
				

■ Grupele conducătoare (Duca, Simionescu) cu L = 1

Condiția

$$L = 3n - 2c_5 = 1 \qquad (1.18)$$

conduce la următoarele soluții numerice:

n	1	3	5	...
c_5	1	4	7	...

Soluțiile structurale pentru primele două soluții numerice sunt arătate în Tab.1.4 împreună cu clasificarea lor. Grupa 1/1/1 are o singură cuplă care este conducătoare şi exterioară. În majoritatea cazurilor această cuplă este de rotație,

fiind asociată cu un motor rotativ. Grupa 1/2/2 are o cuplă conducătoare (B) formată între două elemente mobile (1 şi 2). În această situaţie se utilizează un motor hidraulic liniar format dintr-un cilindru şi un piston.

1.3.3. Formarea mecanismelor şi descompunerea în grupe structurale

Am arătat că grupa structurală trebuie interpretată ca un lanţ cinematic component al unui mecanism. Operaţia de asamblare a grupelor structurale

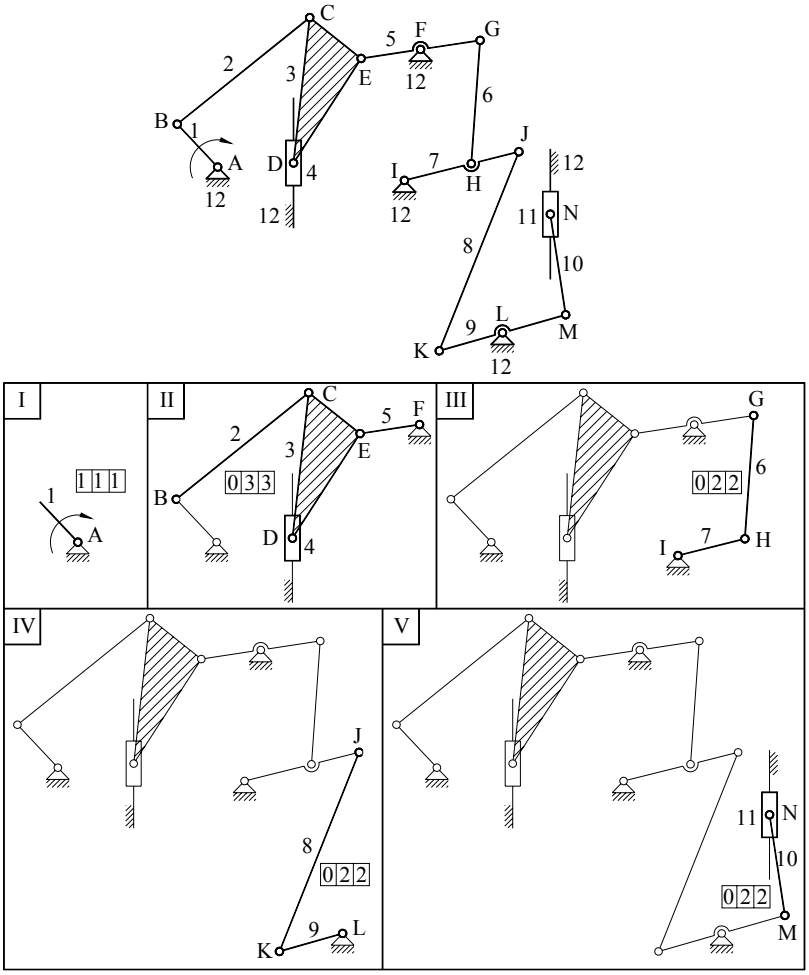


Fig. 1.29

pentru construirea mecanismelor se realizează pe baza următorului **principiu de formare**:

Orice mecanism se poate forma prin legarea succesivă de grupe structurale, pornind de la elementul fix.

Înțelegerea principiului de formare comportă câteva precizări suplimenatre. Aşa cum se arată în enunț, în faza inițială a procesului de formare se consideră elementul fix (baza). Apoi se leagă, în mod succesiv, grupe structurale prin intermediul cuplelor exterioare. După anexarea unei noi grupe se obține un nou mecanism, din ce în ce mai complex. Legarea unei grupe trebuie să se facă prin toate cuplele exterioare, la mecanismul format în etapa precedentă. Deci, după legarea în mecanism, grupa nu trebuie să rămână cu cuple libere. Gradul de mobilitate al mecanismului obținut este egal cu suma gradelor de libertate ale grupelor componente. Trebuie remarcat că modul de formare al unui mecanism este unic. Deci, nu este posibil de a obține acelaşi mecanism folosind grupe structurale diferite sau succesiuni diferite de legare a

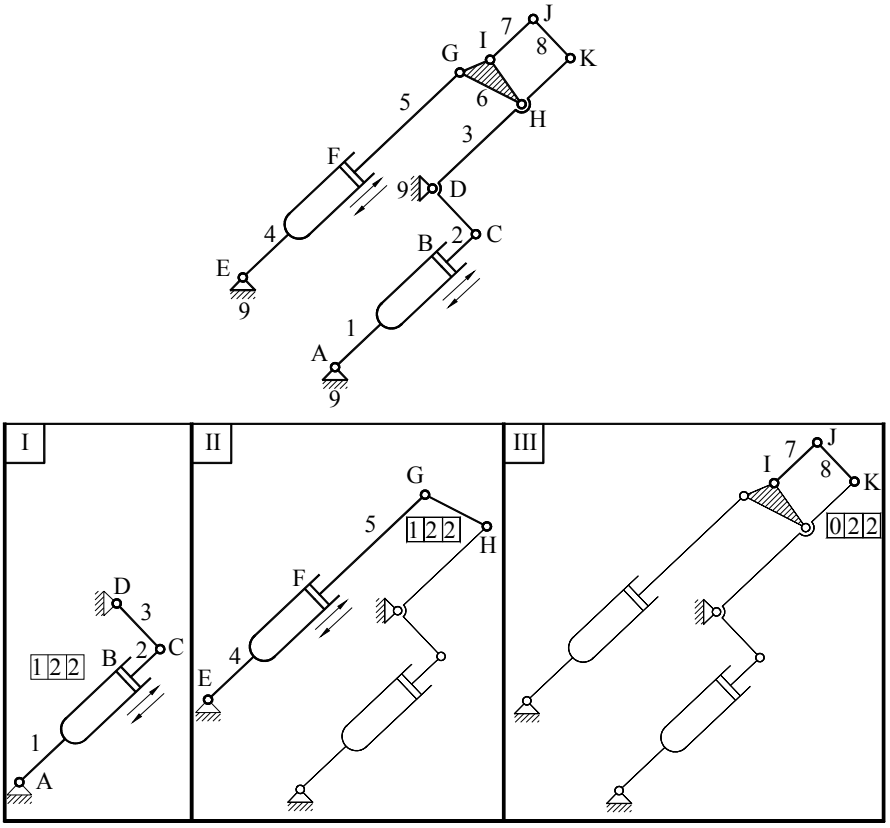


Fig. 1.30

acestora. Pentru exemplificare, în Fig.1.29 se prezintă formarea unui mecanism din industria textilă, iar în Fig.1.30 este arătată formarea unui mecanism de încărcător frontal.

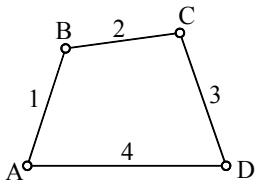
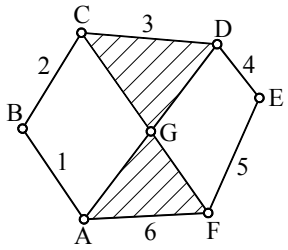
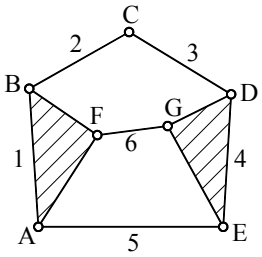
Operaţia inversă formării este **descompunerea** în grupe structurale. Prin această operaţie se pun în evidenţă grupele componente reconstituind procesul de formare. Mecanismului i se atribuie o clasă, egală cu clasa maximă întâlnită la grupele componente.

Vom studia, în continuare, structura mecanismelor plane, cu gradul de mobilitate M = 1, din punct de vedere al grupelor componente. Lanţurile cinematice închise din care se pot forma mecanisme trebuie să verifice ecuaţia

$$M = 3(n-1) - 2c_5 = 1.$$

Soluţiile acestei ecuaţii, care interezează practic, sunt n =4, c_5 =4 şi n =6, c_5 =7. Prima soluţie numerică are un singur corespondent structural, iar din soluţia a doua rezultă două lanţuri cinematice numite: **Watt** şi **Stephenson** (Tab.1.6).

Tabelul 1.6

n = 4, c_5 = 4	n = 6, c_5 = 7	
 Patrulater	 Watt	 Stephenson

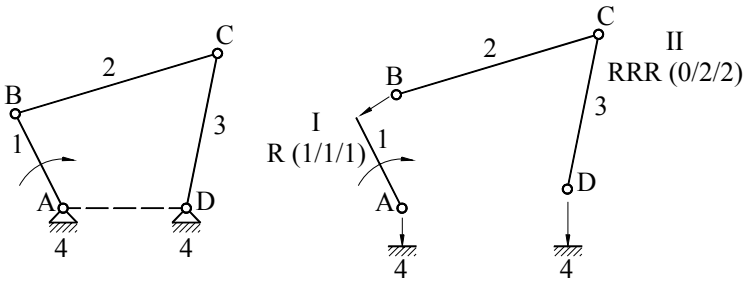
Lanţurile cinematice închise sunt formate din unul sau mai multe **contururi** care sunt **lanţuri cinematice simple închise**. Astfel, lanţul cinematic patrulater (Tab.1.6) are, evident, un singur contur iar lanţurile Watt şi Stephenson au câte trei contururi. Contururile lanţului Watt sunt: ABCGA, DEFGD şi ABCDEFA, iar cele ale lanţului Stephenson sunt: AFGEA, BCDGFB şi ABCDEA. Dintre cele trei contururi, oricare două se consideră **independente** deoarece cel de-al treilea contur conţine numai elemente şi cuple întâlnite la celelalte două contururi. Numărul de contururi independente N, se poate calcula cu formula:

$$N = c_5 - n + 1,$$

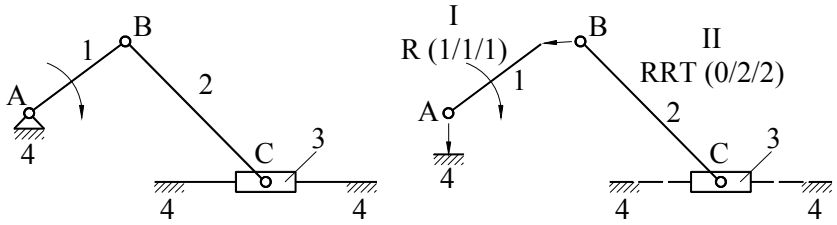
care este verificată pentru lanţurile cinematice din Tab.1.6.

Dacă precizăm elementul de referinţă şi cupla conducătoare, din fiecare lanţ cinematic se pot obţine mai multe mecanisme, iar dacă se combină cuplele de rotaţie cu cele de translaţie numărul de mecanisme obţinut este foarte mare.

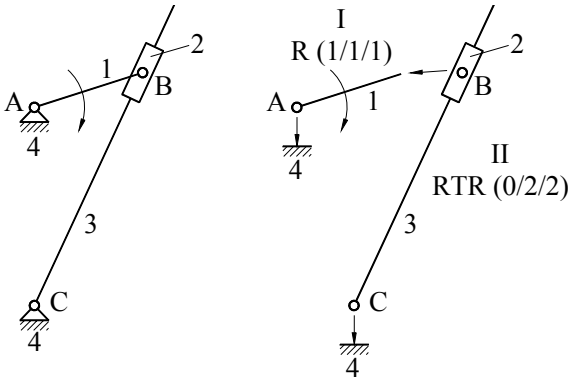
În Fig.1.31 se prezintă mecanismele cu patru elemente care au cea mai largă utilizare în construcția de maşini şi se precizează grupele structurale componente.



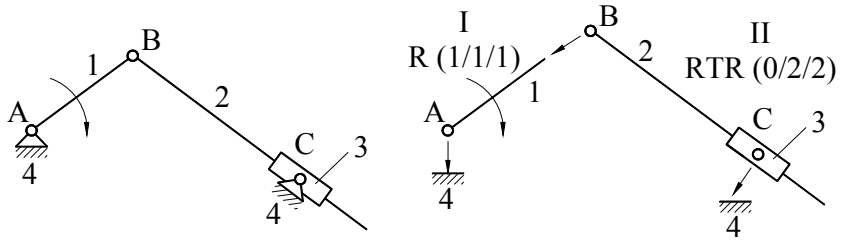
a) *mecanismul patrulater articulat*



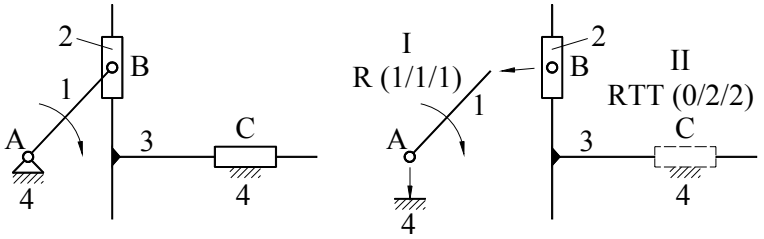
b) *mecanismul manivelă – piston (bielă – manivelă)*



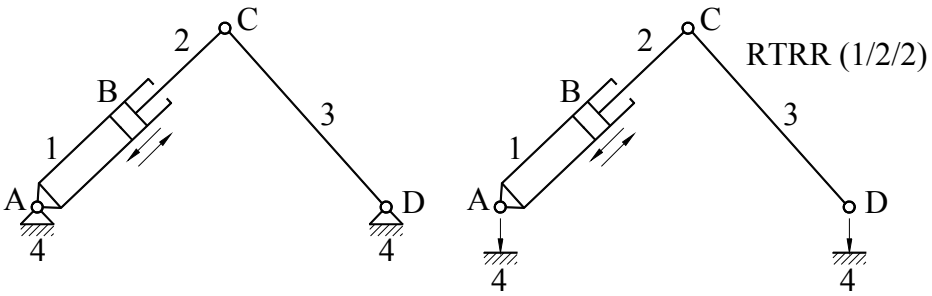
c) *mecanismul cu culisă de rotație*
(varianta cu elementul 2 – patină şi elementul 3 – culisă)



d) *mecanismul cu culisă de rotaţie*
(varianta cu elementul 2 – culisă şi elementul 3 – patină)



e) *mecanismul cu culisă de translaţie*

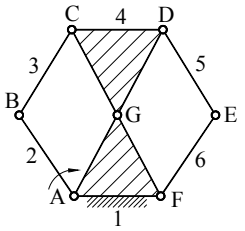
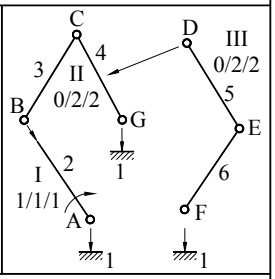
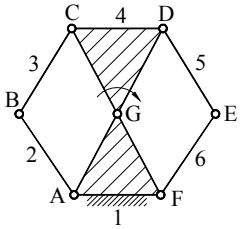
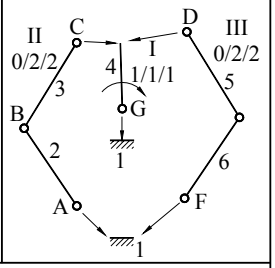
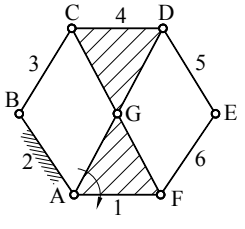
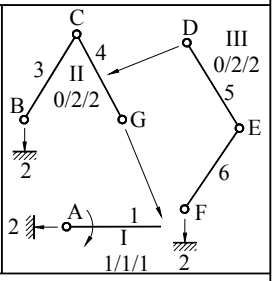
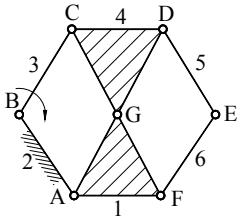
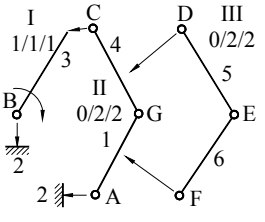


f) *mecanismul cu cilindru oscilant*

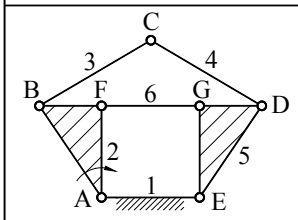
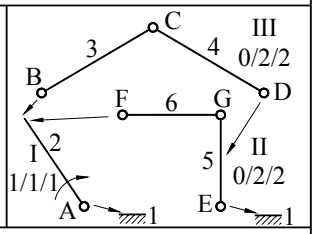
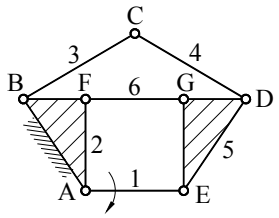
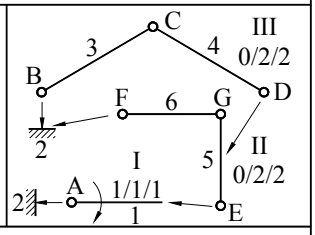
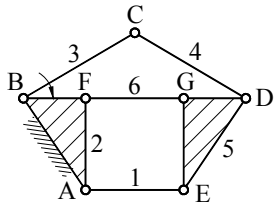
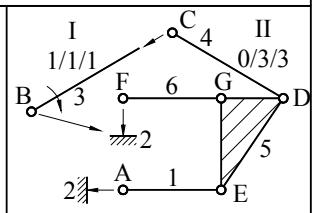
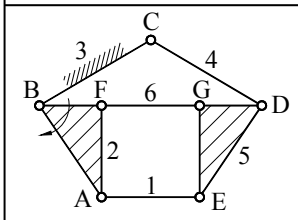
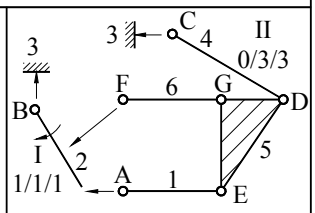
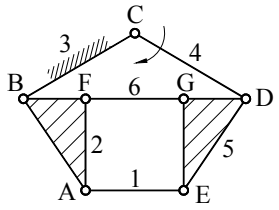
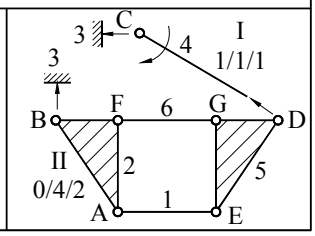
Fig. 1.31

În Tab.1.7 se prezintă mecanismele articulate care derivă din lanțul Watt (în număr de patru), iar în Tab.1.8 – mecanismele articulate care provin din lanțul Stephenson (în număr de cinci), indicându-se compoziția lor grupală.

Tabelul 1.7

1) Baza: 1, Cupla conducătoare: A	
	
2) Baza: 1, Cupla conducătoare: G	
	
3) Baza: 2, Cupla conducătoare: A	
	
4) Baza: 2, Cupla conducătoare: B	
	

Tabelul 1.8

1) Baza: 1, Cupla conducătoare: A	
	
2) Baza: 2, Cupla conducătoare: A	
	
3) Baza: 2, Cupla conducătoare: B	
	
4) Baza: 3, Cupla conducătoare: B	
	
5) Baza: 3, Cupla conducătoare: C	
	

Cunoaşterea structurii mecanismelor, din punct de vedere al grupelor componente, este importantă pentru analiza cinematică şi cinetostatică. Grupele structurale sunt sisteme determinate cinematic şi static. Ca urmare, ele pot fi studiate independent de restul mecanismului, iar pentru fiecare grupă se poate stabili un procedeu da analiză specific. În aceste condiţii analiza unui mecanism se desfăşoară în două etape:

1) Descompunerea în grupe structurale;
2) Aplicarea pentru fiecare grupă a procedeului specific, prestabilit.

Acest mod de abordare a problemei prezintă avantaje deosebite deoarece numărul de grupe uzuale, deci de procedee de calcul necesare, este redus, iar numărul de mecanisme care se pot forma cu ajutorul lor este foarte mare. De asemenea, metoda se pretează foarte bine la aplicarea calculului automatizat.

Capitolul 2

MECANISME CU CUPLE INFERIOARE (CU BARE)

2.1. ANALIZA CINEMATICĂ

2.1.1. Consideraţii generale

Analiza cinematică urmăreşte determinarea stării cinematice a mecanismului şi implică rezolvarea a trei probleme: a poziţiilor, a vitezelor şi a acceleraţiilor. Datele de intrare sunt constituite din parametrii constructivi ai mecanismului şi din parametrii care determină poziţia şi mişcarea din cuplele conducătoare. De regulă, viteza unghiulară a elementului conducător, în cazul cuplei conducătoare de rotaţie, se consideră constantă, iar valoarea ei este o caracteristică tehnică a motorului. Datele de ieşire sunt parametrii care determină complet poziţia, distribuţia de viteze şi distribuţia de acceleraţii pentru fiecare element. Cele trei probleme se rezolvă, obligatoriu, în ordinea menţionată pentru că îşi livrează date în această succesiune. Pentru a descrie funcţionarea mecanismului în intervalul unui ciclu cinematic se pot trasa traiectoriile unor puncte şi diverse diagrame care arată variaţia unor parametri de poziţie şi cinematici în funcţie de parametrul poziţiei relative dintre elementele cuplei conducătoare – variabila independentă a mecanismului.

Abordarea analizei cinematice se poate face în două moduri: global sau pe grupe structurale. Prima modalitate este recomandabilă în cazul mecanismelor simple, monocontur. Cea de-a doua prezintă avantaje importante în cazul mecanismelor complexe. Grupa structurală este un lanţ cinematic determinat, astfel încât poate fi analizată separat, cu finalizarea numerică a calculelor. Pentru fiecare grupă se poate elabora un procedeu specific de analiză caracterizat printr-un algoritm şi un program de calcul. Având la dispoziţie programele specifice grupelor uzuale, analiza cinematică a unui mecanism se reduce la asamblarea acestora în funcţie de strucura mecanismului. În felul acesta, folosind un număr redus de procedee prestabilite, se poate face analiza

unui număr mare de mecanisme. Astfel, numărul de mecanisme plane cu M = 1 şi n ≤ 6, care conţin grupe structurale 1/1/1 de tip R şi 0/2/2 de aspectele RRR, RRT şi RTR, este de 94. Prin urmare, cu patru procedee, dintre care unul banal (R), se pot analiza 94 de mecanisme care acoperă, în bună parte, aria mecanismelor plane uzuale. Trebuie precizat că analiza unei grupe presupune cunoaşterea stării cinematice a elementelor la care aceasta se ataşează. Rezultă că ordinea în care se face analiza cinematică a grupelor componente trebuie să coincidă cu ordinea de formare a mecanismului.

În funcţie de modul de rezolvare a modelului matematic, metodele de analiză cinematică sunt analitice, grafice sau grafo-analitice. Metodele analitice, cu soluţie directă sau obţinută prin procedee numerice, sunt cele mai utilizate datorită avantajelor pe care le prezintă: precizie şi rapiditate, în condiţiile aplicării calculului automat. Metodele grafice şi grafo-analitice îşi găsesc, totuşi, utilitatea. Ele se constituie, uneori, ca modele iniţiale care se dezvoltă prin transpunere analitică. Totodată aceste metode pot furniza soluţii iniţiale în cadrul procedeelor numerice sau se folosesc pentru a verifica dacă soluţiile numerice sunt corecte. În afară de aceasta, metodele grafice pot fi aplicate direct pe calculator în contextul utilizării programelor utilitare cu caracter grafic (de exemplu AutoCAD).

Problema poziţiilor este, în general, neliniară astfel că admite mai multe soluţii pentru aceleaşi date de intrare. Fiecare soluţie este în corespondenţă cu o poziţie a grupei structurale (sau a mecanismului), care, la rândul ei, este determinată prin operaţia de montare. Identificarea soluţiei (poziţiei) care trebuie luată în considerare într-o problemă de analiză cinematică, se face, de obicei, pe baza schemei cinematice a mecanismului. Dirijarea calculului spre soluţia dorită depinde de procedeul de rezolvare. În cazul rezolvărilor analitice directe, soluţiile se diferenţiază fie prin semnele care intervin în faţa unor radicali, fie prin cele două valori, cuprinse in intervalul $[0,\ 2\pi]$, al unor funcţii trigonometrice inverse. În cazul utilizării unor metode numerice, soluţia spre care converge procedeul depinde de soluţia iniţială aproximativă, care trebuie să fie cât mai apropiată de cea urmărită. Pentru a verifica dacă soluţia obţinută este cea corectă, este util să se facă o reprezentare a schemei cinematice cu datele numerice furnizate de calculator.

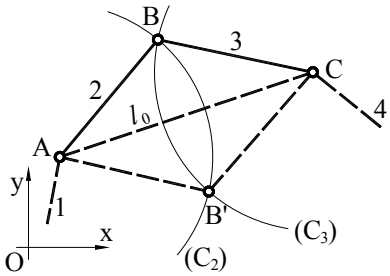
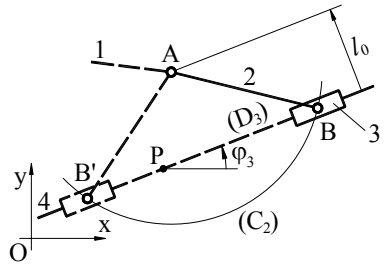
Există numeroase metode de analiză cinematică, fundamentate pe diverse domenii din matematică. În cele ce urmează vom prezenta cele mai importante metode, arătând categoriile de mecanisme pentru care se recomandă fiecare. Vom trata, separat, mecanismele spaţiale cu cea mai largă întrebuinţare practică.

2.1.2. Metoda intersecției locurilor geometrice

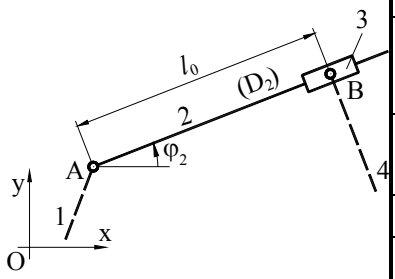
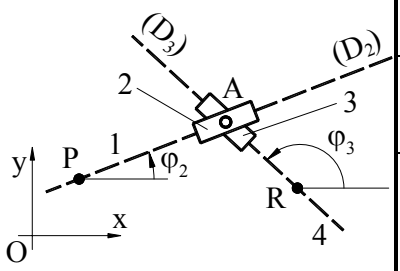
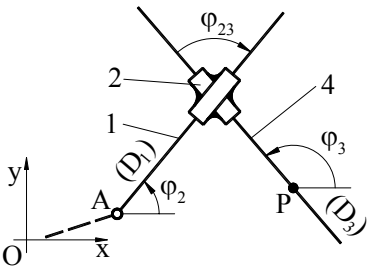
Această metodă serveşte numai pentru determinarea poziţiilor şi are atât caracter grafic, cât şi analitic. În Tab.2.1 se prezintă procedeele de analiză a poziţiilor pentru grupele structurale uzuale luând în considerare cele două modele. De fapt, procedeul analitic este o transpunere a procedeului grafic folosind, ca instrument matematic, elemente de geometrie analitică. În Tab.2.1 se indică, de asemenea, parametrii de intrare clasificaţi astfel: 1) parametrii constructivi; 2) parametrii de poziţie transmişi prin cuplele exterioare de la elementele la care se ataşează grupa; 3) parametrul poziţiei relative din cupla conducătoare. În acelaşi tabel se formulează condiţiile pentru care problema are soluţii reale, exprimate sub forma unor inegalităţi. Când aceste condiţii sunt îndeplinite la limită se obţin **poziţiile critice** sau **moarte** ale grupei. În general poziţiile critice trebuie evitate deoarece pot conduce la blocarea mecanismului din care face parte grupa structurală. Interpretări mai detaliate în legătură cu comportarea mecanismelor în poziţiile critice se prezintă în subcapitolul 2.4.2.
Pentru grupele 0/2/2 s-au luat în considerare numai formele reduse (degenerate) deoarece acestea sunt utilizate exclusiv în construcţia mecanismelor, iar procedeele de analiză sunt mai simple decât în cazul formelor generale.

Metodele analitice, indicate în Tab.2.1, pentru grupele RRR, RRT şi RTRR sunt constituite din sisteme de ecuaţii algebrice neliniare care reclamă, în general, rezolvări prin metode numerice. Pentru aceleaşi grupe se pot elabora şi modele cu rezolvare analitică directă, care prezintă avantajul unei dirijări precise a procesului de calcul spre soluţia (poziţia) dorită. Aceste procedee sunt prezentate în continuarea Tab.2.1. Pentru fiecare grupă se consideră un sistem de coordonate absolut, solidar cu baza mecanismului şi câte un sistem solidar cu fiecare element. Se adoptă, de asemenea, un sistem ajutător (notat cu indicele 0 (zero)) definit în raport cu poziţia cuplelor exterioare. În final se urmăreşte determinarea poziţiei fiecărui element, concretizată prin coordonatele originii şi unghiul de poziţie ale sistemului legat de acesta, în raport cu sistemul absolut.

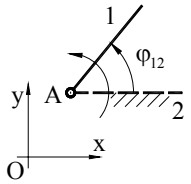
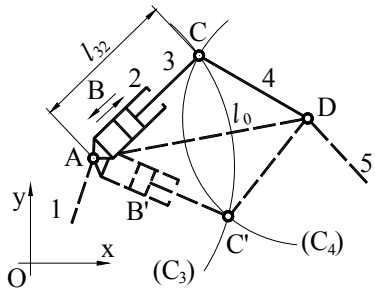
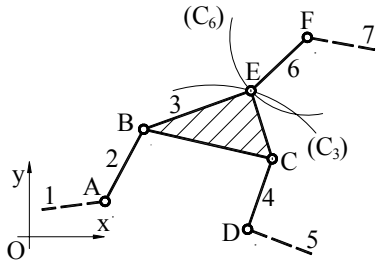
Tabelul 2.1

Schema grupei şi rezolvarea grafică	1.	Parametrii de intrare
	2.	Modelul grafic
	3.	Modelul analitic
	4.	Condițiile de existență ale soluțiilor reale
	5.	Configurațiile critice
RRR (0 / 2 / 2 asp. 1)  $l_0 = \sqrt{(y_C - y_A)^2 + (x_C - x_A)^2}$	1.	1) $l_2 = AB$, $l_3 = BC$ 2) A (x_A, y_A), C (x_C, y_C)
	2.	Se intersectează cercul (C_2) cu centrul în A, de rază l_2, cu cercul (C_3) cu centrul în C, de rază l_3. Rezultă punctul B (B').
	3.	$(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = l_2^2 \quad (C_2)$ $(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2 = l_3^2 \quad (C_3)$ $\Rightarrow$ B (x_B, y_B)
	4.	$\lvert l_2 - l_3 \rvert \le l_0 \le l_2 + l_3$
	5.	$l_0 = \lvert l_2 - l_3 \rvert$ sau $l_0 = l_2 + l_3$ A, B, C – coliniare
RRT (0 / 2 / 2 asp. 2)  $\lvert l_0 \rvert = \dfrac{\lvert (y_A - y_P) - (x_A - x_P) \cdot tg\varphi_3 \rvert}{\sqrt{1 + tg^2\varphi_3}}$	1.	1) $l_2 = AB$ 2) A (x_A, y_A), D_3 (P(x_P, y_P), φ_3)
	2.	Se intersectează cercul (C_2) cu centrul în A, de rază l_2 cu dreapta (D_3) – axa cuplei de translație. Rezultă punctul B (B').
	3.	$(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = l_2^2 \quad (C_2)$ $\dfrac{y_B - y_P}{x_B - x_P} = tg\,\varphi_3 \quad (D_3)$ $\Rightarrow$ B (x_B, y_B)
	4.	$l_2 \ge \lvert l_0 \rvert$
	5.	$l_2 = \lvert l_0 \rvert$ AB perpendiculară pe dreapta (D_3)

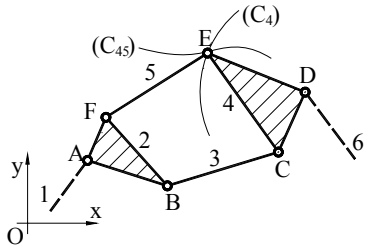
Tabelul 2.1 (continuare)

RTR (0 / 2 / 2 asp. 3)  $l_0 = \sqrt{(y_B - y_A)^2 + (x_B - x_A)^2}$	1.	1) - 2) A (x_A, y_A), B (x_B, y_B)
	2.	Se unesc punctele A şi B. Rezultă axa de translație a cuplei de translație (D_2).
	3.	$\operatorname{tg} \varphi_2 = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \Rightarrow \varphi_2$
	4.	$l_0 \geq 0$
	5.	$l_0 = 0, A \equiv B$
TRT (0 / 2 / 2 asp. 4)  	1.	1) - 2) (D_2) (P(x_P, y_P), φ_2), (D_3) (R(x_R, y_R), φ_3)
	2.	Se intersectează dreptele (D_2) şi (D_3) – axele cuplelor de translație. Rezultă punctul A.
	3.	$\dfrac{y_A - y_P}{x_A - x_P} = \operatorname{tg} \varphi_2 \quad (D_2)$ $\dfrac{y_A - y_R}{x_A - x_R} = \operatorname{tg} \varphi_3 \quad (D_3)$ $\Rightarrow$ A (x_A, y_A)
	4.	$\varphi_2 \neq \varphi_3$
	5.	$(D_2) \equiv (D_3)$
RTT (0 / 2 / 2 asp. 5)  	1.	1) φ_{23} 2) A (x_A, y_A), (D_3)(P(x_P, y_P), φ_3)
	2.	Se trasează axa de translație(D_1) prin A şi înclinată cu unghiul φ_{23} față de axa de translație (D_3).
	3.	$\varphi_2 = \varphi_3 + \varphi_{23}$
	4.	$\varphi_{23} \neq 0$
	5.	$(D_2) \equiv (D_3)$

Tabelul 2.1 (continuare)

R (1 / 1 / 1)  	1.	1) – 2) A (x_A, y_A) 3) φ_{12}
		Observaţie: Parametrii de intrare determină direct poziţia elementului 1. Nu există condiţii pentru soluţie reală şi nici poziţii critice.
RTRR (1 / 2 / 2)  $l_0 = \sqrt{(y_D - y_A)^2 + (x_D - x_A)^2}$	1.	1) l_4 = CD 2) A (x_A, y_A), D (x_D, y_D) 3) l_{32} = AC
	2.	Se intersectează cercul (C_3) cu centrul în A, de rază l_{32} cu cercul (C_4) cu centrul în D, de rază l_4. Rezultă punctul C (C').
	3.	$(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2 = l_{32}^2$ (C_3) $(x_C - x_D)^2 + (y_C - y_D)^2 = l_4^2$ (C_4) $\Rightarrow$ C (x_C, y_C)
	4.	$\lvert l_{32} - l_4 \rvert \le l_0 \le l_{32} + l_4$
	5.	$l_0 = \lvert l_{32} - l_4 \rvert$ sau $l_0 = l_{32} + l_4$ A, C, D - coliniare
0 / 3 / 3 cu cuple de rotaţie  	1.	1) l_2 = AB, l_4 = CD, l_6 = EF, l_{31} = BC, l_{32} = BE, l_{33} = CE 2) A (x_A, y_A), D (x_D, y_D), F (x_F, y_F)
	2.	Se intersectează cercul (C_6) cu centrul în F, de rază l_6, cu curba (C_3) descrisă de punctul E, aparţinând elementului 3, în mişcarea mecanismului patrulater ABCD, cu articulaţiile A şi D fixe. Rezultă punctul E.
3.	$(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 = l_2^2$ $\quad$ $(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2 = l_{31}^2$ $(x_C - x_D)^2 + (y_C - y_D)^2 = l_4^2$ $\quad$ $(x_B - x_E)^2 + (y_B - y_E)^2 = l_{32}^2$ $(x_E - x_F)^2 + (y_E - y_F)^2 = l_6^2$ $\quad$ $(x_C - x_E)^2 + (y_C - y_E)^2 = l_{33}^2$ $\Rightarrow$ B (x_B, y_B), C (x_C, y_C), E (x_E, y_E)		
4.	-		
5.	AB, CD, EF concurente sauAB, CD, EF paralele.		

Tabelul 2.1 (continuare)

0 / 4 / 2 cu cuple de rotație 	1.	1) l_{21} = AB, l_{22} = AF, l_{23} = BF, l_3 = BC, l_5 = EF, l_{41} = CD, l_{42} = DE, l_{43} = CE, 2) A (x_A, y_A), D (x_D, y_D)
	2.	Se intersectează cercul (C_4) cu centrul în D, de rază l_{42} cu curba (C_{45}) descrisă de punctul E, aparținând elementelor 4 şi 5, în mişcarea mecanismului patrulater ABCD, cu articulațiile A şi D fixe, amplificat cu grupa CEF. Rezultă punctul E.
3.	$(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 = l_{21}^2$ $\quad (x_E - x_F)^2 + (y_E - y_F)^2 = l_5^2$ $(x_A - x_F)^2 + (y_A - y_F)^2 = l_{22}^2$ $\quad (x_C - x_D)^2 + (y_C - y_D)^2 = l_{41}^2$ $(x_B - x_F)^2 + (y_B - y_F)^2 = l_{23}^2$ $\quad (x_D - x_E)^2 + (y_D - y_E)^2 = l_{42}^2$ $(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2 = l_3^2$ $\quad (x_C - x_E)^2 + (y_C - y_E)^2 = l_{43}^2$ $\Rightarrow$ B (x_B, y_B), C (x_C, y_C), E (x_E, y_E), F (x_F, y_F),	
4.	-	
5.	AD, BC, EF concurente sau AD, BC, EF paralele	

- **Grupa structurală RRR** (Fig.2.1)

Parametrii de intrare:

1) l_2 = AB, l_3 = BC

2) A (x_A, y_A), C (x_C, y_C)

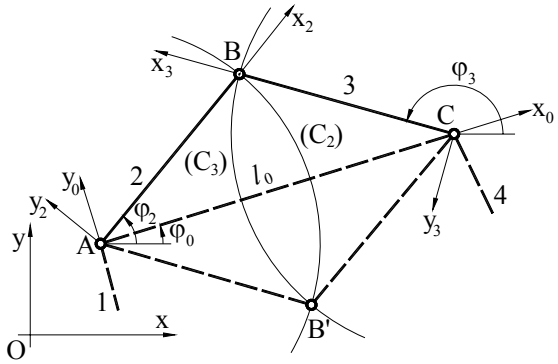


Fig. 2.1

Se calculează parametrii φ_0 şi $l_0 = AC$

$$\operatorname{tg}\varphi_0 = \left.\frac{y_C - y_A}{x_C - x_A}\right|^{(*)}, \qquad l_0 = \sqrt{\left(x_C - x_A\right)^2 + \left(y_C - y_A\right)^2}$$

Se scriu ecuațiile cercurilor (C_2) şi (C_3) în raport cu sistemul Ax_0y_0

$$x_0^2 + y_0^2 = l_2^2$$

$$\left(x_0 - l_0\right)^2 + y_0^2 = l_3^2$$

Soluțiile acestui sistem de ecuații reprezintă coordonatele punctului B(B') în sistemul Ax_0y_0

$$x_{0B} = \frac{l_2^2 - l_3^2 + l_0^2}{2 \cdot l_0}$$

$$y_{0B} = \pm\sqrt{l_2^2 - x_{0B}^2} \tag{2.1}$$

Printr-o transformare de coordonate, din sistemul Ax_0y_0 în sistemul Oxy, se obțin coordonatele absolute ale punctului B (B')

$$x_B = x_A + x_{0B}\cos\varphi_0 - y_{0B}\sin\varphi_0$$

$$y_B = y_A + x_{0B}\sin\varphi_0 + y_{0B}\cos\varphi_0$$

Se calculează unghiurile φ_2 şi φ_3:

$$\operatorname{tg}\varphi_2 = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A};\ \operatorname{tg}\varphi_3 = \frac{y_B - y_C}{x_B - x_C}$$

Parametrii de ieşire:

A (x_A, y_A), φ_2; C (x_C, y_C), φ_3

Obsevații

1) Problema are două soluții care se diferențiază prin semnele din formula (2.1). Semnul (+) conduce la poziția ABC, iar semnul (-) la AB'C .

2) Pentru a obține soluții reale, deci aplicabile practic, parametrii de intrare trebuie să respecte următoarele condiții, care rezultă atât din procedeul grafic, cât şi din analiza expresiei (2.1),

$$\left| l_2 - l_3 \right| \le l_0 \le l_2 + l_3 . \tag{2.2}$$

3) Când condițiile (2.2) sunt îndeplinite la limită, cu semnul egal,

$$\begin{cases} \left| l_2 - l_3 \right| = l_0 \\ l_2 + l_3 = l_0 \end{cases} \tag{2.3}$$

(*) *Determinarea unghiurilor de poziție prin intermediul funcției arctg, care intervine de multe ori în acest capitol, se face ținând seama de indicațiile date în ANEXA 1.4.*

se obțin două configurații critice în care punctele A, B şi C sunt coliniare. Prin configurație se înțelge poziția unui element în raport cu celălalt.

- **Grupa structurală RRT** (Fig.2.2)

Parametrii de intrare:
1) l_2 = AB, l_3 = 0
2) A (x_A, y_A), (D_3)(P(x_P, y_P), φ_3)

Se determină poziția punctului Q situat la intersecția dreptei (D_3) cu perpendiculara dusă pe aceasta prin A

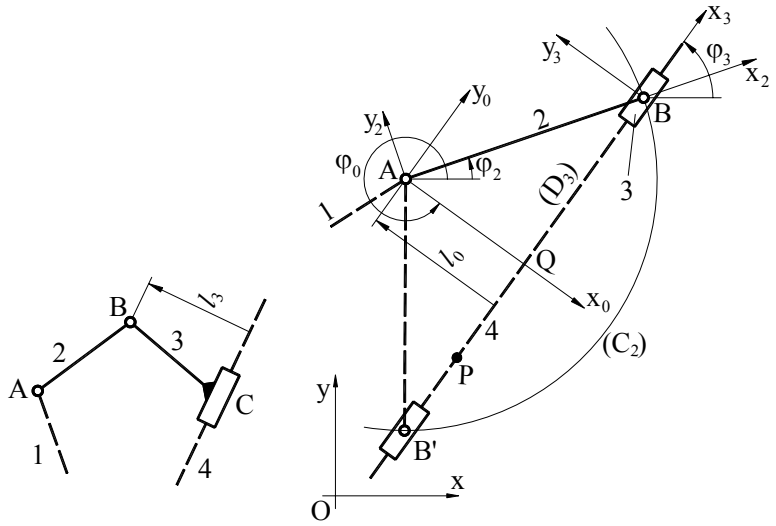
$$x_Q = \frac{m(y_A - y_P) + m^2 x_P + x_A}{1 + m^2}$$

$$y_Q = \frac{m(x_A - x_P) + m^2 y_A + y_P}{1 + m^2}$$

în care $m = tg\varphi_3$.

Se calculează $|l_0| = AQ$ şi φ_0

$$|l_0| = \sqrt{(x_Q - x_A)^2 + (y_Q - y_A)^2}\,;\; tg\varphi_0 = \frac{y_Q - y_A}{x_Q - x_A}$$



a) ***b)***

Fig. 2.2

Se scriu ecuațiile cercului (C_2) şi a dreptei (D_3) în raport cu sistemul Ax_0y_0

$$x_0^2 + y_0^2 = l_2^2$$
$$x_0 = |l_0|$$

Soluțiile acestui sistem de ecuații reprezintă coordonatele punctului B(B') în raport cu sistemul Ax_0y_0

$$x_{0B} = |l_0|$$
$$y_{0B} = \pm\sqrt{l_2^2 - l_0^2} \qquad (2.4)$$

Printr-o transformare de coordonate din sistemul Ax_0y_0 în sistemul Oxy, se obține poziția punctului B(B')

$$x_B = x_A + x_{0B}\cos\varphi_0 - y_{OB}\sin\varphi_0$$
$$y_B = y_A + x_{0B}\sin\varphi_0 + y_{OB}\cos\varphi_0$$

Unghiul φ_2 se determină din relația:

$$tg\varphi_2 = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Parametrii de ieşire:
A (x_A, y_A), φ_2; B (x_B, y_B), φ_3

Observații

1) Problema are două soluții care conduc la pozițiile AB – semnul (+) în formula (2.4) şi AB' – semnul (-).

2) Condiția pentru obținerea unei soluții reale rezultă din expresia (2.4) şi este

$$l_2 \geq |l_0|. \qquad (2.5)$$

3) Configurația critică, corespunzătoare egalității din (2.5)

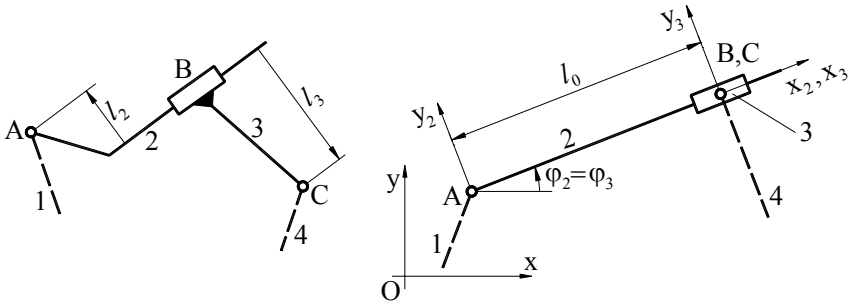
$$l_2 = |l_0|, \qquad (2.6)$$

se înregistrează când dreapta AB este perpendiculară pe axa de translație (D_3).

- **Grupa structurală RTR** (Fig.2.3)

Parametrii de intrare:
1) $l_2 = 0$, $l_3 = 0$
2) A (x_A, y_A), C (x_C, y_C)

Se determină unghiul $\varphi_2 = \varphi_3$ şi distanța l_0 = AC



a) ***b)***

Fig. 2.3

$$\operatorname{tg}\varphi_2 = \operatorname{tg}\varphi_3 = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A},\ l_0 = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2}$$

Parametrii de ieşire:
A (x_A, y_A), φ_2; C (x_C, y_C), φ_3

Observaţii

1) Problema are o singură soluție, întotdeauna reală, indiferent de poziția punctelor A şi C. Distanța l_0 poate lua orice valoare, evident, pozitivă

$$l_0 \geq 0. \tag{2.7}$$

2) Configurația critică se obține când

$$l_0 = 0, \tag{2.8}$$

deci atunci când punctele A şi C coincid.

- **Grupa structurală RTRR** (Fig.2.4)

Parametrii de intrare:
1) l_4 = DC
2) A (x_A, y_A), D (x_D, y_D)
3) l_{32}=AC

Procedeul este asemănător cu cel de la grupa structurală RRR, aşa încât vom indica relațiile de calcul fără explicații suplimentare.

$$\operatorname{tg}\varphi_0 = \frac{y_D - y_A}{x_D - x_A},\ l_0 = \sqrt{(x_D - x_A)^2 + (y_D - y_A)^2}$$

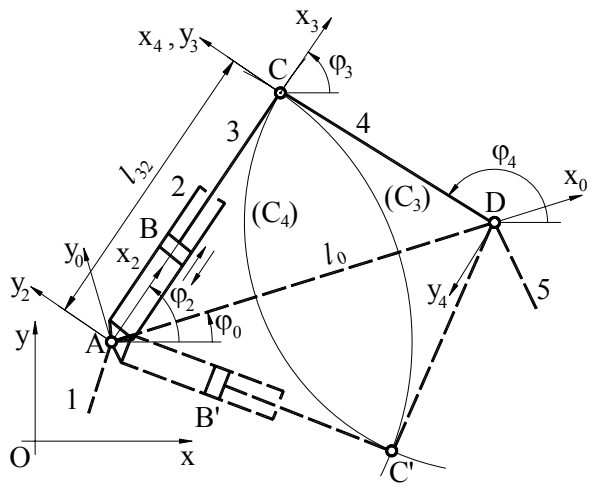


Fig. 2.4

$$\begin{cases} x_0^2 + y_0^2 = l_{32}^2 \\ (x_0 - l_0)^2 + y_0^2 = l_4^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{0C} = \dfrac{l_{32}^2 - l_4^2 + l_0^2}{2 \cdot l_0} \\ y_{0C} = \pm\sqrt{l_{32}^2 - x_{0C}^2} \end{cases} \tag{2.9}$$

$$\begin{cases} x_C = x_A + x_{0C}\cos\varphi_0 - y_{0C}\sin\varphi_0 \\ y_C = y_A + x_{0C}\sin\varphi_0 + y_{0C}\cos\varphi_0 \end{cases}$$

$$\operatorname{tg}\varphi_2 = \operatorname{tg}\varphi_3 = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A},\ \operatorname{tg}\varphi_4 = \frac{y_C - y_D}{x_C - x_D}$$

Parametrii de ieşire:

A (x_A, y_A), φ_2; C (x_C, y_C), φ_3; D (x_D, y_D), φ_4

Observații

1) Problema are două soluții determinate de semnele din formula (2.9). Semnul (+) corespunde cu poziția ABCD, iar (-) cu poziția AB'C'D .

2) Condițiile pentru soluțiile reale, rezultate din analiza expresiei (2.9), sunt

$$\left| l_{32} - l_4 \right| \le l_0 \le l_{32} + l_4 . \tag{2.10}$$

3) Configurațiile critice sunt caracterizate de egalitățile

$$\begin{aligned} &\left| l_{32} - l_4 \right| = l_0 \\ &l_{32} + l_4 = l_0 , \end{aligned} \tag{2.11}$$

şi se obțin când punctele A, C şi D sunt coliniare.

2.1.3. Metoda ecuațiilor vectoriale

2.1.3.1. Prezentare generală

Această metodă este folosită pentru determinarea vitezelor şi a accelerațiilor, în special, în cazul mecanismelor plane. Ea se asociază, de obicei, cu metoda intersecțiilor locurilor geometrice, pentru a efectua complet analiza cinematică. Metoda presupune folosirea unor ecuații vectoriale care exprimă relația dintre vitezele sau accelerațiile unei perechi de puncte aparținând mecanismului. Aceste ecuații, grupate în sisteme, se rezolvă grafic sau analitic. Ecuațiile utilizate sunt de două tipuri, funcție de relația dintre cele două puncte.

- **Ecuațiile de tipul I**

Ecuațiile de acest tip intervin când cele două puncte aparțin aceluiaşi element, cum sunt punctele A şi B care aparțin elementului 1 (Fig.2.5). Ecuația de **viteze** este

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA} \tag{2.12}$$

în care

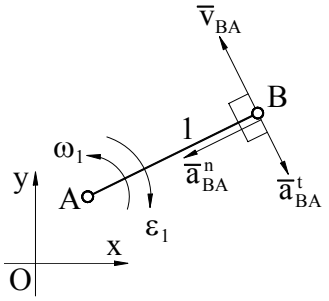


Fig. 2.5

$$\bar{v}_{BA} = \bar{\omega}_1 \times \overline{AB};\ \bar{v}_{BA} \begin{cases} \left| v_{BA} \right| = \left| \omega_1 \right| \cdot l_{AB} \\ \perp AB \\ \text{se roteste } \overline{AB} \text{ cu } 90^0 \text{in} \\ \quad \text{sensul } \omega_1 \end{cases}$$

Expresia analitică a vectorului $\bar{v}_{BA}$ este

$$\bar{v}_{BA} = \bar{\omega}_1 \times \overline{AB} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \omega_1 \\ x_B - x_A & y_B - y_A & 0 \end{vmatrix} = \bar{i}(-\omega_1(y_B - y_A)) + \bar{j} \cdot \omega_1(x_B - x_A)$$

iar proiecțiile ecuației (2.12) pe axele sistemului de coordonate sunt

$$v_{Bx} = v_{Ax} - \omega_1(y_B - y_A)$$
$$v_{By} = v_{Ay} + \omega_1(x_B - x_A).$$

Ecuația de **accelerații** are forma

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}^n_{BA} + \bar{a}^t_{BA} \qquad (2.13)$$

în care

$$\bar{a}^n_{BA} = -\omega_1^2 \overline{AB};\ \bar{a}^n_{BA} \begin{cases} \left| a^n_{BA} \right| = \omega_1^2 l_{AB} \\ // \overline{AB} \\ B \to A \end{cases}$$

$$\bar{a}^t_{BA} = \bar{\varepsilon}_1 \times \overline{AB};\ \bar{a}^t_{BA} \begin{cases} \left| a^t_{BA} \right| = \left| \varepsilon_1 \right| \cdot l_{AB} \\ \perp \overline{AB} \\ \text{se roteste } \overline{AB} \text{ cu } 90^0 \text{ in sensul } \varepsilon_1 \end{cases}$$

Expresiile analitice ale vectorilor $\bar{a}^n_{BA}$ şi $\bar{a}^t_{BA}$ sunt

$$\bar{a}^n_{BA} = -\omega_1^2 \cdot \overline{AB} = \bar{i}(-\omega_1^2(x_B - x_A)) + \bar{j}(-\omega_1^2(y_B - y_A))$$

$$\bar{a}^t_{BA} = \bar{\varepsilon}_1 \times \overline{AB} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \varepsilon_1 \\ x_B - x_A & y_B - y_A & 0 \end{vmatrix} = \bar{i}(-\varepsilon_1(y_B - y_A)) + \bar{j}\varepsilon_1(x_B - x_A)$$

iar proiecțiile ecuației (2.13) pe axele de coordonate sunt

$$a_{Bx} = a_{Ax} - \omega_1^2(x_B - x_A) - \varepsilon_1(y_B - y_A)$$
$$a_{By} = a_{Ay} - \omega_1^2(y_B - y_A) + \varepsilon_1(x_B - x_A)$$

- **Ecuațiile de tipul II**

Aceste ecuații se utilizează când cele două puncte coincid ca poziție, dar aparțin unor elemente diferite, legate prin cuplă de translație, cum sunt $A \in 1$ şi $B \in 2$ (Fig.2.6).

Ecuația de **viteze** este

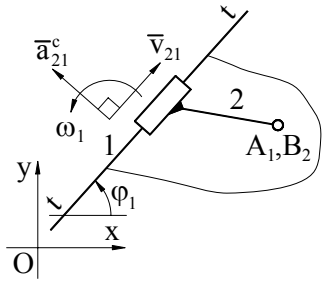


Fig. 2.6

$$\overline{v}_B = \overline{v}_A + \overline{v}_{21}, \tag{2.14}$$

în care $\overline{v}_{21} // \text{tt}$ este viteza relativă în mişcarea de translaţie a elementului 2 în raport cu elementul 1. Proiecţiile ecuaţiei (2.14) pe axele de coordonate sunt

$$v_{Bx} = v_{Ax} + v_{21} \cdot \cos\varphi_1$$
$$v_{By} = v_{Ay} + v_{21} \cdot \sin\varphi_1.$$

Ecuaţia de **acceleraţii** are forma

$$\overline{a}_B = \overline{a}_A + \overline{a}_{21}^c + \overline{a}_{21}^r, \tag{2.15}$$

în care acceleraţia relativă $\overline{a}_{21}^r //$ tt, iar acceleraţia Coriolis ($\overline{a}_{21}^c$) are caracteristicile

$$\overline{a}_{21}^c = 2\overline{\omega}_1 \times \overline{v}_{21};\ \overline{a}_{21}^c \begin{cases} \left| a_{21}^c \right| = 2\left| \omega_1 \right| \cdot \left| v_{21} \right| \\ \perp \text{ tt} \\ \text{se roteste } \overline{v}_{21} \text{ cu } 90^0 \text{ in sensul } \omega_1 \end{cases}$$

$$\overline{a}_{21}^c = 2\overline{\omega}_1 \times \overline{v}_{21} = 2 \cdot \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 0 & 0 & \overline{\omega}_1 \\ v_{21x} & v_{21y} & 0 \end{vmatrix} = \overline{i} \cdot (-2\omega_1 v_{21y}) + \overline{j} \cdot (2\omega_1 v_{21x}).$$

Proiecţiile ecuaţiei (2.15) pe axele de coordonate sunt

$$a_{Bx} = a_{Ax} - 2\omega_1 v_{21y} + a_{21}^r \cos\varphi_1$$
$$a_{By} = a_{Ay} + 2\omega_1 v_{21x} + a_{21}^r \sin\varphi_1.$$

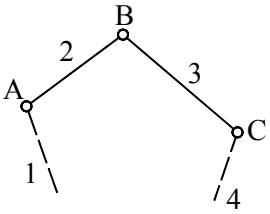
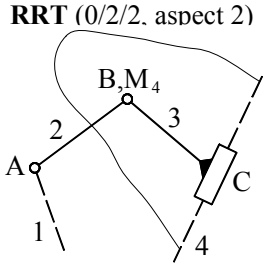
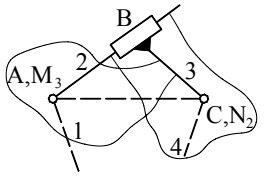
Trebuie menţionat că existenţa cuplei de translaţie între elementele 1 şi 2 împiedică rotaţia relativă dintre aceste elemente, astfel că,

$$\overline{\omega}_1 = \overline{\omega}_2 \text{ şi } \omega_1 = \omega_2$$
$$\overline{\varepsilon}_1 = \overline{\varepsilon}_2 \text{ şi } \varepsilon_1 = \varepsilon_2.$$

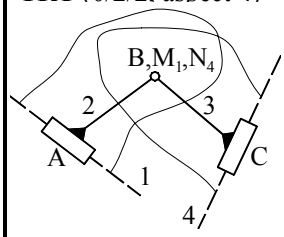
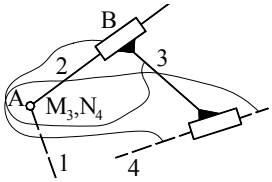
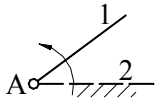
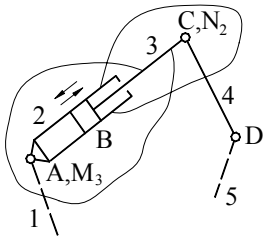
2.1.3.2. Analiza cinematică a grupelor structurale

Aplicarea metodei, în vederea determinării vitezelor şi a acceleraţiilor în cazul grupelor structurale uzuale, este arătată în Tab.2.2, în care se indică ecuaţiile vectoriale utilizate. Pentru a demonstra modul de rezolvare a ecuaţiilor vectoriale, pe cale grafică şi pe cale analitică, se prezintă, în detaliu, procedeele de analiză ale grupelor structurale 0/2/2, RRT şi 0/3/3 cu cuple de rotaţie.

Tabelul 2.2

Schema grupei structurale	Parametrii de intrare	Sistemele de ecuații vectoriale	Parametrii de ieșire
1	2	3	4
RRR (0/2/2, aspect 1) 	$\bar{v}_A, \bar{v}_C$	(I) $\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA}$ (I) $\bar{v}_B = \bar{v}_C + \bar{v}_{BC}$	Elem. 2: $\bar{v}_A, \bar{v}_B$ Elem. 3: $\bar{v}_B, \bar{v}_C$
	$\bar{a}_A, \bar{a}_C$	(I) $\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}^n_{BA} + \bar{a}^t_{BA}$ (I) $\bar{a}_B = \bar{a}_C + \bar{a}^n_{BC} + \bar{a}^t_{BC}$	Elem. 2: $\bar{a}_A, \bar{a}_B$ Elem. 3: $\bar{a}_B, \bar{a}_C$
RRT (0/2/2, aspect 2)  M∈4	$\bar{v}_A, \bar{v}_M, \omega_4$	(I) $\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA}$ (II) $\bar{v}_B = \bar{v}_M + \bar{v}_{34}$	Elem.2: $\bar{v}_A, \bar{v}_B$ Elem.3: $\bar{v}_B, \omega_3 = \omega_4$
	$\bar{a}_A, \bar{a}_M, \varepsilon_4$	(I) $\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}^n_{BA} + \bar{a}^t_{BA}$ (II) $\bar{a}_B = \bar{a}_M + \bar{a}^c_{34} + \bar{a}^r_{34}$	Elem. 2: $\bar{a}_A, \bar{a}_B$ Elem.3: $\bar{a}_B, \varepsilon_3 = \varepsilon_4$
RTR (0/2/2, aspect 3)  M∈3, N∈2	$\bar{v}_A, \bar{v}_C$	(II) $\bar{v}_M = \bar{v}_A + \bar{v}_{32}$ (I) $\bar{v}_M = \bar{v}_C + \bar{v}_{MC}$ (II) $\bar{v}_N = \bar{v}_C + \bar{v}_{23}$ (I) $\bar{v}_N = \bar{v}_A + \bar{v}_{NA}$	Elem. 2: $\bar{v}_A, \bar{v}_N$ Elem. 3: $\bar{v}_C, \bar{v}_M$
	$\bar{a}_A, \bar{a}_C$	(II) $\bar{a}_M = \bar{a}_A + \bar{a}^c_{32} + \bar{a}^r_{32}$ (I) $\bar{a}_M = \bar{a}_C + \bar{a}^n_{MC} + \bar{a}^t_{MC}$ (II) $\bar{a}_N = \bar{a}_C + \bar{a}^c_{23} + \bar{a}^r_{23}$ (I) $\bar{a}_N = \bar{a}_A + \bar{a}^n_{NA} + \bar{a}^t_{NA}$	Elem. 2: $\bar{a}_A, \bar{a}_N$ Elem. 3: $\bar{a}_C, \bar{a}_M$

Tabelul 2.2 (continuare)

1	2	3	4
TRT (0/2/2, aspect 4)  M∈1, N∈4	$\bar{v}_M, \bar{v}_N,$ ω_1, ω_4	(II) $\bar{v}_B = \bar{v}_M + \bar{v}_{21}$ (II) $\bar{v}_B = \bar{v}_N + \bar{v}_{34}$	Elem.2: $\bar{v}_B, \omega_2 = \omega_1$ Elem.3: $\bar{v}_B, \omega_3 = \omega_4$
	$\bar{a}_M, \bar{a}_N,$ $\varepsilon_1, \varepsilon_4$	(II) $\bar{a}_B = \bar{a}_M + \bar{a}^c_{21} + \bar{a}^r_{21}$ (II) $\bar{a}_B = \bar{a}_N + \bar{a}^c_{34} + \bar{a}^r_{34}$	Elem.2: $\bar{a}_B, \varepsilon_2 = \varepsilon_1$ Elem.3: $\bar{a}_B, \varepsilon_3 = \varepsilon_4$
RTT (0/2/2, aspect 5)  M∈3, N∈4	$\bar{v}_A, \omega_4$	(II) $\bar{v}_M = \bar{v}_A + \bar{v}_{32}$ (II) $\bar{v}_M = \bar{v}_N + \bar{v}_{34}$	Elem.2: $\bar{v}_A,$ $\omega_2 = \omega_3 = \omega_4$ Elem.3: $\bar{v}_M, \omega_3 = \omega_4$
	$\bar{a}_A, \varepsilon_4$	(II) $\bar{a}_M = \bar{a}_A + \bar{a}^c_{32} + \bar{a}^r_{32}$ (II) $\bar{a}_M = \bar{a}_N + \bar{a}^c_{34} + \bar{a}^r_{34}$	Elem.2: $\bar{a}_A,$ $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_4$ Elem.3: $\bar{a}_M, \varepsilon_3 = \varepsilon_4$
R (1/1/1) 	$\bar{v}_A, \omega_1$ $\bar{a}_A, \varepsilon_1$	Parametrii de intrare determină direct distribuția de viteze și de accelerații ale elementului 1.	Elem. 1: $\bar{v}_A, \omega_1$ Elem. 1: $\bar{a}_A, \varepsilon_1$
RTRR (1/2/2)  M∈3, N∈2	$\bar{v}_A, \bar{v}_D, \bar{v}_{32}$	(II) $\bar{v}_M = \bar{v}_A + \bar{v}_{32}$ (I) $\bar{v}_C = \bar{v}_M + \bar{v}_{CM}$ (I) $\bar{v}_C = \bar{v}_D + \bar{v}_{CD}$ (II) $\bar{v}_N = \bar{v}_C + \bar{v}_{23}$	Elem.2: $\bar{v}_A, \bar{v}_N$ Elem.3: $\bar{v}_M, \bar{v}_C$ Elem.4: $\bar{v}_D, \bar{v}_C$
	$\bar{a}_A, \bar{a}_D, \bar{a}^r_{32}$	(II) $\bar{a}_M = \bar{a}_A + \bar{a}^c_{32} + \bar{a}^r_{32}$ (I) $\bar{a}_C = \bar{a}_M + \bar{a}^n_{CM} + \bar{a}^t_{CM}$ (I) $\bar{a}_C = \bar{a}_D + \bar{a}^n_{CD} + \bar{a}^t_{CD}$ (II) $\bar{a}_N = \bar{a}_C + \bar{a}^c_{23} + \bar{a}^r_{23}$	Elem. 2: $\bar{a}_A, \bar{a}_N$ Elem. 3: $\bar{a}_M, \bar{a}_C$ Elem. 4: $\bar{a}_D, \bar{a}_C$

- **Grupa structurală RRT** (Fig.2.7)

Se defineşte un punct M care coincide cu B, dar aparține elementului 4.

Parametrii de intrare:

$\bar{\mathbf{v}}_A(\mathbf{v}_{Ax}, \mathbf{v}_{Ay})$, $\bar{\mathbf{v}}_M(\mathbf{v}_{Mx}, \mathbf{v}_{My})$, $\boldsymbol{\omega}_4$

$\bar{\mathbf{a}}_A(\mathbf{a}_{Ax}, \mathbf{a}_{Ay})$, $\bar{\mathbf{a}}_M(\mathbf{a}_{Mx}, \mathbf{a}_{My})$, $\boldsymbol{\varepsilon}_4$

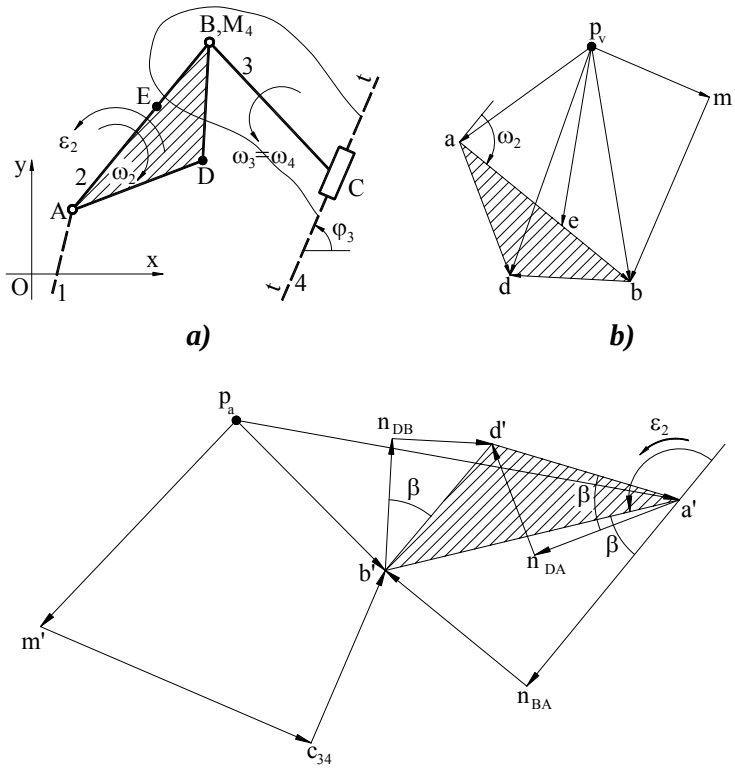


Fig. 2.7

Pentru **analiza vitezelor** se scriu următoarele ecuații

$$\begin{cases} (\mathrm{I})\ \bar{v}_B = \underline{\underline{\bar{v}_A}} + \underline{\bar{v}_{BA}} \\ (\mathrm{II})\ \bar{v}_B = \underline{\underline{\bar{v}_M}} + \underline{\bar{v}_{34}} \end{cases} \tag{2.16}$$

Se aplică, pentru început, **varianta grafică** de rezolvare. În sistemul (2.16) vectorul $\overline{v}_B$ este necunoscut, vectorii $\overline{v}_A$ şi $\overline{v}_M$ se cunosc, iar pentru vectorii $\overline{v}_{BA} \perp AB$ şi $\overline{v}_{34} // tt$ se cunosc direcţiile. Aceasta este structura generală, în ce priveşte vectorii cunoscuţi şi necunoscuţi, pentru sistemele de ecuaţii vectoriale utilizate în cadrul metodei. Ca urmare şi modul de rezolvare este unic. Se adoptă un punct $\mathbf{p_v}$ – numit polul vitezelor (Fig.2.7.b) în care se aplică $\overline{v}_A\ (\overline{p_v a})$, iar prin punctul **a** se trasează suportul vectorului $\overline{v}_{BA} \perp AB$. Această dreaptă este locul geometric al punctului **b** – extremitatea vectorului $\overline{v}_B (\overline{p_v b})$. În mod analog, se aplică în $\mathbf{p_v}$ vectorul $\overline{v}_M\ (\overline{p_v m})$, iar prin punctul **m** se trasează suportul vectorului $\overline{v}_{34} // tt$ care constituie, de asemenea, locul geometric al punctului **b**. Evident, poziţia lui **b** se găseşte la intersecţia celor două drepte, iar $\overline{p_v b}$ reprezintă $\overline{v}_B$. Din aceeaşi construcţie rezultă şi vitezele relative $\overline{v}_{BA}\ (\overline{ab})$ şi $\overline{v}_{34}\ (\overline{mb})$. Cunoscând $\overline{v}_B$, distribuţia de viteze, pentru cele două elemente, este determinată. Astfel, în cazul elementului 2 se cunosc $\overline{v}_A$ şi $\overline{v}_B$, iar în cazul elementului 3, $\overline{v}_B$ şi $\omega_3 = \omega_4$. Dacă dorim să calculăm viteza unui punct oarecare $D \in 2$, se scriu ecuaţiile

$$(I)\ \overline{v}_D = \underline{\underline{\overline{v}_A}} + \underline{\overline{v}_{DA}}$$

$$(I)\ \overline{v}_D = \underline{\underline{\overline{v}_B}} + \underline{\overline{v}_{DB}}$$

în care $\overline{v}_A$ şi $\overline{v}_B$ se cunosc, iar $\overline{v}_{DA} \perp AD$ şi $\overline{v}_{DB} \perp BD$. Rezolvarea se face la fel ca în cazul sistemului (2.16) rezultând $\overline{v}_D\ (\overline{p_v d})$, $\overline{v}_{DA}\ (\overline{ad})$ şi $\overline{v}_{DB} (\overline{bd})$. Pentru a determina viteza unghiulară ω_2 se aplică formula

$$|\omega_2| = \frac{|v_{BA}|}{l_{AB}},$$

iar sensul se stabileşte după regula dată la ecuaţiile de tipul I - sensul vitezei unghiulare ω_2 este acelaşi cu sensul în care se roteşte $\overline{AB}$ pentru a se suprapune peste $\overline{v}_{BA} (\overline{ba})$.

Construcţia grafică, numită poligonul vitezelor (Fig.2.7.b) presupune aplicarea vitezelor absolute în polul vitezelor $\mathbf{p_v}$. Această proprietate implică existenţa unei teoreme numită **teorema similitudinii cinematice pentru viteze.**

Se consideră trei puncte care aparţin unui element. Triunghiul format de extremităţile vitezelor absolute este asemenea şi rotit cu 90^0 în sensul vitezei unghiulare, în raport cu triunghiul format din cele trei puncte.

Pentru demonstrarea teoremei să considerăm punctele A, B şi D. Triunghiul **abd** este, într-adevăr, asemenea şi rotit cu 90^0 în sensul vitezei

unghiulare față de triunghiul ABD, pentru că laturile sale **ab**, **ad**, şi **bd** reprezintă vitezele relative $\overline{v}_{BA}, \overline{v}_{DA}$ şi $\overline{v}_{DB}$.

Teorema permite determinarea vitezei unui punct când se cunosc vitezele altor două puncte ale aceluiaşi element. Ea este foarte utilă în cazul în care punctele sunt coliniare. Se consideră, în acest sens, punctul E coliniar cu A şi B. Putem scrie sistemul

$$\text{(I)}\ \overline{v}_E = \underline{\underline{\overline{v}_A}} + \underline{\overline{v}_{EA}}$$

$$\text{(I)}\ \overline{v}_E = \underline{\underline{\overline{v}_B}} + \underline{\overline{v}_{EB}},$$

care nu se poate rezolva grafic pentru că suportul vitezei $\overline{v}_{EA} \perp AB$ se suprapune peste suportul vitezei $\overline{v}_{EB} \perp AB$, rezultând o nedeterminare. Aplicând teorema similitudinii ($\Delta abe \sim \Delta ABE$) rezultă că punctul **e** trebuie să fie coliniar cu **a** şi **b**, iar poziția lui se obține din proporționalitatea laturilor

$$\frac{ae}{AE} = \frac{ab}{AB} \Rightarrow ae = AE\frac{ab}{AB}.$$

Pentru **rezolvarea analitică**, sistemul (2.16) se proiectează pe axele sistemului de coordonate fix, după modelul indicat la cele două tipuri de ecuații

$$\begin{aligned}
v_{Bx} &= v_{Ax} - \omega_2(y_B - y_A)\\
v_{By} &= v_{Ay} + \omega_2(x_B - x_A)\\
v_{Bx} &= v_{Mx} + v_{34}\cdot\cos\varphi_3\\
v_{By} &= v_{My} + v_{34}\cdot\sin\varphi_3.
\end{aligned}$$

În felul acesta se obține un sistem liniar în necunoscutele $v_{Bx}, v_{By}, \omega_2, v_{34}$, care se poate scrie sub forma

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & (y_B - y_A) & 0 \\ 0 & 1 & -(x_B - x_A) & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\cos\varphi_3 \\ 0 & 1 & 0 & -\sin\varphi_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} v_{Bx} \\ v_{By} \\ \omega_2 \\ v_{34} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v_{Ax} \\ v_{Ay} \\ v_{Mx} \\ v_{My} \end{vmatrix} \qquad (2.17)$$

şi care se poate rezolva fie prin metoda directă (regula lui Cramer), fie printr-un procedeu numeric.

Observație

Sistemul (2.17) este compatibil, determinat dacă determinantul său

$$D = (x_B - x_A)\cos\varphi_3 + (y_B - y_A)\sin\varphi_3$$

este $D \neq 0$. Dacă $D = 0$, rezultă relația

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = -\frac{1}{tg\varphi_3}$$

care arată că dreapta AB este perpendiculară pe axa de translație tt. Aceasta este tocmai configurația critică a grupei structurale. În concluzie, când grupa se găseşte în configurația critică, problema vitezelor admite o singularitate (incompatibilitate sau nedeterminare). Această concluzie este valabilă pentru toate grupele structurale.

Pentru **analiza accelerațiilor** se scriu următoarele ecuații vectoriale

$$\begin{aligned} &(I)\ \bar{a}_B = \underline{\underline{\bar{a}_A}} + \underline{\underline{\bar{a}^n_{BA}}} + \underline{\bar{a}^t_{BA}} \\ &(II)\ \bar{a}_B = \underline{\underline{\bar{a}_M}} + \underline{\underline{\bar{a}^c_{34}}} + \underline{\bar{a}^r_{34}} \end{aligned} \qquad (2.18)$$

Vectorii $\bar{a}_A$ şi $\bar{a}_M$ se cunosc inițial, vectorii $\bar{a}^n_{BA}$ şi $\bar{a}^c_{34}$ se pot determina

$$\bar{a}^n_{BA}\begin{cases} \left|a^n_{BA}\right| = \omega_2^2 \cdot l_{AB} \\ // AB \\ B \to A \end{cases} ; \quad \bar{a}^c_{34}\begin{cases} \left|a^c_{34}\right| = 2\left|\omega_3\right| \cdot \left|v_{34}\right| \\ \perp tt \\ \text{se roteste } \bar{v}_{34} \text{ cu } 90^0 \text{ in sensul } \omega_3 \end{cases}$$

iar pentru vectorii $\bar{a}^t_{BA} \perp AB$ şi $\bar{a}^r_{34} // tt$ se cunosc direcțiile.

Rezolvarea grafică este similară cu cea utilizată la viteze. Se adoptă un punct numit polul accelerațiilor - $\mathbf{p_a}$ (Fig.2.7.c) în care se aplică $\bar{a}_A$ $(\overline{p_a a'})$. În extremitatea acestui vector se aplică $\bar{a}^n_{BA}$ $(\overline{a'n_{BA}})$, iar prin extremitatea sa se trasează suportul vectorului $\bar{a}^t_{BA} \perp AB$. Acesta este locul geometric al punctului $\mathbf{b'}$ – extremitatea vectorului $\bar{a}_B(\overline{p_a b'})$. Se procedează analog cu vectorii din ecuația a doua: se reprezintă succesiv $\bar{a}_M$ $(\overline{p_a m'})$, $\bar{a}^c_{34}$ $(\overline{m'c_{34}})$ şi suportul vectorului $\bar{a}^r_{34} // tt$ care este locul geometric al punctului $\mathbf{b'}$. Desigur, $\mathbf{b'}$ se găseşte la intersecția celor două drepte suport, iar $\overline{p_a b'}$ reprezintă $\bar{a}_B$. În poligonul accelerațiilor apar, de asemenea, $\bar{a}^t_{BA}$ $(\overline{n_{BA} b'})$ şi $\bar{a}^r_{34}$ $(\overline{c_{34} b'})$. În aceste condiții distribuția de accelerații este determinată: pentru elementul 2 se cunosc $\bar{a}_A$ şi $\bar{a}_B$, iar pentru elementul 3: $\bar{a}_B$ şi $\varepsilon_3 = \varepsilon_4$.

Pentru a determina accelerația unui punct oarecare $D \in 2$, se scriu ecuațiile

$$\begin{aligned} &(I)\ \bar{a}_D = \underline{\underline{\bar{a}_A}} + \underline{\underline{\bar{a}^n_{DA}}} + \underline{\bar{a}^t_{DA}} \\ &(I)\ \bar{a}_D = \underline{\underline{\bar{a}_B}} + \underline{\underline{\bar{a}^n_{DB}}} + \underline{\bar{a}^t_{DB}} \end{aligned}$$

în care $\bar{a}_A$ şi $\bar{a}_B$ se cunosc, $\bar{a}^n_{DA}$ şi $\bar{a}^n_{DB}$ se pot determina

$$\bar{a}^n_{DA}\begin{cases}\left|a^n_{DA}\right| = \omega_2^2 \cdot l_{AD}\\ // AD\\ D \to A\end{cases} \quad ; \quad \bar{a}^n_{DB}\begin{cases}\left|a^n_{DB}\right| = \omega_2^2 \cdot l_{BD}\\ // BD\\ D \to B\end{cases}$$

iar $\bar{a}^t_{DA} \perp AD$ şi $\bar{a}^t_{DB} \perp BD$.

Aplicând procedeul de rezolvare descris în cazul sistemului (2.18) se determină $\bar{a}_D$ $(\overline{p_a d'})$. Modulul accelerației unghiulare ε_2 se calculează cu formula

$$\left|\varepsilon_2\right| = \frac{\left|a^t_{BA}\right|}{l_{AB}},$$

iar sensul se determină după regula dată la ecuațiile de tipul I, ca fiind acelaşi cu sensul în care se roteşte $\overline{AB}$ pentru a se suprapune peste $\bar{a}^t_{BA}$.

Faptul că accelerațiile absolute se aplică într-un punct (p_a) determină existența **teoremei similitudinii cinematice pentru accelerații**.

Se consideră trei puncte care aparțin unui element. Triunghiul format de extremitățile accelerațiilor absolute este asemenea cu triunghiul format de cele trei puncte şi este rotit față de acesta cu unghiul $(\pi - \beta)$ **în sensul accelerației unghiulare.** Unghiul β are valoarea dată de relația

$$tg\beta = \frac{\left|\varepsilon\right|}{\omega^2}$$

Pentru a demonstra teorema se consideră punctele A, B şi D. Din poligonul accelerațiilor se observă că laturile triunghiului **a'b'd'** sunt rotite față de cele ale triunghiului **ABD** cu acelaşi unghi $(\pi - \beta)$ în sensul lui ε_2.

$$tg\beta = \frac{\left|a^t_{BA}\right|}{\left|a^n_{BA}\right|} = \frac{\left|a^t_{DA}\right|}{\left|a^n_{DA}\right|} = \frac{\left|a^t_{DB}\right|}{\left|a^n_{DB}\right|} = \frac{\left|\varepsilon_2\right|}{\omega_2^2}.$$

Ca urmare, cele două triunghiuri **a'b'd'** şi **ABD** sunt asemenea. Teorema similitudinii pentru accelerații se utilizează pentru determinarea directă (fără a scrie ecuații vectoriale) a accelerației unui punct când se cunosc accelerațiile altor două puncte aparținând aceluiaşi element. Ca şi la viteze, aplicarea teoremei este deosebit de utilă când punctele sunt coliniare şi când folosirea ecuațiilor vectoriale conduce la o nedeterminare.

Rezolvarea analitică a sistemului (2.18) se face prin proiectarea sa pe axele de coordonate după modelul arătat la cele două tipuri de ecuații

$$a_{Bx} = a_{Ax} - \omega_2^2(x_B - x_A) - \varepsilon_2(y_B - y_A)$$
$$a_{By} = a_{Ay} - \omega_2^2(y_B - y_A) + \varepsilon_2(x_B - x_A)$$

$$a_{Bx} = a_{Mx} - 2\omega_3 v_{34} \sin\varphi_3 + a_{34}^r \cos\varphi_3$$
$$a_{By} = a_{My} + 2\omega_3 v_{34} \cos\varphi_3 + a_{34}^r \sin\varphi_3 .$$

Acest sistem liniar, în necunoscutele $a_{Bx}, a_{By}, \varepsilon_2, a_{34}^r$, se poate scrie sub forma

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & (y_B - y_A) & 0 \\ 0 & 1 & -(x_B - x_A) & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\cos\varphi_3 \\ 0 & 1 & 0 & -\sin\varphi_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{Bx} \\ a_{By} \\ \varepsilon_2 \\ a_{34}^r \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{Ax} - \omega_2^2 (x_B - x_A) \\ a_{Ay} - \omega_2^2 (y_B - y_A) \\ a_{Mx} - 2\omega_3 v_{34} \sin\varphi_3 \\ a_{My} + 2\omega_3 v_{34} \cos\varphi_3 \end{vmatrix} \qquad (2.19)$$

Deoarece sistemul (2.19) are acelaşi determinant cu sistemul (2.17), observaţia legată de condiţia de compatibilitate şi determinare menţionată la viteze rămâne valabilă şi în acest caz.

- **Grupa structurală 0/3/3 cu cuple de rotaţie** (Fig.2.8)

Parametrii de intrare:

$\bar{\mathbf{v}}_A(\mathbf{v}_{Ax}, \mathbf{v}_{Ay})$, $\bar{\mathbf{v}}_C(\mathbf{v}_{Cx}, \mathbf{v}_{Cy})$, $\bar{\mathbf{v}}_E(\mathbf{v}_{Ex}, \mathbf{v}_{Ey})$

$\bar{\mathbf{a}}_A(\mathbf{a}_{Ax}, \mathbf{a}_{Ay})$, $\bar{\mathbf{a}}_C(\mathbf{a}_{Cx}, \mathbf{a}_{Cy})$, $\bar{\mathbf{a}}_E(\mathbf{a}_{Ex}, \mathbf{a}_{Ey})$

Analiza grupei 0/3/3 reclamă utilizarea **metodei punctelor singulare**. Punctele singulare aparţin elementului central 3 (Fig.2.8.a) şi se găsesc la intersecţia dreptelor AB, CD şi EF. În procesul de analiză este necesar numai unul dintre aceste puncte. Să considerăm, în acest sens, punctul S situat la intersecţia dreptelor AB şi CD.

Pentru **analiza vitezelor** se scriu ecuaţiile de tipul I

(I) $\bar{v}_S = \bar{v}_B + \bar{v}_{SB}$

(I) $\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA}$

(I) $\bar{v}_S = \bar{v}_D + \bar{v}_{SD}$

(I) $\bar{v}_D = \bar{v}_C + \bar{v}_{DC}$

din care, prin înlocuiri, se obţine sistemul

$$\begin{cases} \bar{v}_S = \bar{v}_A + \bar{v}_{SB} + \bar{v}_{BA} \\ \bar{v}_S = \bar{v}_C + \bar{v}_{SD} + \bar{v}_{DC} \end{cases} \qquad (2.20)$$

Se fac notaţiile

$$\overline{v}_{SB} + \overline{v}_{BA} = \overline{v}_{SA}$$
$$\overline{v}_{SD} + \overline{v}_{DC} = \overline{v}_{SC}$$

care permit scrierea sistemului (2.20) sub forma

$$\begin{cases} \overline{v}_S = \underline{\underline{\overline{v}_A}} + \underline{\overline{v}_{SA}} \\ \overline{v}_S = \underline{\underline{\overline{v}_C}} + \underline{\overline{v}_{SC}} \end{cases} \tag{2.21}$$

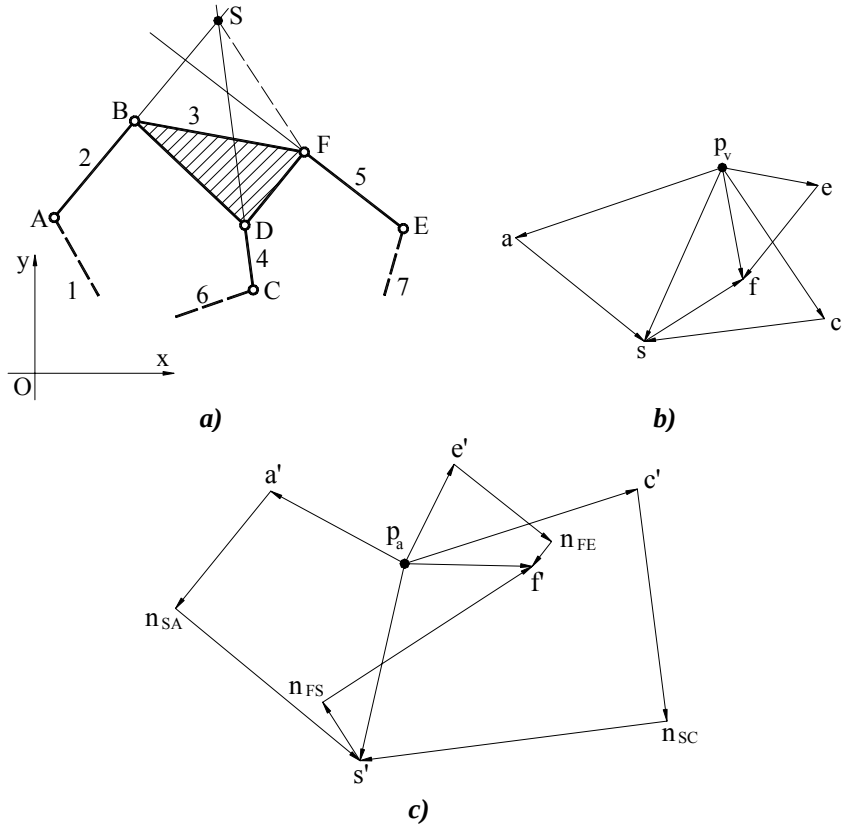


Fig. 2.8

Rezolvarea grafică a sistemului (2.21), în scopul determinării vitezei $\overline{v}_S$, se face după modelul arătat la sistemul (2.16) pentru că $\overline{v}_A$ şi $\overline{v}_C$ sunt cunoscute, iar $\overline{v}_{SA} \perp AB$ ($\overline{v}_{SB} \perp AB$, $\overline{v}_{BA} \perp AB$) şi $\overline{v}_{SC} \perp CD$ ($\overline{v}_{SD} \perp CD$, $\overline{v}_{DC} \perp CD$). După determinarea vitezei $\overline{v}_S$ se determină $\overline{v}_F$ folosind sistemul

$$\begin{cases} \overline{v}_F = \underline{\underline{\overline{v}_S}} + \underline{\overline{v}_{FS}} \\ \overline{v}_F = \underline{\underline{\overline{v}_E}} + \underline{\overline{v}_{FE}} \end{cases}$$

Apoi, se pot calcula, cu ajutorul unor sisteme similare $\overline{v}_D$ (în funcție de $\overline{v}_F$ şi $\overline{v}_C$) şi $\overline{v}_B$ (în funcție de $\overline{v}_F$ şi $\overline{v}_A$).

Pentru **rezolvarea analitică** se consideră ecuația

$$\overline{v}_S = \overline{v}_B + \overline{v}_{SB}$$

şi proiecțiile ei pe axele de coordonate

$$v_{Sx} = v_{Bx} - \omega_3 (y_S - y_B)$$
$$v_{Sy} = v_{By} + \omega_3 (x_S - x_B)$$

Între aceste ecuații se poate elimina ω_3 rezultând

$$\frac{v_{Sx} - v_{Bx}}{v_{Sy} - v_{By}} = -\frac{y_S - y_B}{x_S - x_B}$$

În mod similar, din ecuația

$$\overline{v}_B = \overline{v}_A + \overline{v}_{BA}$$

rezultă

$$\frac{v_{Bx} - v_{Ax}}{v_{By} - v_{Ay}} = -\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}.$$

Deoarece punctele A, B şi S sunt coliniare există proporția

$$\frac{y_S - y_B}{x_S - x_B} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

care conduce la relațiile

$$\frac{v_{Sx} - v_{Bx}}{v_{Sy} - v_{By}} = \frac{v_{Bx} - v_{Ax}}{v_{By} - v_{Ay}} = \frac{v_{Sx} - v_{Ax}}{v_{Sy} - v_{Ay}}$$

şi, în final, la ecuația

$$\frac{v_{Sx} - v_{Ax}}{v_{Sy} - v_{Ay}} = -\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}. \tag{2.22}$$

Considerând punctele C, D şi S se deduce, în acelaşi fel, ecuația

$$\frac{v_{Sx} - v_{Cx}}{v_{Sy} - v_{Cy}} = -\frac{y_D - y_C}{x_D - x_C} \tag{2.23}$$

Ecuațiile (2.22) şi (2.23) formează un sistem liniar

$$\begin{vmatrix} x_B - x_A & y_B - y_A \\ x_D - x_C & y_D - y_C \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} v_{Sx} \\ v_{Sy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v_{Ax}(x_B - x_A) + v_{Ay}(y_B - y_A) \\ v_{Cx}(x_B - x_C) + v_{Cy}(y_B - y_C) \end{vmatrix}$$

din care se calculează v_{Sx} și v_{Sy}. Traseul de calcul care se parcurge, în continuare, este similar cu cel arătat la procedeul grafic.

Problema accelerațiilor reclamă folosirea ecuațiilor de tipul I:

$$\begin{aligned} &(I)\ \bar{a}_S = \bar{a}_B + \bar{a}^n_{SB} + \bar{a}^t_{SB} \\ &(I)\ \bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}^n_{BA} + \bar{a}^t_{BA} \end{aligned} \tag{2.24}$$

$$\begin{aligned} &(I)\ \bar{a}_S = \bar{a}_D + \bar{a}^n_{SD} + \bar{a}^t_{SD} \\ &(I)\ \bar{a}_D = \bar{a}_C + \bar{a}^n_{DC} + \bar{a}^t_{DC} \end{aligned} \tag{2.25}$$

Prin înlocuiri se obține sistemul

$$\begin{aligned} &\bar{a}_S = \bar{a}_A + \bar{a}^n_{BA} + \bar{a}^n_{SB} + \bar{a}^t_{BA} + \bar{a}^t_{SB} \\ &\bar{a}_B = \bar{a}_C + \bar{a}^n_{DC} + \bar{a}^n_{SD} + \bar{a}^t_{DC} + \bar{a}^t_{SD} \end{aligned} \tag{2.26}$$

Se fac notațiile

$$\begin{aligned} &\bar{a}^n_{BA} + \bar{a}^n_{SB} = \bar{a}^n_{SA} \\ &\bar{a}^t_{BA} + \bar{a}^t_{SB} = \bar{a}^t_{SA} \\ &\bar{a}^n_{DC} + \bar{a}^n_{SD} = \bar{a}^n_{SC} \\ &\bar{a}^t_{DC} + \bar{a}^t_{SD} = \bar{a}^t_{SC} \end{aligned}$$

În felul acesta sistemul (2.26) se poate scrie

$$\begin{aligned} &\bar{a}_S = \underline{\underline{\bar{a}_A}} + \underline{\underline{\bar{a}^n_{SA}}} + \underline{\bar{a}^t_{SA}} \\ &\bar{a}_S = \underline{\underline{\bar{a}_C}} + \underline{\underline{\bar{a}^n_{SC}}} + \underline{\bar{a}^t_{SC}} \end{aligned} \tag{2.27}$$

Acest sistem se **rezolvă grafic** după modelul sistemului (2.18) deoarece $\bar{a}_A$ și $\bar{a}_C$ se cunosc inițial, $\bar{a}^n_{SA}$ și $\bar{a}^n_{SC}$ se pot calcula pe baza componentelor lor

$$\bar{a}^n_{BA} \begin{cases} \left| a^n_{BA} \right| = \omega_2^2 \cdot l_{AB} \\ // \ AB \\ B \to A \end{cases} ; \quad \bar{a}^n_{SB} \begin{cases} \left| a^n_{SB} \right| = \omega_3^2 \cdot l_{BS} \\ // \ BS \\ S \to B \end{cases}$$

$$\bar{a}^n_{DC} \begin{cases} \left| a^n_{DC} \right| = \omega_4^2 \cdot l_{CD} \\ // \ CD \\ D \to C \end{cases} ; \quad \bar{a}^n_{SD} \begin{cases} \left| a^n_{SD} \right| = \omega_3^2 \cdot l_{DS} \\ // \ DS \\ S \to D \end{cases}$$

iar $\bar{a}^t_{SA} \perp AB$ ($\bar{a}^t_{BA} \perp AB$, $\bar{a}^t_{SB} \perp AB$) şi $\bar{a}^t_{SC} \perp CD$ ($\bar{a}^t_{DC} \perp CD$, $\bar{a}^t_{SD} \perp CD$). În continuare se determină $\bar{a}_F$ (în funcție $\bar{a}_S$ şi $\bar{a}_E$), $\bar{a}_D$ (în funcție de $\bar{a}_F$ şi $\bar{a}_C$) şi $\bar{a}_B$ (în funcție de $\bar{a}_F$ şi $\bar{a}_A$).

În cadrul **procedeului analitic** ecuațiile (2.24) şi (2.25) se prelucrează asemănător cu ecuațiile de viteze, rezultând, în final, sistemul liniar

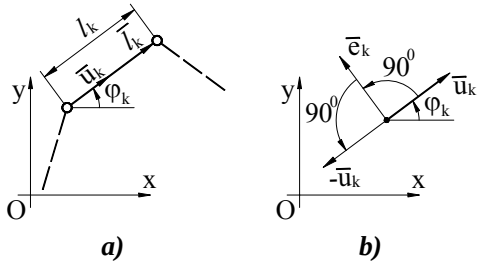
$$\begin{vmatrix} x_B - x_A & y_B - y_A \\ x_D - x_C & y_D - y_C \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{Sx} \\ a_{Sy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (a_{Ax} - \omega_3^2(x_S - x_B) - \omega_2^2(x_B - x_A))(x_B - x_A) + \\ + (a_{Ay} - \omega_3^2(y_S - y_B) - \omega_2^2(y_B - y_A))(y_B - y_A) \\ \\ (a_{Cx} - \omega_3^2(x_S - x_D) - \omega_4^2(x_D - x_C))(x_D - x_C) + \\ + (a_{Cy} - \omega_3^2(y_S - y_D) - \omega_4^2(y_D - y_C))(y_D - y_C) \end{vmatrix},$$

din care se calculează $\bar{a}_S$ (a_{Sx}, a_{Sy}).

2.1.4. Metoda contururilor vectoriale

2.1.4.1. Prezentare generală

Metoda are caracter analitic şi poate fi utilizată pentru analiza cinematică a mecanismelor plane şi spațiale formate din lanțuri cinematice închise. Aplicarea metodei presupune adoptarea unui set de contururi independente asociate mecanismului. Pentru fiecare contur se formează un circuit închis de vectori ataşați elementelor şi se scrie o ecuație de închidere care exprimă faptul că suma vectorilor este egală cu zero. Un vector oarecare din contur $\bar{l}_k$ (Fig.2.9.a) se poate exprima astfel:



a) ***b)***

Fig.2.9

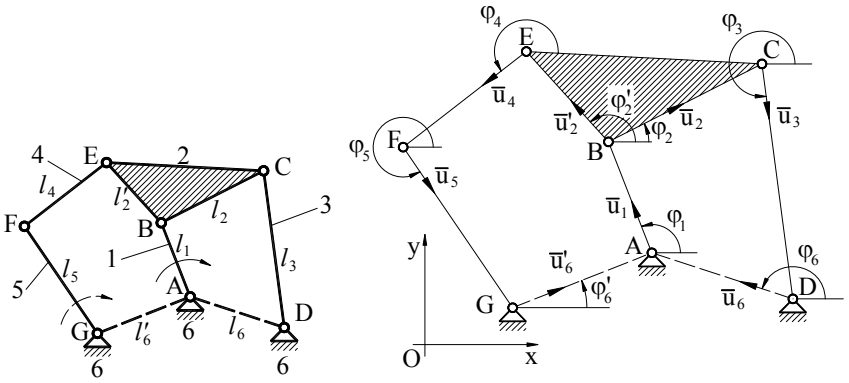
$$\bar{l}_k = \bar{u}_k(\varphi_k) \cdot l_k$$

în care l_k este o lungime, iar $\bar{u}_k(\varphi_k)$ este un versor determinat de unghiul φ_k, măsurat în sens direct (trigonometric) în raport cu semiaxa pozitivă Ox a unui sistem de coordonate fix (solidar cu baza). Prin urmare, fiecare vector al conturului conține doi parametri scalari, l_k şi φ_k care pot fi constanți sau variabili. Ecuațiile de închidere se proiectează pe axele de coordonate, rezultând un sistem de ecuații scalare care are ca necunoscute parametrii de poziție ai mecanismului. În cazul mecanismelor de clasa a 2-a ecuațiile de închidere se

pot rezolva separat, într-o ordine stabilită raţional şi admit, în general, soluţii analitice (directe). Mecanismele de clase mai mari reclamă gruparea ecuaţiilor de închidere, iar rezolvarea se poate face numai prin metode numerice. Pentru exemplificare, să considerăm mecanismul din Fig.2.10.a (care provine dintr-un lanţ cinematic Stephenson) cu circuitele vectoriale indicate în Fig.2.10.b. Ecuaţiile de închidere sunt

$$\bar{u}_1 l_1 + \bar{u}_2 l_2 + \bar{u}_3 l_3 + \bar{u}_6 l_6 = 0$$

$$\bar{u}_1 l_1 + \bar{u}'_2 l'_2 + \bar{u}_4 l_4 + \bar{u}_5 l_5 + \bar{u}'_6 l'_6 = 0$$



a) ***b)***

Fig. 2.10

Dacă se adoptă cupla A - conducătoare, mecanismul este de clasa a 2-a (descompunerea în grupe structurale este arătată în Tab.1.8). În această ipoteză prima ecuaţie de închidere are două necunoscute: φ_2 şi φ_3 deoarece l_1, l_2, l_3, l_6, şi φ_6 sunt constante constructive, iar φ_1 este parametrul cuplei conducătoare, considerat cunoscut. Prin urmare această ecuaţie de închidere se poate rezolva separat fiind echivalentă cu două ecuaţii scalare. În ecuaţia a doua intervin necunoscutele φ'_2, φ_4 şi φ_5 deoarece l_1, l'_2, l_4, l_5, l'_6 şi φ'_6 sunt constante constructive, iar φ_1 se cunoaşte. Dar, după rezolvarea primei ecuaţii, putem calcula $\varphi'_2 = \varphi_2 + \sphericalangle CBE$, astfel că rămân numai două necunoscute şi problema este determinată. În cazul în care cupla conducătoare este G, mecanismul este de clasa a 3-a (Tab.1.8), iar cele patru necunoscute φ_1, φ_2, φ_3 şi φ_4 se pot determina numai prin rezolvarea sistemului format din ambele ecuaţii.

Pentru determinarea vitezelor şi a acceleraţiilor se derivează ecuaţiile de închidere în raport cu parametrul cuplei conducătoare φ_1. Vom analiza modul în care se face derivarea unui versor oarecare $\bar{u}_k$.

$$\bar{u}_k = \bar{i}\cos\varphi_k + \bar{j}\sin\varphi_k$$

$$\frac{d\bar{u}_k}{d\varphi_1} = (-\bar{i}\sin\varphi_k + \bar{j}\cos\varphi_k)\frac{d\varphi_k}{d\varphi_1} = (\bar{i}\cos(\varphi_k + 90^0) + \bar{j}\sin(\varphi_k + 90^0))\frac{d\varphi_k}{d\varphi_1}$$

Expresia din paranteză reprezintă un versor rotit cu 90^0 în sens direct față de $\bar{u}_k$, pe care îl notăm $\bar{e}_k$ (Fig.2.9.b), astfel încât putem scrie

$$\frac{d\bar{u}_k}{d\varphi_1} = \bar{e}_k \frac{d\varphi_k}{d\varphi_1} \tag{2.28}$$

În mod analog, derivarea lui $\bar{e}_k$ în raport cu φ_1 se face după formula

$$\frac{d\bar{e}_k}{d\varphi_1} = -\bar{u}_k \frac{d\varphi_k}{d\varphi_1} \tag{2.29}$$

deoarece prin rotirea lui $\bar{e}_k$ cu 90^0 în sens direct se obține - $\bar{u}_k$ (Fig.2.9.b).

Funcțiile de forma $\varphi_k(\varphi_1)$, conținute implicit în ecuațiile de închidere şi exprimate explicit după rezolvarea acestora se numesc **funcții de transmitere de ordinul zero**. Derivatele lor în raport cu φ_1, $\frac{d\varphi_k}{d\varphi_1}(\varphi_1)$ se numesc **funcții de transmitere de ordinul unu**, iar derivatele de ordin doi $\frac{d^2\varphi_k}{d\varphi_1^2}(\varphi_1)$ **- funcții de transmitere de ordinul doi**.

În cele ce urmează se aplică această metodă pentru a efectua analiza cinematică a mecanismelor plane uzuale cu 4 elemente, caracterizate printr-un singur contur vectorial. La fiecare mecanism se precizează parametrii de intrare clasificați astfel: 1) parametrii constructivi; 2) parametrii mişcării relative din cupla conducătoare.

2.1.4.2. Mecanismul patrulater articulat plan (Fig.2.11)

Parametrii de intrare:
1) l_1, l_2, l_3, l_4
2) φ_1, ω_1, ε_1

Ecuația de închidere a conturului vectorial (Fig.2.11.b) este

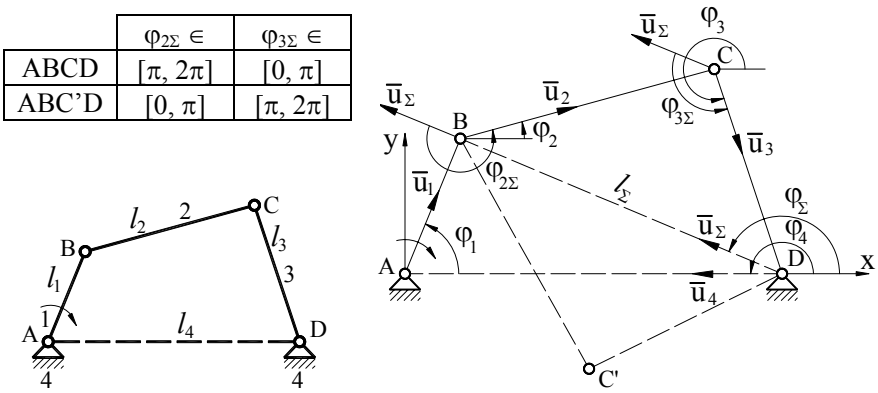
$$\bar{u}_1 l_1 + \bar{u}_2 l_2 + \bar{u}_3 l_3 + \bar{u}_4 l_4 = 0 \tag{2.30}$$

Problema pozițiilor constă în determinarea unghiurilor φ_2 şi φ_3 care intervin în ecuația de închidere, ca singure necunoscute, prin intermediul

versorilor $\overline{u}_2(\varphi_2)$ şi $\overline{u}_3(\varphi_3)$. Se observă că vectorii $\overline{u}_1 l_1$ şi $\overline{u}_4 l_4$ sunt complet cunoscuți, iar suma lor se notează $\overline{u}_\Sigma l_\Sigma$,

$$\overline{u}_\Sigma l_\Sigma = \overline{u}_1 l_1 + \overline{u}_4 l_4$$

	$\varphi_{2\Sigma} \in$	$\varphi_{3\Sigma} \in$
ABCD	$[\pi, 2\pi]$	$[0, \pi]$
ABC'D	$[0, \pi]$	$[\pi, 2\pi]$



a) ***b)***

Fig. 2.11

Proiectând această relație pe axele de coordonate şi având în vedere că $\varphi_4 = \pi$, se obține

$$l_\Sigma \cos\varphi_\Sigma = l_1 \cos\varphi_1 - l_4$$
$$l_\Sigma \sin\varphi_\Sigma = l_1 \sin\varphi_1$$

De aici rezultă

$$\varphi_\Sigma = \operatorname{arctg}\frac{l_1 \sin\varphi_1}{l_1 \cos\varphi_1 - l_4}$$
$$l_\Sigma = \sqrt{l_1^2 + l_4^2 - 2 l_1 l_4 \cos\varphi_1}$$

Ecuația de închidere se poate scrie, acum, sub forma

$$\overline{u}_2 l_2 + \overline{u}_3 l_3 + \overline{u}_\Sigma l_\Sigma = 0$$

Se separă termenul $\overline{u}_3 l_3$ şi se ridică ecuația la pătrat

$$(-\overline{u}_3 l_3)^2 = (\overline{u}_2 l_2 + \overline{u}_\Sigma l_\Sigma)^2$$
$$l_3^2 = l_2^2 + l_\Sigma^2 + 2 l_2 l_\Sigma \cos\varphi_{2\Sigma}$$

De aici rezultă unghiul $\varphi_{2\Sigma}$ format între versorii $\overline{u}_2$ şi $\overline{u}_\Sigma$

$$\varphi_{2\Sigma} = \arccos\left(\frac{l_3^2 - l_2^2 - l_\Sigma^2}{2 l_2 l_\Sigma}\right)$$

Cele două soluții posibile pentru $\varphi_{2\Sigma} \in [0, 2\pi]$ sunt în corespondență cu cele două poziții ale mecanismului ABCD şi ABC'D, aşa cum se indică în tabelul din Fig.2.11. Cunoscând $\varphi_{2\Sigma}$, se calculează

$$\varphi_2 = \varphi_\Sigma + \varphi_{2\Sigma}.$$

Procedând în mod analog, prin separarea termenului $\overline{u}_2 l_2$, se obține

$$\varphi_{3\Sigma} = \arccos\left(\frac{l_2^2 - l_3^2 - l_\Sigma^2}{2 l_3 l_\Sigma}\right)$$

şi

$$\varphi_3 = \varphi_\Sigma + \varphi_{3\Sigma}.$$

Soluțiile pentru $\varphi_{3\Sigma} \in [0, 2\pi]$ sunt, de asemenea, în corespondență cu pozițiile mecanismului, aşa cum se arată în tabelul din Fig.2.11.

În cadrul **problemei vitezelor** ne propunem să determinăm vitezele unghiulare ω_2 şi ω_3 care se pot exprima astfel

$$\omega_2 = \frac{d\varphi_2}{dt} = \frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} \cdot \frac{d\varphi_1}{dt} = \frac{d\varphi_2}{d\varphi_1}\omega_1$$

$$\omega_3 = \frac{d\varphi_3}{d\varphi_1}\omega_1$$

Deoarece ω_1 se cunoaşte, pentru a determina ω_2 şi ω_3 trebuie să determinăm funcțiile de transmitere de ordinul unu $\frac{d\varphi_2}{d\varphi_1}$ şi $\frac{d\varphi_3}{d\varphi_1}$. În acest scop se derivează ecuația de închidere (2.30) în raport cu parametrul φ_1

$$\overline{e}_1 l_1 + \overline{e}_2 l_2 \frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} + \overline{e}_3 l_3 \frac{d\varphi_3}{d\varphi_1} = 0 \quad / \cdot \overline{u}_3 / \cdot \overline{u}_2 \tag{2.31}$$

Ecuația (2.31) se înmulțeşte scalar cu $\overline{u}_3$, obținând

$$l_1 \cos(\varphi_1 + 90^0 - \varphi_3) + l_2 \frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} \cos(\varphi_2 + 90^0 - \varphi_3) = 0$$

din care rezultă

$$\frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} = -\frac{l_1 \sin(\varphi_1 - \varphi_3)}{l_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_3)}$$

Prin înmulțirea scalară a ecuației (2.31) cu $\overline{u}_2$ se obține

$$\frac{d\varphi_3}{d\varphi_1} = -\frac{l_1 \sin(\varphi_1 - \varphi_2)}{l_3 \sin(\varphi_3 - \varphi_2)}$$

Problema accelerațiilor are ca obiectiv determinarea accelerațiilor unghiulare ε_2 şi ε_3 care se exprimă astfel

$$\varepsilon_2 = \frac{d\omega_2}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} \cdot \frac{d\varphi_1}{dt}\right) = \frac{d^2\varphi_2}{d\varphi_1^2}\left(\frac{d\varphi_1}{dt}\right)^2 + \frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} \cdot \frac{d^2\varphi_1}{dt^2} = \frac{d^2\varphi_2}{d\varphi_1^2} \cdot \omega_1^2 + \frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} \cdot \varepsilon_1$$

$$\varepsilon_3 = \frac{d^2\varphi_3}{d\varphi_1^2} \cdot \omega_1^2 + \frac{d\varphi_3}{d\varphi_1} \cdot \varepsilon_1$$

În aceste expresii intervin funcțiile de transmitere de ordinul doi $\frac{d^2\varphi_2}{d\varphi_1^2}$ şi $\frac{d^2\varphi_3}{d\varphi_1^2}$ care trebuie determinate. Ceilalți parametri sunt cunoscuți inițial (ω_1, ε_1) sau au fost determinați $\left(\frac{d\varphi_2}{d\varphi_1}, \frac{d\varphi_3}{d\varphi_1}\right)$. În mod obişnuit $\varepsilon_1 = 0$ deoarece rotația elementului conducător se consideră uniformă. Pentru determinarea funcțiilor de transmitere de ordinul doi se derivează ecuația (2.31) în raport cu φ_1,

$$-\bar{u}_1 l_1 - \bar{u}_2 l_2 \left(\frac{d\varphi_2}{d\varphi_1}\right)^2 + \bar{e}_2 l_2 \frac{d^2\varphi_2}{d\varphi_1^2} - \bar{u}_3 l_3 \left(\frac{d\varphi_3}{d\varphi_1}\right)^2 + \bar{e}_3 l_3 \frac{d^2\varphi_3}{d\varphi_1^2} = 0 / \cdot \bar{u}_3 / \cdot \bar{u}_2 \qquad (2.32)$$

şi se înmulțește scalar cu $\bar{u}_3$, obținând

$$-l_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_3) - l_2 \left(\frac{d\varphi_2}{d\varphi_1}\right)^2 \cos(\varphi_2 - \varphi_3) +$$

$$+ l_2 \frac{d^2\varphi_2}{d\varphi_1^2} \cos(\varphi_2 + 90^0 - \varphi_3) - l_3 \left(\frac{d\varphi_3}{d\varphi_1}\right)^2 = 0$$

$$\frac{d^2\varphi_2}{d\varphi_1^2} = -\frac{l_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_3) + l_2 \left(\frac{d\varphi_2}{d\varphi_1}\right)^2 \cos(\varphi_2 - \varphi_3) + l_3 \left(\frac{d\varphi_3}{d\varphi_1}\right)^2}{l_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_3)}$$

Prin înmulțire cu $\bar{u}_2$ se obține

$$\frac{d^2\varphi_3}{d\varphi_1^2} = -\frac{l_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + l_3 \left(\frac{d\varphi_3}{d\varphi_1}\right)^2 \cos(\varphi_3 - \varphi_2) + l_2 \left(\frac{d\varphi_2}{d\varphi_1}\right)^2}{l_3 \sin(\varphi_3 - \varphi_2)}$$

Având la dispoziție parametrii calculați putem determina poziția, viteza şi accelerația pentru orice punct al mecanismului. Să considerăm, în acest sens, un punct P aparținând bielei 2 (Fig.2.12). Poziția punctului P, în raport cu elementul 2, este dată prin parametrii $\alpha_P = \sphericalangle CBP$ şi $l_P = BP$. Vectorul de poziție al punctului P se poate scrie

$$\overline{r}_P = \overline{u}_1 l_1 + \overline{u}_P l_P , \qquad (2.33)$$

în care $\overline{u}_P(\varphi_P)$ este versorul direcției $\overline{BP}$. Unghiul φ_P are expresia evidentă

$$\varphi_P = \varphi_2 + \alpha_P$$

Proiectând $\overline{r}_P$ (2.33), pe axele de coordonate, se obține poziția punctului P

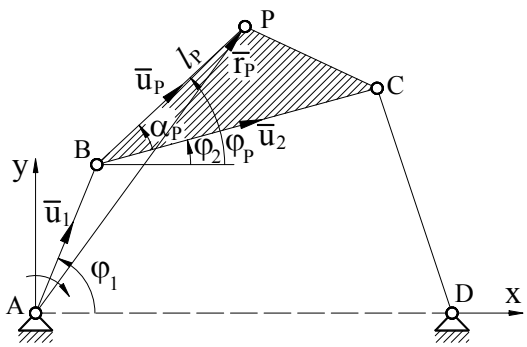


Fig. 2.12

$$x_P = l_1 \cos\varphi_1 + l_P \cos(\varphi_2 + \alpha_P)$$
$$y_P = l_1 \sin\varphi_1 + l_P \sin(\varphi_2 + \alpha_P)$$

Derivând $\overline{r}_P$ în raport cu timpul se obține viteza punctului P

$$\overline{v}_P = \frac{d\overline{r}_P}{dt} = \frac{d\overline{r}_P}{d\varphi_1} \cdot \omega_1 .$$

Funcția de transmitere $\frac{d\overline{r}_P}{d\varphi_1}$ se calculează prin derivarea expresiei (2.33) în raport cu φ_1

$$\frac{d\overline{r}_P}{d\varphi_1} = \overline{e}_1 l_1 + \overline{e}_P l_P \frac{d\varphi_2}{d\varphi_1}. \qquad (2.34)$$

Accelerația punctului P are expresia

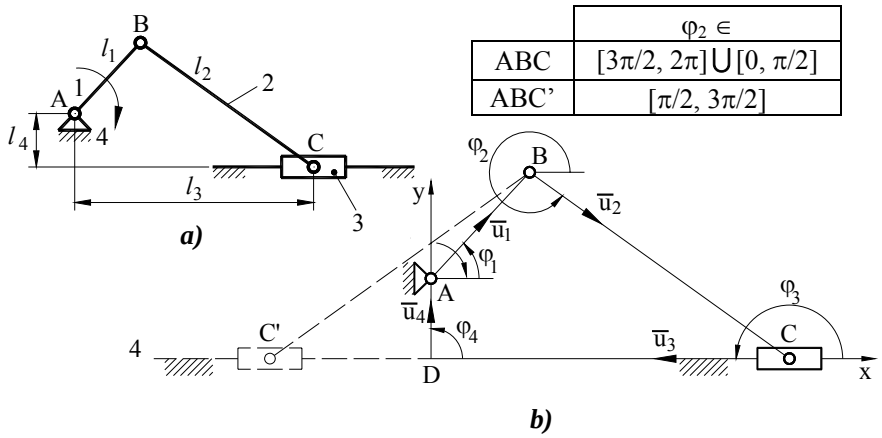
$$\overline{a}_P = \frac{d\overline{v}_P}{dt} = \frac{d^2\overline{r}_P}{d\varphi_1^2} \cdot \omega_1^2 + \frac{d\overline{r}_P}{d\varphi_1} \cdot \varepsilon_1 .$$

Funcția de transmitere de ordinul doi $\frac{d^2\overline{r}_P}{d\varphi_1^2}$ se obține derivând expresia (2.34) în raport cu φ_1

$$\frac{d^2\overline{r}_P}{d\varphi_1^2} = -\overline{u}_1 l_1 - \overline{u}_P l_P \left(\frac{d\varphi_2}{d\varphi_1}\right)^2 + \overline{e}_P l_P \frac{d^2\varphi_2}{d\varphi_1^2}. \qquad (2.35)$$

2.1.4.3. Mecanismul manivelă - piston (bielă - manivelă) (Fig.2.13)

Parametrii de intrare:
1) l_1, l_2, l_4
2) φ_1, ω_1, ε_1



	$\varphi_2 \in$
ABC	$[3\pi/2, 2\pi] \cup [0, \pi/2]$
ABC'	$[\pi/2, 3\pi/2]$

Fig. 2.13

Ecuația de închidere

$$\overline{u}_1 l_1 + \overline{u}_2 l_2 + \overline{u}_3 l_3 + \overline{u}_4 l_4 = 0 \qquad (2.30)$$

conține **parametrii de poziție** necunoscuți φ_2 şi l_3. Pentru determinarea lor, se proiectează ecuația de închidere pe axele de coordonate având în vedere că $\varphi_3 = \pi$ şi $\varphi_4 = \frac{\pi}{2}$ (dacă punctul A se găseşte sub axa de translație $\varphi_4 = -\frac{\pi}{2}$)

$$\begin{aligned} l_1 \cos\varphi_1 + l_2 \cos\varphi_2 - l_3 &= 0 \\ l_1 \sin\varphi_1 + l_2 \sin\varphi_2 + l_4 &= 0 \end{aligned} \qquad (2.36)$$

Din ecuația a doua rezultă φ_2

$$\varphi_2 = \arcsin\left(-\frac{l_1 \sin\varphi_1 + l_4}{l_2}\right).$$

Cunoscând φ_2, se determină l_3 din prima ecuație

$$l_3 = l_1 \cos\varphi_1 + l_2 \cos\varphi_2 .$$

Cele două soluții posibile pentru $\varphi_2 \in [0, 2\pi]$ sunt în corespondență cu pozițiile ABC şi ABC' ale mecanismului conform cu tabelul din Fig.2.13.

În **problema vitezelor** se urmăreşte determinarea vitezei unghiulare ω_2 şi a vitezei punctului C (v_C) care au expresiile

$$\omega_2 = \frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} \cdot \omega_1$$

$$v_C = \frac{dl_3}{dt} = \frac{dl_3}{d\varphi_1} \cdot \omega_1$$

Funcțiile de transmitere $\frac{d\varphi_2}{d\varphi_1}$ şi $\frac{dl_3}{d\varphi_1}$ se determină prin derivarea ecuației de închidere (2.30) în raport cu φ_1

$$\overline{e}_1 l_1 + \overline{e}_2 l_2 \frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} + \overline{u}_3 \frac{dl_3}{d\varphi_1} = 0 / \cdot \overline{e}_3 / \cdot \overline{u}_2 \tag{2.37}$$

Ecuația se înmulțeşte scalar, succesiv cu $\overline{e}_3$ şi $\overline{u}_2$, rezultând

$$\frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} = -\frac{l_1 \cos\varphi_1}{l_2 \cos\varphi_2}$$

$$\frac{dl_3}{d\varphi_1} = -\frac{l_1 \sin(\varphi_1 - \varphi_2)}{\cos\varphi_2}$$

În **problema accelerațiilor** se determină ε_2 şi a_C

$$\varepsilon_2 = \frac{d^2\varphi_2}{d\varphi_1^2} \cdot \omega_1^2 + \frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} \cdot \varepsilon_1$$

$$a_C = \frac{d^2 l_3}{d\varphi_1^2} \cdot \omega_1^2 + \frac{dl_3}{d\varphi_1} \cdot \varepsilon_1$$

Se derivează ecuația (2.37) în raport cu φ_1

$$-\overline{u}_1 l_1 - \overline{u}_2 l_2 \left(\frac{d\varphi_2}{d\varphi_1}\right)^2 + \overline{e}_2 l_2 \frac{d^2\varphi_2}{d\varphi_1^2} + \overline{u}_3 \frac{d^2 l_3}{d\varphi_1^2} = 0 / \cdot \overline{e}_3 / \cdot \overline{u}_2 \tag{2.38}$$

şi se înmulțeşte scalar, succesiv cu $\overline{e}_3$ şi $\overline{u}_2$, obținând funcțiile de transmitere de ordinul doi

$$\frac{d^2\varphi_2}{d\varphi_1^2} = \frac{l_1 \sin\varphi_1 + l_2 \left(\frac{d\varphi_2}{d\varphi_1}\right)^2 \sin\varphi_2}{l_2 \cos\varphi_2}; \quad \frac{d^2 l_3}{d\varphi_1^2} = -\frac{l_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + l_2 \left(\frac{d\varphi_2}{d\varphi_1}\right)^2}{\cos\varphi_2}$$

- **Formule aproximative**

În cazul acestui mecanism se folosesc, uneori, formule aproximative, dar comode, pentru calculul deplasării pistonului. Eliminând unghiul φ_2 între ecuațiile (2.36) se ajunge la următoarea expresie pentru x_C

$$x_C = l_3 = l_1 \cos\varphi_1 + l_2 \sqrt{1 - \left(\frac{l_4 + l_1 \sin\varphi_1}{l_2}\right)^2}$$

Notând $\lambda = \frac{l_1}{l_2}$ şi $k = \frac{l_4}{l_1}$, formula devine

$$x_C = l_1 \cos\varphi_1 + l_2 \sqrt{1 - \lambda^2 (k + \sin\varphi_1)^2}$$

Radicalul din această expresie se dezvoltă în serie de puteri

$$\sqrt{1 - \lambda^2 (k + \sin\varphi_1)^2} = 1 - \frac{1}{2}\lambda^2 (k + \sin\varphi_1)^2 - \frac{1}{8}\lambda^4 (k + \sin\varphi_1)^4 - \\ - \frac{1}{16}\lambda^6 (k + \sin\varphi_1)^6 - \ldots$$

Seria este convergentă dacă $\lambda^2 (k + \sin\varphi_1)^2 < 1$; condiție satisfăcută pentru valorile practice ale lui λ şi k. O aproximare suficient de bună se obține dacă se păstrează numai primii doi termeni ai seriei. În acest caz, expresia lui x_C devine

$$x_C = l_1 (\cos\varphi_1 + \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{2}\lambda k^2 - \lambda k \sin\varphi_1 - \frac{1}{2}\lambda \sin^2\varphi_1) .$$

Prin derivări succesive, în raport cu timpul, se obțin viteza şi accelerația punctului C

$$v_C = -l_1 (\sin\varphi_1 + \lambda k \cos\varphi_1 + \frac{\lambda}{2}\sin 2\varphi_1) \cdot \omega_1$$
$$a_C = -l_1 (\cos\varphi_1 - \lambda k \sin\varphi_1 + \lambda \cos 2\varphi_1) \cdot \omega_1^2$$

2.1.4.4. Mecanismul cu culisă de rotație (Fig. 2.14)

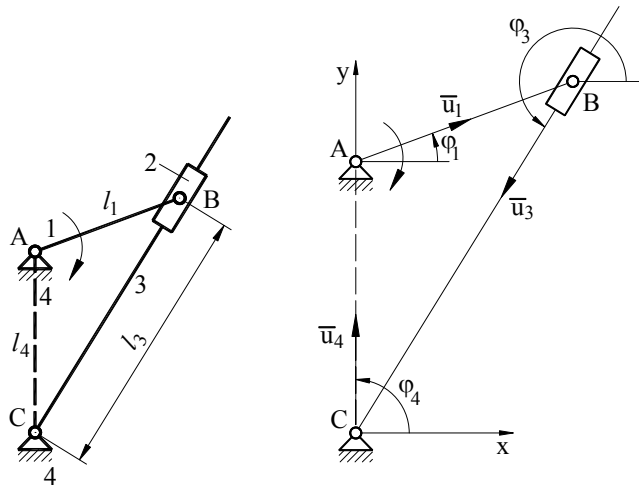
Parametrii de intrare:
1) l_1, l_4
2) φ_1, ω_1, ε_1

Ecuația de închidere a conturului vectorial este

$$\bar{u}_1 l_1 + \bar{u}_3 l_3 + \bar{u}_4 l_4 = 0 \tag{2.39}$$

şi are **parametrii de poziţie** necunoscuţi φ_3 şi l_3 grupaţi într-un singur termen, care se separă astfel

$$\bar{u}_3 l_3 = -\bar{u}_1 l_1 - \bar{u}_4 l_4 .$$



a) ***b)***

Fig. 2.14

De aici rezultă, prin proiectare pe axele de coordonate,

$$\varphi_3 = \mathrm{arctg}\left(\frac{-(l_1 \sin\varphi_1 + l_4)}{-l_1 \cos\varphi_1}\right)$$

$$l_3 = \sqrt{l_1^2 + l_4^2 + 2 l_1 l_4 \sin\varphi_1} .$$

În **problema vitezelor** interesează ω_3 care are expresia

$$\omega_3 = \frac{d\varphi_3}{d\varphi_1} \cdot \omega_1 .$$

Pentru a determina $\frac{d\varphi_3}{d\varphi_1}$ se derivează ecuaţia de închidere (2.39) în raport cu parametrul φ_1

$$\bar{e}_1 l_1 + \bar{e}_3 l_3 \frac{d\varphi_3}{d\varphi_1} + \bar{u}_3 \frac{dl_3}{d\varphi_1} = 0 / \cdot \bar{e}_3 / \cdot \bar{u}_3 \tag{2.40}$$

Înmulţind scalar, succesiv cu $\bar{e}_3$ şi $\bar{u}_3$ se obţin funcţiile de transmitere de ordinul unu,

$$\frac{d\varphi_3}{d\varphi_1} = -\frac{l_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_3)}{l_3}$$

$$\frac{dl_3}{d\varphi_1} = l_1 \sin(\varphi_1 - \varphi_3).$$

Accelerația unghiulară ε_3 are expresia

$$\varepsilon_3 = \frac{d^2\varphi_3}{d\varphi_1^2} \cdot \omega_1^2 + \frac{d\varphi_3}{d\varphi_1} \cdot \varepsilon_1.$$

Se derivează ecuația (2.40) în raport cu φ_1

$$-\overline{u}_1 l_1 - \overline{u}_3 l_3 \left(\frac{d\varphi_3}{d\varphi_1}\right)^2 + 2\overline{e}_3 \frac{d\varphi_3}{d\varphi_1} \cdot \frac{dl_3}{d\varphi_1} + \overline{e}_3 l_3 \frac{d^2\varphi_3}{d\varphi_1^2} + \overline{u}_3 \frac{d^2 l_3}{d\varphi_1^2} = 0 / \cdot \overline{e}_3 \qquad (2.41)$$

şi se înmulțeşte scalar cu $\overline{e}_3$. Rezultă

$$\frac{d^2\varphi_3}{d\varphi_1^2} = \frac{l_1 \sin(\varphi_1 - \varphi_3) - 2\frac{d\varphi_3}{d\varphi_1} \cdot \frac{dl_3}{d\varphi_1}}{l_3}.$$

2.1.4.5. Mecanismul cu culisă de translație (Fig. 2.15)

Parametrii de intrare:
1) $\boldsymbol{l_1}$
2) $\boldsymbol{\varphi_1}$**,** $\boldsymbol{\omega_1}$**,** $\boldsymbol{\varepsilon_1}$

Ecuația de închidere

$$\overline{u}_1 l_1 + \overline{u}_2 l_2 + \overline{u}_3 l_3 = 0 \qquad (2.42)$$

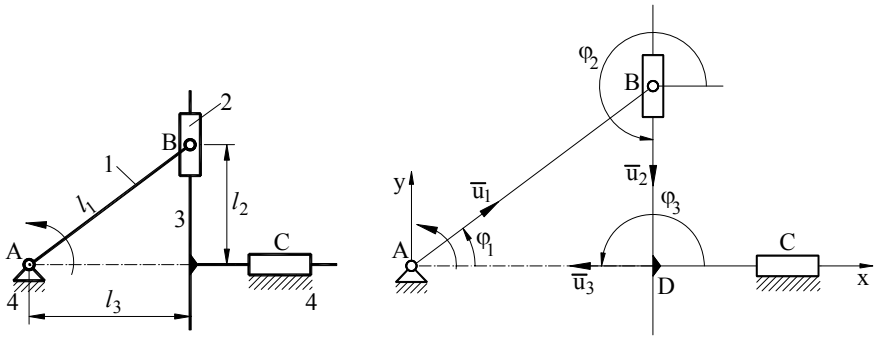
conține necunoscutele l_2 şi l_3. Dintre acestea, interesează, în primul rând, l_3 care este **parametrul de poziție** al elementului 3. Proiectând ecuația de închidere pe axa Ox şi ținând seama că $\varphi_2 = \frac{3\pi}{2}$ şi $\varphi_3 = \pi$ se obține

$$l_3 = l_1 \cos\varphi_1.$$

Derivând, succesiv, în raport cu timpul se determină viteza şi accelerația culisei de translație 3

$$v_3 = \frac{dl_3}{dt} = -\omega_1 l_1 \sin\varphi_1$$

$$a_3 = \frac{dv_3}{dt} = -\omega_1^2 l_1 \cos\varphi_1 - \varepsilon_1 l_1 \sin\varphi_1 .$$



a) ***b)***

Fig. 2.15

2.1.4.6. Mecanismul cu cilindru oscilant (Fig. 2.16)

Parametrii de intrare:
1) l_3, l_4
2) l_{21} , v_{21} , a^r_{21}

Ecuația de închidere

$$\bar{u}_1 l_{21} + \bar{u}_3 l_3 + \bar{u}_4 l_4 = 0 \qquad (2.43)$$

conține **parametrii de poziție** necunoscuți φ_1 şi φ_3. Unghiul φ_1 se determină separând termenul $\bar{u}_3 l_3$ şi ridicând la pătrat ambele părți ale ecuației

$$(-\bar{u}_3 l_3)^2 = (\bar{u}_1 l_{21} + \bar{u}_4 l_4)^2$$

$$l_3^2 = l_{21}^2 + l_4^2 + 2 l_{21} l_4 \cos(\varphi_1 - \varphi_4) = l_{21}^2 + l_4^2 - 2 l_{21} l_4 \cos\varphi_1$$

$$\varphi_1 = \arccos\left(\frac{l_{21}^2 + l_4^2 - l_3^2}{2 l_{21} l_4}\right)$$

În mod asemănător se determină φ_3, prin separarea termenului $\bar{u}_1 l_{21}$

$$\varphi_3 = \arccos\left(\frac{l_3^2 + l_4^2 - l_{21}^2}{2 l_3 l_4}\right)$$

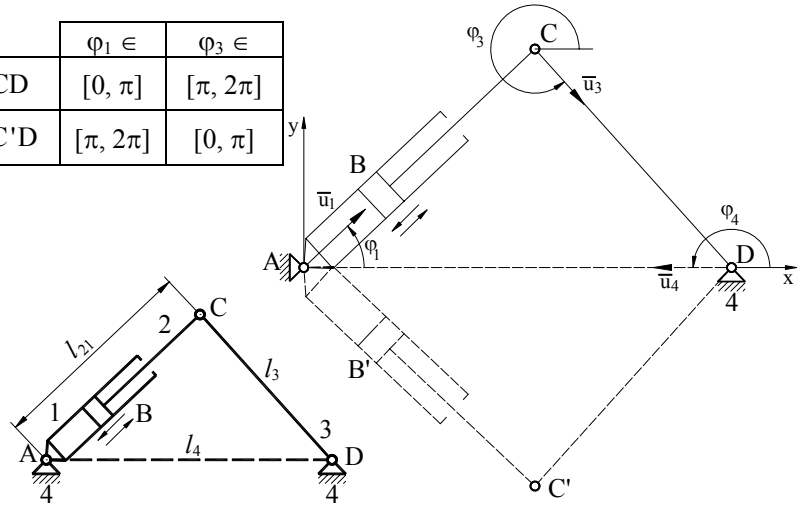
Soluțiile pentru $\varphi_1 \in [0, 2\pi]$ şi $\varphi_3 \in [0, 2\pi]$ sunt în corespondență cu cele două poziții ABCD şi AB'C'D ale mecanismului aşa cum se arată în tabelul din Fig.2.16.

În **problema vitezelor** se determină ω_1 şi ω_3 care au expresiile

$$\omega_1 = \frac{d\varphi_1}{dt} = \frac{d\varphi_1}{dl_{21}} \cdot \frac{dl_{21}}{dt} = \frac{d\varphi_1}{dl_{21}} \cdot v_{21}$$

$$\omega_3 = \frac{d\varphi_3}{dl_{21}} \cdot v_{21}$$

	$\varphi_1 \in$	$\varphi_3 \in$
ABCD	[0, π]	[π, 2π]
AB'C'D	[π, 2π]	[0, π]



a) ***b)***

Fig. 2.16

Pentru a determina funcțiile de transmitere de ordinul unu $\frac{d\varphi_1}{dl_{21}}$ şi $\frac{d\varphi_3}{dl_{21}}$, se derivează ecuația de închidere (2.43) în raport cu parametrul cuplei conducătoare l_{21}

$$\bar{e}_1 l_{21} \frac{d\varphi_1}{dl_{21}} + \bar{u}_1 + \bar{e}_3 l_3 \frac{d\varphi_3}{dl_{21}} = 0 / \cdot \bar{u}_3 / \cdot \bar{u}_1 \qquad (2.44)$$

Înmulțind scalar, succesiv, cu $\bar{u}_3$ şi $\bar{u}_1$ se obține

$$\frac{d\varphi_1}{dl_{21}} = \frac{1}{l_{21} tg(\varphi_1 - \varphi_3)}$$

$$\frac{d\varphi_3}{dl_{21}} = \frac{1}{l_3 \sin(\varphi_3 - \varphi_1)}.$$

Problema accelerațiilor urmăreşte determinarea parametrilor ε_1 şi ε_3 care se exprimă astfel

$$\varepsilon_1 = \frac{d^2\varphi_1}{dl_{21}^2} \cdot v_{21}^2 + \frac{d\varphi_1}{dl_{21}} \cdot a_{21}^r$$

$$\varepsilon_3 = \frac{d^2\varphi_3}{dl_{21}^2} \cdot v_{21}^2 + \frac{d\varphi_3}{dl_{21}} \cdot a_{21}^r.$$

Pentru calculul funcțiilor de transmitere de ordinul doi se derivează ecuația (2.44) în raport cu l_{21}

$$-\overline{u}_1 l_{21}\left(\frac{d\varphi_1}{dl_{21}}\right)^2 + 2\overline{e}_1 \frac{d\varphi_1}{dl_{21}} + \overline{e}_1 l_{21} \frac{d^2\varphi_1}{dl_{21}^2} - \overline{u}_3 l_3 \left(\frac{d\varphi_3}{dl_{21}}\right)^2 + \overline{e}_3 l_3 \frac{d^2\varphi_3}{dl_{21}^2} = 0 / \cdot \overline{u}_3 / \cdot \overline{u}_1 \quad (2.45)$$

şi se înmulțeşte scalar, succesiv, cu $\overline{u}_3$ şi $\overline{u}_1$

$$\frac{d^2\varphi_1}{dl_{21}^2} = -\frac{l_{21}\left(\frac{d\varphi_1}{dl_{21}}\right)^2 \cos(\varphi_1 - \varphi_3) + 2\frac{d\varphi_1}{dl_{21}} \sin(\varphi_1 - \varphi_3) + l_3\left(\frac{d\varphi_3}{dl_{21}}\right)^2}{l_{21} \sin(\varphi_1 - \varphi_3)}$$

$$\frac{d^2\varphi_3}{dl_{21}^2} = -\frac{l_{21}\left(\frac{d\varphi_1}{dl_{21}}\right)^2 + l_3\left(\frac{d\varphi_3}{dl_{21}}\right)^2 \cos(\varphi_3 - \varphi_1)}{l_3 \sin(\varphi_3 - \varphi_1)}.$$

2.1.5. Metoda transformărilor de coordonate (matriceală)

2.1.5.1. Prezentare generală

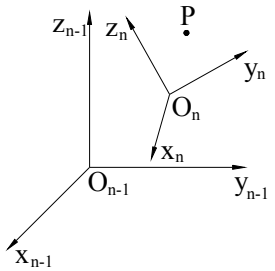


Fig. 2.17

Metoda, caracterizată printr-un model matematic cu exprimare matriceală, are un grad mare de generalitate şi poate fi aplicată atât pentru mecanismele plane, cât şi pentru cele spațiale; pentru mecanismele simple şi pentru cele complexe. În acelaşi timp, utilizarea metodei este însoțită de un formalism relativ complicat şi implică dificultăți de rezolvare a ecuațiilor matriceale, care reclamă metode

numerice specifice. În aceste condiţii, metoda transformărilor de coordonate se recomandă, cu precădere, acolo unde metodele mai simple nu dau satisfacţie. Un domeniu specific pentru această metodă este cel al mecanismelor spaţiale formate din lanţuri cinematice deschise utilizate în structura manipulatoarelor şi roboţilor.

Transformarea coordonatelor unui punct P dintr-un sistem **n** în alt sistem **n-1** (Fig.2.17) este descrisă de relaţiile

$$x_{n-1} = x_O + x_n \cos(x_{n-1}, x_n) + y_n \cos(x_{n-1}, y_n) + z_n \cos(x_{n-1}, z_n)$$
$$y_{n-1} = y_O + x_n \cos(y_{n-1}, x_n) + y_n \cos(y_{n-1}, y_n) + z_n \cos(y_{n-1}, z_n)$$
$$z_{n-1} = z_O + x_n \cos(z_{n-1}, x_n) + y_n \cos(z_{n-1}, y_n) + z_n \cos(z_{n-1}, z_n)$$

în care x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1} sunt coordonatele punctului P în raport cu sistemul **n-1**, x_n, y_n, z_n - coordonatele aceluiaşi punct în sistemul **n**, iar x_O, y_O, z_O - coordonatele originii **On** în raport cu sistemul **n-1**. Dacă la aceste ecuaţii se adaugă relaţia formală $t_{n-1} = t_n = 1$, transformarea de coordonate se poate scrie sub formă matriceală în felul următor

$$\mathbf{P}_{n-1} = \mathbf{A}_{n,n-1} \cdot \mathbf{P}_n \tag{2.46}$$

în care matricele $\mathbf{P}_{n-1}$, $\mathbf{P}_n$ şi $\mathbf{A}_{n,n-1}$ sunt

$$\mathbf{P}_{n-1} = \begin{vmatrix} 1 \\ x_{n-1} \\ y_{n-1} \\ z_{n-1} \end{vmatrix}; \mathbf{P}_n = \begin{vmatrix} 1 \\ x_n \\ y_n \\ z_n \end{vmatrix}; \mathbf{A}_{n,n-1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_O & \cos(x_{n-1}, x_n) & \cos(x_{n-1}, y_n) & \cos(x_{n-1}, z_n) \\ y_O & \cos(y_{n-1}, x_n) & \cos(y_{n-1}, y_n) & \cos(y_{n-1}, z_n) \\ z_O & \cos(z_{n-1}, x_n) & \cos(z_{n-1}, y_n) & \cos(z_{n-1}, z_n) \end{vmatrix}$$

Matricea de transformare $\mathbf{A}_{n,n-1}$ conţine 6 parametri independenţi, având în vedere că între cosinusurile directoare există 6 relaţii de legătură.

Să considerăm un lanţ cinematic simplu deschis şi să ataşăm elementelor sale un şir de sisteme de coordonate: 1, 2, ..., n. În acest caz se poate scrie un şir de relaţii de transformare de forma (2.46)

$$\mathbf{P}_1 = \mathbf{A}_{21} \cdot \mathbf{P}_2$$
$$\mathbf{P}_2 = \mathbf{A}_{32} \cdot \mathbf{P}_3$$
$$- - - - - - - - - -$$
$$\mathbf{P}_{n-1} = \mathbf{A}_{n,n-1} \cdot \mathbf{P}_n .$$

Prin înlocuiri succesive se ajunge la ecuaţia

$$\mathbf{P}_1 = \mathbf{A}_{21} \cdot \mathbf{A}_{32} \cdot \ldots\ldots \mathbf{A}_{n,n-1} \cdot \mathbf{P}_n . \tag{2.47}$$

Deoarece transformarea din sistemul **n** în sistemul **1** este definită prin relaţia

$$\mathbf{P}_1 = \mathbf{A}_{n1} \cdot \mathbf{P}_n ,$$

rezultă

$$\mathbf{A}_{n1} = \mathbf{A}_{21} \cdot \mathbf{A}_{32} \cdot \ldots\ldots \mathbf{A}_{n,n-1}.$$

În cazul unui lanț cinematic închis, când elementul 1 este identic cu elementul n, se scrie

$$\mathbf{P}_1 = \mathbf{A}_{21} \cdot \mathbf{A}_{32} \cdot \ldots\ldots \mathbf{A}_{1,n-1} \cdot \mathbf{P}_1 \ .$$

Transformarea unui sistem în el însuşi se face prin intermediul matricei unitate

$$\mathbf{P}_1 = \mathbf{E} \cdot \mathbf{P}_1$$

unde **E** (matricea unitate) are forma

$$\mathbf{E} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

În aceste condiții rezultă relația

$$\mathbf{A}_{21} \cdot \mathbf{A}_{32} \cdot \ldots\ldots \mathbf{A}_{1,n-1} = \mathbf{E} \qquad (2.48)$$

care reprezintă ecuația matriceală de închidere a conturului.

În cazul mecanismelor formate din lanțuri cinematice închise, ecuațiile matriceale scrise separat, pentru fiecare contur, reprezintă modelul matematic pentru rezolvarea **problemei pozițiilor**. Matricele de transformare care intervin în ecuații conțin atât parametri constructivi cunoscuți, cât şi parametri care indică pozițiile relative dintre elemente şi care sunt necunoscutele problemei. Amplasarea convenabilă a sistemelor de coordonate este foarte importantă pentru simplificarea rezolvărilor. În cazul mecanismelor care au cuple caracterizate prin axe geometrice (de rotație, de translație, cilindrice) se recomandă formalismul Denavit - Hartenberg [8, 18] care are reguli precise de poziționare a sistemelor, iar matricele de transformare conțin numai 4 parametri independenți. Ecuațiile de închidere sunt neliniare în raport cu necunoscutele unghiulare, iar rezolvarea lor se face numai prin metode numerice. Pentru determinarea **vitezelor** şi **a accelerațiilor** se derivează ecuațiile de închidere în raport cu parametrul cuplei conducătoare rezultând ecuații matriceale în care necunoscutele sunt funcții de transmitere.

2.1.5.2. Analiza cinematică a unui mecanism de robot

Mecanismele roboților industriali sunt formate, de regulă, din lanțuri cinematice spațiale deschise care conțin numai cuple de rotație şi de translație ($k = 5$). Aşa cum am arătat (par. 1.2.2.3) mecanismele de acest fel au $M = c_5$, deci toate cuplele sunt conducătoare. Roboții deplasează un punct (element) caracteristic după un program prestabilit într-un spațiu de lucru determinat. Analiza cinematică a mecanismelor pentru roboți este de două tipuri:

1) **Analiza cinematică directă,** care constă în determinarea mişcării (poziţiei) punctului (elementului) caracteristic în funcţie de poziţiile (mişcările) relative, cunoscute, din cuplele conducătoare;

2) **Analiza cinematică inversă,** atunci când se impune poziţia (mişcarea) punctului (elementului) caracteristic şi se determină legile de mişcare pentru fiecare motor.

Să considerăm, pentru exemplificare, mecanismul unui robot (Fig.2.18) având trei elemente mobile şi trei cuple - două de rotaţie (A, B) şi una de translaţie (C). Gradul de mobilitate este, evident, M = 3. Punctul caracteristic aparţine elementului final 4. Pentru a efectua analiza cinematică, se asociază fiecărui element câte un sistem de axe de coordonate ca în Fig.2.18. Matricele de transformare pentru perechile de elemente alăturate au următoarele expresii, rezultate prin particularizarea matricei $\mathbf{A}_{n,n-1}$

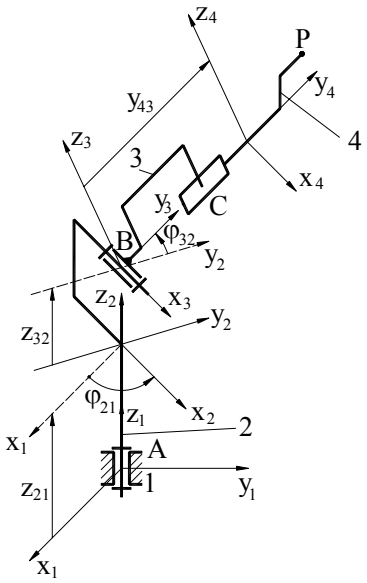


Fig. 2.18

$$\mathbf{A}_{21} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi_{21} & -\sin\varphi_{21} & 0 \\ 0 & \sin\varphi_{21} & \cos\varphi_{21} & 0 \\ z_{21} & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix};$$

$$\mathbf{A}_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\varphi_{32} & -\sin\varphi_{32} \\ z_{32} & 0 & \sin\varphi_{32} & \cos\varphi_{32} \end{vmatrix};$$

$$\mathbf{A}_{43} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ y_{P3} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Pentru a efectua analiza cinematică directă se foloseşte ecuaţia (2.47) cu n = 4

$$\mathbf{P}_1 = \mathbf{A}_{21} \cdot \mathbf{A}_{32} \cdot \mathbf{A}_{43} \cdot \mathbf{P}_4$$

în care $\mathbf{P}_1$ şi $\mathbf{P}_4$ sunt matricele de poziţie ale punctului P în raport cu sistemele 1 şi 4

$$\mathbf{P}_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ x_{P1} \\ y_{P1} \\ z_{P1} \end{vmatrix}; \mathbf{P}_4 = \begin{vmatrix} 1 \\ x_{P4} \\ y_{P4} \\ z_{P4} \end{vmatrix}.$$

Matricea $\mathbf{P}_4$ şi matricele de transformare sunt cunoscute, astfel încât determinarea matricei $\mathbf{P}_1$ se face cu uşurinţă, printr-o simplă înmulţire de matrice. În matricele de transformare intervin parametrii z_{21}, z_{32} - constante constructive şi φ_{21}, φ_{32}, y_{43} - variabilele cuplelor A, B şi C.

Analiza cinematică inversă utilizează aceeaşi relaţie matriceală (2.47). În acest caz se cunosc matricele $\mathbf{P}_1$ şi $\mathbf{P}_4$, iar necunoscutele sunt variabilele cuplelor φ_{21}, φ_{32}, y_{43}. Rezolvarea reclamă utilizarea unei metode numerice. Analiza cinematică inversă este necesară pentru elaborarea programului de comandă a robotului prin care se stabilesc legile de mişcare pentru fiecare cuplă cinematică.

2.1.6. Metoda funcţiilor de transmitere

Noţiunea de funcţie de transmitere se întâlneşte şi în prezentările anterioare dar, din motivele unei expuneri sistematice, vom relua definirea acestor funcţii. Să considerăm un mecanism cu $M = 1$. Prin rezolvarea **problemei poziţiilor** se stabileşte o corespondenţă între diverşi parametri de poziţie ai elementelor şi variabila independentă a cuplei conducătoare, φ_1. Astfel, vectorul de poziţie al unui punct oarecare P, $\overline{r}_P(x_P, y_P)$ sau unghiul de poziţie al unui element oarecare k, φ_k se pot scrie

$$\begin{aligned} \overline{r}_P &= \overline{r}_P(\varphi_1) \\ x_P &= x_P(\varphi_1) \\ y_P &= y_P(\varphi_1) \\ \varphi_k &= \varphi_k(\varphi_1). \end{aligned} \tag{2.49}$$

Funcţiile $\overline{r}_P(\varphi_1)$, $x_P(\varphi_1)$, $y_P(\varphi_1)$, $\varphi_k(\varphi_1)$ se numesc **funcţii de transmitere de ordinul zero**. Aceste funcţii se pot defini şi sub formă implicită

$$F(\varphi_1, \varphi_k) = 0. \tag{2.50}$$

Vitezele $\overline{v}_P(v_{Px}, v_{Py})$, ω_k şi **acceleraţiile** $\overline{a}_P(a_{Px}, a_{Py})$, ε_k rezultă prin derivarea parametrilor de poziţie în raport cu timpul, prin intermediul parametrului φ_1

$$\overline{v}_P = \frac{d\overline{r}_P}{dt} = \frac{d\overline{r}_P}{d\varphi_1} \cdot \omega_1$$

$$v_{Px} = \frac{dx_P}{d\varphi_1} \cdot \omega_1$$

$$v_{Py} = \frac{dy_P}{d\varphi_1} \cdot \omega_1 \tag{2.51}$$

$$\omega_k = \frac{d\varphi_k}{d\varphi_1} \cdot \omega_1$$

$$\overline{a}_P = \frac{d^2\overline{r}_P}{d\varphi_1^2} \cdot \omega_1^2 + \frac{d\overline{r}_P}{d\varphi_1} \cdot \varepsilon_1$$

$$a_{Px} = \frac{d^2x_P}{d\varphi_1^2} \cdot \omega_1^2 + \frac{dx_P}{d\varphi_1} \cdot \varepsilon_1 \tag{2.52}$$

$$a_{Py} = \frac{d^2y_P}{d\varphi_1^2} \cdot \omega_1^2 + \frac{dy_P}{d\varphi_1} \cdot \varepsilon_1$$

$$\varepsilon_k = \frac{d^2\varphi_k}{d\varphi_1^2} \cdot \omega_1^2 + \frac{d\varphi_k}{d\varphi_1} \cdot \varepsilon_1$$

Derivatele de ordinul unu ale funcțiilor de transmitere de ordin zero, în raport cu φ_1: $\frac{d\overline{r}_P}{d\varphi_1}$, $\frac{dx_P}{d\varphi_1}$, $\frac{dy_P}{d\varphi_1}$, $\frac{d\varphi_k}{d\varphi_1}$ se numesc **funcții de transmitere de ordinul unu**, iar derivatele de ordinul doi: $\frac{d^2\overline{r}_P}{d\varphi_1^2}$, $\frac{d^2x_P}{d\varphi_1^2}$, $\frac{d^2y_P}{d\varphi_1^2}$, $\frac{d^2\varphi_k}{d\varphi_1^2}$ se numesc **funcții de transmitere de ordinul doi**. Din formulele (2.51) şi (2.52) se observă că vitezele şi accelerațiile sunt egale cu funcțiile de transmitere dacă $\omega_1 = 1$ şi $\varepsilon_1 = 0$. Dacă funcțiile de transmitere de ordinul zero sunt implicite (2.50), funcțiile de transmitere de ordinul unu şi doi se calculează astfel

$$\frac{d\varphi_k}{d\varphi_1} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial \varphi_1}}{\dfrac{\partial F}{\partial \varphi_k}} \tag{2.53}$$

$$\frac{d^2\varphi_k}{d\varphi_1^2} = -\frac{\dfrac{\partial^2 F}{\partial \varphi_1^2}\left(\dfrac{\partial F}{\partial \varphi_k}\right)^2 - 2\dfrac{\partial^2 F}{\partial \varphi_1 \partial \varphi_k} \cdot \dfrac{\partial F}{\partial \varphi_1} \cdot \dfrac{\partial F}{\partial \varphi_k} + \dfrac{\partial^2 F}{\partial \varphi_k^2}\left(\dfrac{\partial F}{\partial \varphi_1}\right)^2}{\left(\dfrac{\partial F}{\partial \varphi_k}\right)^3} \tag{2.54}$$

Trebuie menţionat că în structura funcţiilor de transmitere (indiferent de ordin) intervin parametrii constructivi ai mecanismului şi o singură variabilă - parametrul cuplei conducătoare φ_1.

Din cele arătate rezultă că pentru calculul vitezelor şi al acceleraţiilor (2.51, 2.52) este necesar să se determine funcţiile de transmitere de ordinul unu şi doi prin derivarea funcţiilor de transmitere de ordinul zero. Această operaţie se poate efectua pe cale analitică numai atunci când funcţiile de transmitere de ordinul zero se cunosc sub formă analitică şi sunt relativ simple. Însă, în majoritatea cazurilor, chiar la mecanismele cele mai simple (mecanismul patrulater articulat plan (par. 2.1.4.2), mecanismul manivelă - piston (par. 2.1.4.3), funcţiile de transmitere de ordinul zero reprezintă rezultatul unui procedeu de calcul format din mai mulţi paşi, având uneori caracter iterativ. În această situaţie funcţiile de transmitere de ordinul zero, fie se exprimă prin relaţii extrem de complicate, fie nu se pot exprima sub formă analitică. Utilizarea calculului automat permite, însă, determinarea acestor funcţii prin valori discrete cu o densitate remarcabilă a punctelor. În aceste condiţii, determinarea funcţiilor de transmitere de ordinul unu şi doi se poate efectua prin derivare numerică, folosind programe utilitare specializate (MATHCAD, MATLAB, etc.). Funcţiile obţinute se exprimă, de asemenea, prin valori discrete, calculabile pentru orice valoare a variabilei φ_1. Metoda este un instrument util de calcul al vitezelor şi al acceleraţiilor şi se poate asocia cu orice metodă de determinare a poziţiilor. Funcţiile de transmitere de ordinul zero se pot determina chiar prin măsurători pe desen, pe mecanismul real sau pe un model al acestuia.

Menţionăm că înaintea perioadei moderne de dezvoltare a tehnicii de calcul s-a practicat derivarea grafică, având dezavantajul unui nivel de precizie foarte scăzut, în special la a doua derivare. În varianta menţionată metoda operează cu graficele celor trei funcţii şi este cunoscută sub denumirea **metoda diagramelor cinematice**.

2.1.7. Procedee indirecte de analiză cinematică

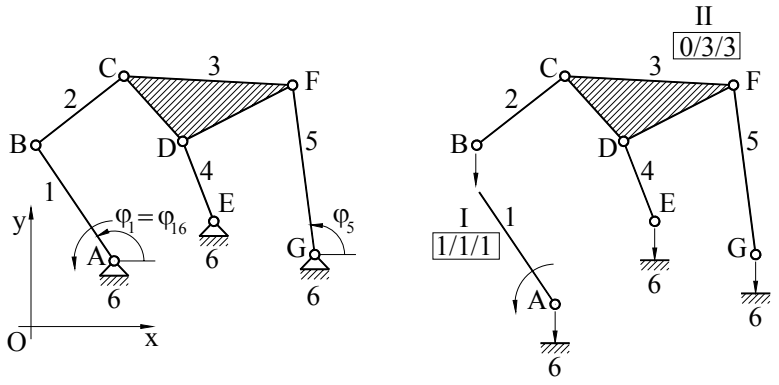
Din metodele prezentate anterior (par. 2.1.2, 2.1.3, 2.1.4) rezultă că operaţia de analiză cinematică este cu atât mai complexă cu cât mecanismul este de clasă mai mare (clasa mecanismului este egală cu clasa maximă a grupelor componente). Astfel, mecanismele de clasa a 2-a se pretează la rezolvări analitice directe, pe când mecanismele care conţin grupe 0/3/3 sau 0/4/2 reclamă procedee mai complicate cu rezolvare numerică iterativă. Pe de altă parte, structura mecanismelor care provin din acelaşi lanţ cinematic închis, depinde, din punct de vedere al grupelor componente, de alegerea bazei şi a cuplei conducătoare. Prin urmare, odată cu schimbarea bazei şi a cuplei conducătoare,

se poate ajunge la o simplificare a analizei cinematice, dacă, prin aceasta, se reduce clasa mecanismului. În general se urmăreşte obţinerea unor mecanisme de clasa a 2-a. Pentru a exploata această idee este necesar să se stabilească legătura dintre starea cinematică a mecanismului obţinut prin aceste transformări şi cea a mecanismului iniţial.

2.1.7.1. Procedeul schimbării cuplei conducătoare

Pentru concretizarea problemei se consideră mecanismul din Fig.2.19.a, care provine dintr-un lanţ cinematic Stephenson, având $M = 1$. Cupla conducătoare este A (elementul conducător 1), iar parametrul independent este unghiul $\varphi_1 = \varphi_{16}$. Să presupunem că ne interesează starea cinematică a elementului condus 5. Prin rezolvarea problemei poziţiilor trebuie să se determine funcţia de transmitere de ordinul zero

$$\varphi_5 = \varphi_5(\varphi_1)$$



a) *b)*

Fig. 2.19

Aşa cum rezultă din Fig.2.19.b, mecanismul conţine o grupă 0/3/3 care complică mult rezolvarea poziţiilor. Dacă schimbăm cupla conducătoare A cu E (Fig.2.20), mecanismul devine de clasa a 2-a. În această ipoteză parametrul independent este unghiul $\varphi_4 = \varphi_{46}$. Aplicând, pentru mecanismul transformat, o metodă cunoscută (de exemplu metoda intersecţiilor locurilor geometrice (par. 2.1.2) se determină funcţiile de transmitere

$$\varphi_1 = \varphi_1(\varphi_4)$$
$$\varphi_5 = \varphi_5(\varphi_4). \qquad (2.55)$$

Din funcţia $\varphi_1 = \varphi_1(\varphi_4)$ se poate determina funcţia inversă $\varphi_4 = \varphi_4(\varphi_1)$ prin rezolvarea ecuaţiei

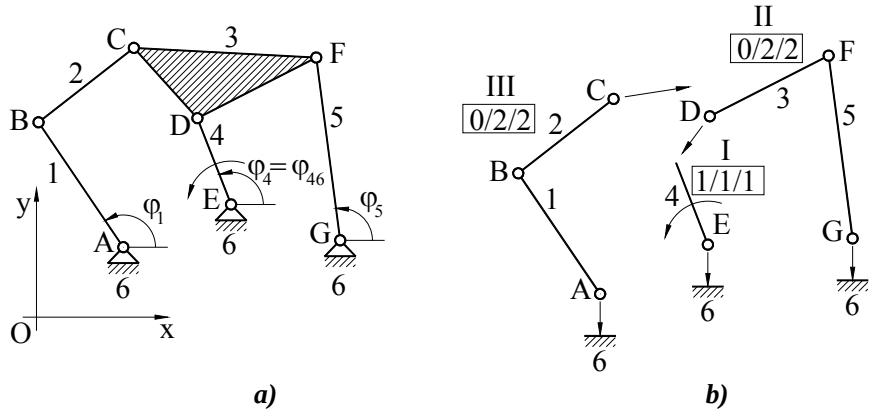


Fig. 2.20

$$\varphi_1 - \varphi_1(\varphi_4) = 0$$

cu necunoscuta φ_4. Trebuie să avem în vedere că funcția $\varphi_1(\varphi_4)$ nu este cunoscută analitic (ca o formulă), ci este rezultatul unui proces, prin care, pentru orice valoare a lui φ_4 se obține o valoare pentru φ_1. De aceea, rezolvarea ecuației se face numeric, dar fără dificultăți, utilizând programe utilitare de matematică (MATHCAD, MATLAB, etc.). Având la dispoziție funcția $\varphi_4(\varphi_1)$ se obține, cu uşurință, funcția $\varphi_5(\varphi_1)$ înlocuind pe $\varphi_4(\varphi_1)$ în relația (2.55)

$$\varphi_5 = \varphi_5(\varphi_4(\varphi_1)) \tag{2.56}$$

Pentru analiza vitezelor şi a accelerațiilor, care implică determinarea funcțiilor de transmitere de ordinul unu şi doi, se poate proceda în două moduri:

1) Se aplică metoda funcțiilor de transmitere derivând numeric funcția $\varphi_5(\varphi_1)$. În felul acesta se obțin $\frac{d\varphi_5}{d\varphi_1}$ şi $\frac{d^2\varphi_5}{d\varphi_1^2}$ care permit calculul vitezei ω_5 (2.51) şi accelerației unghiulare ε_5 (2.52).

2) Se determină funcțiile de transmitere specifice mecanismului transformat $\frac{d\varphi_1}{d\varphi_4}, \frac{d^2\varphi_1}{d\varphi_4^2}, \frac{d\varphi_5}{d\varphi_4}, \frac{d^2\varphi_5}{d\varphi_4^2}$ aplicând o metodă cunoscută, iar apoi funcțiile de transmitere ale mecanismului inițial se calculează astfel

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_5}{d\varphi_1} &= \frac{d\varphi_5}{d\varphi_4} \cdot \frac{d\varphi_4}{d\varphi_1} \\ \frac{d^2\varphi_5}{d\varphi_1^2} &= \frac{d^2\varphi_5}{d\varphi_4^2}\left(\frac{d\varphi_4}{d\varphi_1}\right)^2 + \frac{d^2\varphi_4}{d\varphi_1^2} \cdot \frac{d\varphi_5}{d\varphi_4} \end{aligned} \tag{2.57}$$

În final, derivatele $\frac{d\varphi_4}{d\varphi_1}$ şi $\frac{d^2\varphi_4}{d\varphi_1^2}$ care apar în aceste relații, se determină având în vedere că funcția $\varphi_4(\varphi_1)$ este inversa funcției $\varphi_1(\varphi_4)$,

$$\frac{d\varphi_4}{d\varphi_1} = \frac{1}{\frac{d\varphi_1}{d\varphi_4}}$$

$$\frac{d^2\varphi_4}{d\varphi_1^2} = -\frac{\frac{d^2\varphi_1}{d\varphi_4^2}}{\left(\frac{d\varphi_1}{d\varphi_4}\right)^3} \qquad (2.58)$$

2.1.7.2. Procedeul schimbării bazei

Să considerăm mecanismul din Fig.2.21.a care provine dintr-un lanț cinematic Stephenson (M = 1) şi conține o grupă structurală 0/4/2 (Fig.2.21.b). Dacă încercăm să simplificăm analiza cinematică prin schimbarea cuplei

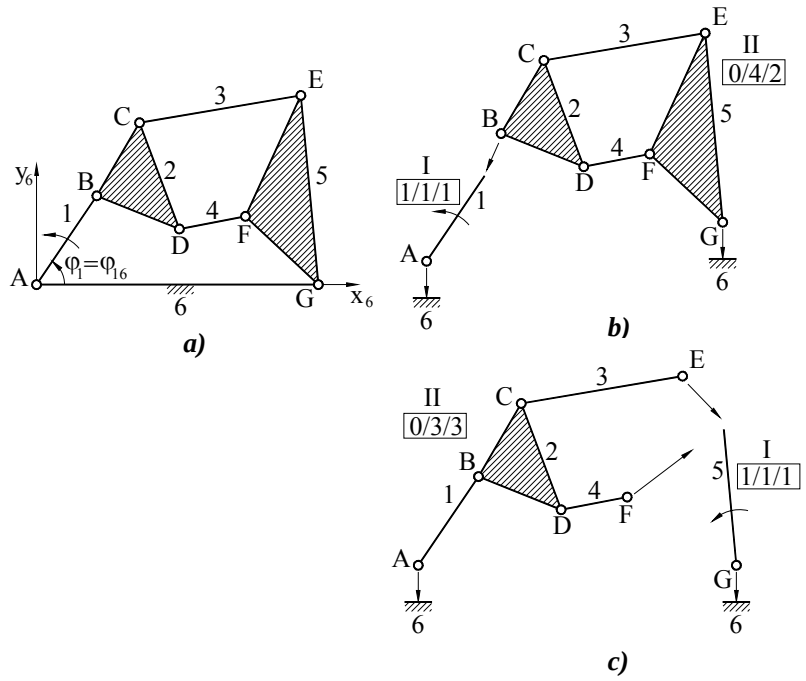
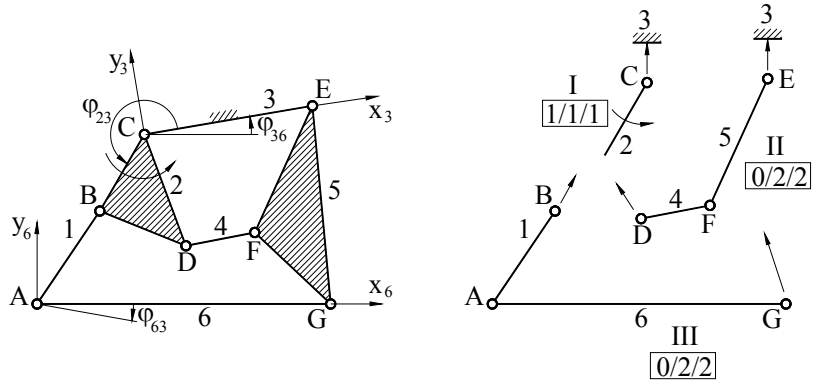


Fig. 2.21

conducătoare A cu G (Fig.2.21.c), mecanismul obținut astfel conține o grupă 0/3/3 care implică dificultăți similare cu 0/4/2. Pentru a obține un mecanism de clasa a 2-a, trebuie să schimbăm atât baza cât şi cupla conducătoare, aşa cum se observă în Fig.2.22. În mecanismul inițial (Fig.2.21.a) deplasările elementelor se raportează la sistemul Ax_6y_6 solitar cu baza 6, iar parametrul independent este unghiul $\varphi_1 = \varphi_{16}$. În mecanismul transformat (Fig.2.22.a) sistemul de referință este Cx_3y_3 solidar cu baza 3, iar parametrul independent este unghiul φ_{23} din cupla C.



a) ***b)***

Fig. 2.22

Din analiza pozițiilor, aplicată mecanismului transformat, rezultă funcția de transmitere de ordinul zero $\varphi_{16} = \varphi_{13}(\varphi_{23}) - \varphi_{63}(\varphi_{23}) = \varphi_1(\varphi_{23})$. Folosind un procedeu numeric, bazat pe rezolvarea ecuației

$$\varphi_1 - \varphi_1(\varphi_{23}) = 0$$

în necunoscuta φ_{23}, rezultă funcția inversă

$$\varphi_{23} = \varphi_{23}(\varphi_1) \tag{2.59}$$

Ne propunem sa determinăm, în continuare, poziția sistemului Cx_3y_3 în raport cu sisetmul Ax_6y_6. Din analiza mecanismului transformat se determină $\varphi_{63} = \varphi_{63}(\varphi_{23})$, $x_A = x_A(\varphi_{23})$, $y_A = y_A(\varphi_{23})$. Prin înlocuirea variabilei φ_{23} cu φ_1 conform relației (2.59) se obține

$$\begin{aligned} \varphi_{36} &= -\varphi_{63}(\varphi_{23}(\varphi_1)) = \varphi_{36}(\varphi_1) \\ x_{3A} &= x_{3A}(\varphi_{23}(\varphi_1)) = x_{3A}(\varphi_1) \\ y_{3A} &= y_{3A}(\varphi_{23}(\varphi_1)) = y_{3A}(\varphi_1) \end{aligned} \tag{2.60}$$

Se aplică transformarea de coordonate, pentru punctul C, din sistemul Ax_6y_6 în sistemul Cx_3y_3

$$x_{3C} = x_{3A} + x_{6C}\cos\varphi_{63} - y_{6C}\sin\varphi_{63}$$
$$y_{3C} = y_{3A} + x_{6C}\sin\varphi_{63} + y_{6C}\cos\varphi_{63}$$

Având în vedere că $x_{3C} = 0$, $y_{3C} = 0$ şi $\varphi_{36} = -\varphi_{63}$, din acest sistem se determină x_{6C} şi y_{6C}

$$\begin{aligned} x_{6C}(\varphi_1) &= -x_{3A}\cos\varphi_{36} + y_{3A}\sin\varphi_{36} \\ y_{6C}(\varphi_1) &= -x_{3A}\sin\varphi_{36} - y_{3A}\cos\varphi_{36} \end{aligned} \tag{2.61}$$

Cu aceste date se determină, acum, poziția unui punct oarecare P, aparținând unui element al mecanismului, operând o transformare de coordonate din sistemul Cx_3y_3 în sistemul Ax_6y_6

$$\begin{aligned} x_P(\varphi_1) &= x_{6P} = x_{6C} + x_{3P}\cos\varphi_{36} - y_{3P}\sin\varphi_{36} \\ y_P(\varphi_1) &= y_{6P} = y_{6C} + x_{3P}\sin\varphi_{36} + y_{3P}\cos\varphi_{36} \end{aligned} \tag{2.62}$$

Coordonatele x_P şi y_P depind, întradevăr, de φ_1 pentru că x_{6C}, y_{6C} şi φ_{36} sunt funcții de φ_1 (2.60, 2.61), iar x_{3P} şi y_{3P} rezultă din analiza mecanismului transformat în funcție de φ_{23} care, la rândul său, depinde de φ_1 (2.59),

$$\begin{aligned} x_{3P} &= x_{3P}(\varphi_{23}(\varphi_1)) = x_{3P}(\varphi_1) \\ y_{3P} &= y_{3P}(\varphi_{23}(\varphi_1)) = y_{3P}(\varphi_1) \end{aligned} \tag{2.63}$$

Dacă interesează poziția unghiulară a unui element oarecare **k**, se scrie

$$\varphi_k(\varphi_1) = \varphi_{k6} = \varphi_{k3}(\varphi_{23}(\varphi_1)) + \varphi_{36}(\varphi_1) \tag{2.64}$$

După rezolvarea problemei pozițiilor, dezvoltarea calculelor, pentru determinarea vitezelor şi a accelerațiilor, se poate efectua, ca şi la procedeul precedent, pe două căi. Una dintre căi constă în aplicarea metodei funcțiilor de transmitere plecând de la funcțiile de transmitere de ordinul zero date de relațiile (2.62, 2.64). Cea de-a doua cale presupune derivarea analitică a funcțiilor $x_P(\varphi_1), y_P(\varphi_1)$ şi $\varphi_k(\varphi_1)$ pentru a obține vitezele $v_{Px}(\varphi_1), v_{Py}(\varphi_1)$ şi $\omega_k(\varphi_1)$ şi accelerațiile $a_{Px}(\varphi_1), a_{Py}(\varphi_1)$ şi $\varepsilon_k(\varphi_1)$. În expresiile rezultate intervin funcțiile de transmitere ale mecanismului transformat $\frac{dx_{3P}}{d\varphi_{23}}, \frac{dy_{3P}}{d\varphi_{23}}, \frac{d\varphi_k}{d\varphi_{23}}, \frac{d^2x_{3P}}{d\varphi_{23}^2}, \frac{d^2y_{3P}}{d\varphi_{23}^2}, \frac{d^2\varphi_k}{d\varphi_{23}^2}$, precum şi funcțiile $\frac{d\varphi_{23}}{d\varphi_1}$ şi $\frac{d^2\varphi_{23}}{d\varphi_1^2}$. Acestea se calculează cu formulele de derivare ale funcțiilor inverse

$$\frac{d\varphi_{23}}{d\varphi_1}=\frac{d\varphi_{23}}{d\varphi_{16}}=\frac{1}{\frac{d\varphi_{16}}{d\varphi_{23}}};\qquad \frac{d^2\varphi_{23}}{d\varphi_1^2}=\frac{d^2\varphi_{23}}{d\varphi_{16}^2}=\frac{-\frac{d^2\varphi_{16}}{d\varphi_{23}^2}}{\left(\frac{d\varphi_{16}}{d\varphi_{23}}\right)^3} \tag{2.65}$$

2.1.8. Mecanismul cardanic

Mecanismul cardanic (Fig.2.23) este un patrulater articulat sferic (par. 1.2.2.2) având următoarele unghiuri între axele de rotație $\sphericalangle AOB = \sphericalangle BOC = \sphericalangle COD = \frac{\pi}{2}$, $\sphericalangle AOD = \pi - \beta$, în care β este unghiul ascuțit dintre axele de rotație ale elementelor 1 şi 3. Mecanismul, purtând şi denumirea de cuplaj cardanic, serveşte la transmiterea mişcării de rotație între două elemente cu axe concurente (1 şi 3).

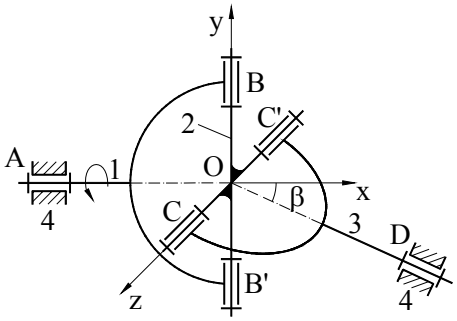


Fig. 2.23

Pentru a efectua **analiza poziţiilor** se consideră un sistem de coordonate fix cu planul Oxy amplasat în planul axelor de rotație A şi D (Fig.2.23). În Fig.2.24.a este reprezentată proiecția mecanismului pe planul Oxy, în care apar urmele planelor P_B şi P_C perpendiculare pe axele de rotație. În Fig.2.24.b este reprezentată proiecția pe

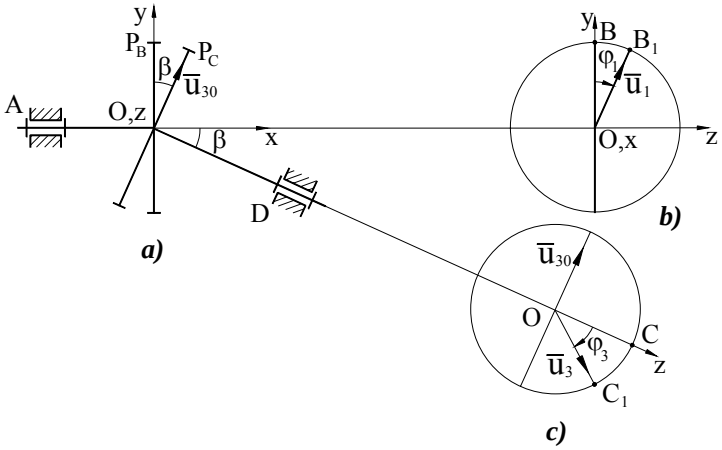


Fig. 2.24

planul P_B în care se roteşte braţul OB, iar în Fig.2.24.c proiecţia pe planul P_C în care se roteşte braţul OC. Considerând că poziţia iniţială a mecanismului este cea redată în Fig.2.23 (cu OB după axa Oy şi OC după axa Oz), să presupunem că elementul 1 se roteşte cu unghiul φ_1, braţul OB ajungând în poziţia OB_1 (Fig.2.24.b). În acelaşi timp, elementul 3 se roteşte cu unghiul φ_3, braţul OC ajungând în poziţia OC_1 (Fig.2.24.c). Considerăm versorii $\bar{u}_1$ şi $\bar{u}_3$ asociaţi direcţiilor OB_1 şi OC_1, precum şi versorul $\bar{u}_{30}$ asociat dreptei de intersecţie dintre planul Oxy şi P_C.

Se exprimă versorii $\bar{u}_1$ şi $\bar{u}_3$ în funcţie de versorii axelor de coordonate şi de $\bar{u}_{30}$.

$$\bar{u}_1 = \bar{j}\cos\varphi_1 + \bar{k}\sin\varphi_1$$

$$\bar{u}_3 = -\bar{u}_{30}\sin\varphi_3 + \bar{k}\cos\varphi_3$$

Versorul $\bar{u}_{30}$ are expresia

$$\bar{u}_{30} = \bar{i}\sin\beta + \bar{j}\cos\beta\,,$$

astfel că versorul $\bar{u}_3$ devine

$$\bar{u}_3 = -\bar{i}\sin\beta\sin\varphi_3 - \bar{j}\cos\beta\sin\varphi_3 + \bar{k}\cos\varphi_3\,.$$

Se scrie condiţia de perpendicularitate dintre braţele crucii cardanice $OB_1(\bar{u}_1)$ şi OC_1 $(\bar{u}_3)$

$$\bar{u}_1 \cdot \bar{u}_3 = -\cos\varphi_1\sin\varphi_3\cos\beta + \sin\varphi_1\cos\varphi_3 = 0\,,$$

de unde rezultă funcţia de transmitere de ordinul zero sub formă implicită

$$\mathrm{tg}\varphi_1 = \mathrm{tg}\varphi_3\cos\beta \tag{2.66}$$

sau explicită

$$\varphi_3 = \mathrm{arctg}\left(\frac{\mathrm{tg}\varphi_1}{\cos\beta}\right) \tag{2.67}$$

Pentru a determina viteza unghiulară

$$\omega_3 = \frac{d\varphi_3}{d\varphi_1}\cdot\omega_1$$

şi acceleraţia unghiulară

$$\varepsilon_3 = \frac{d^2\varphi_3}{d\varphi_1^2}\cdot\omega_1^2 + \frac{d\varphi_3}{d\varphi_1}\cdot\varepsilon_1$$

se calculează funcţiile de transmitere de ordinul unu şi doi prin derivarea funcţiei $\varphi_3(\varphi_1)$ (2.67).

$$\frac{d\varphi_3}{d\varphi_1} = \frac{\cos\beta}{\sin^2\varphi_1 + \cos^2\varphi_1 \cdot \cos^2\beta} \tag{2.68}$$

$$\frac{d^2\varphi_3}{d\varphi_1^2} = \frac{\sin(2\varphi_1)\cdot\cos\beta\cdot(\cos^2\beta - 1)}{(\sin^2\varphi_1 + \cos^2\varphi_1 \cdot \cos^2\beta)^2} \tag{2.69}$$

Pentru a caracteriza transmiterea mişcării de la elementul 1 la elementul 3 se foloseşte şi noţiunea de raport de transmitere i_{13}, definit ca raportul dintre viteza unghiulară a elementului conducător 1 şi viteza unghiulară a elementului condus 3.

$$i_{13} = \frac{\omega_1}{\omega_3} = \frac{1}{\frac{d\varphi_3}{d\varphi_1}} = \frac{\sin^2\varphi_1 + \cos^2\varphi_1 \cdot \cos^2\beta}{\cos\beta} \tag{2.70}$$

Funcţia $i_{13}(\varphi_1)$ este periodică şi are valorile extreme $\cos\beta$ şi $\frac{1}{\cos\beta}$, aşa cum rezultă din graficul reprezentat în Fig.2.25. Faptul că raportul de transmitere este variabil în raport cu φ_1 constituie un neajuns al acestui mecanism în legătură cu utilizarea sa cu rol de cuplaj. Dacă se leagă în serie două mecanisme cardanice se obţine, în anumite condiţii, un mecanism homocinetic - cu raport de transmitere constant, egal cu unitatea. În Fig.2.26 sunt reprezentate două mecanisme bicardanice care se bucură de această proprietate. Condiţiile de homocinetism, respectate de mecanismele din Fig.2.26 sunt:

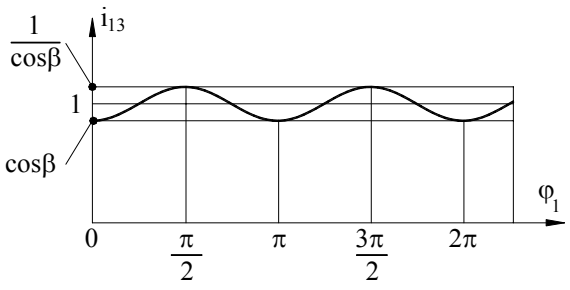


Fig. 2.25

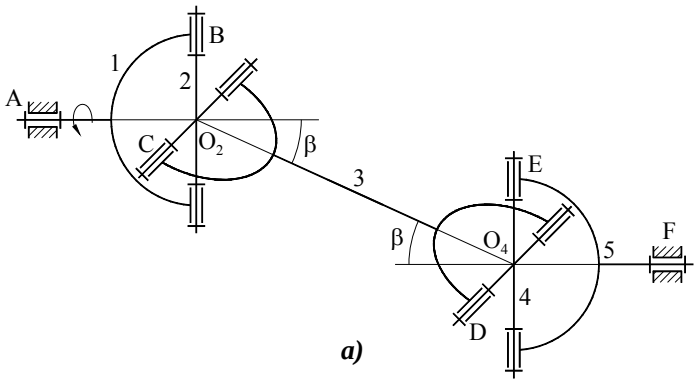
1) Unghiurile dintre axele de rotaţie fixe (similare cu β) trebuie să fie egale la ambele mecanisme componente;
2) Elementul intermediar 3 trebuie să aibă articulaţiile C şi D paralele.

Scriind funcţiile de transmitere (2.66) pentru fiecare mecanism component, se obţine

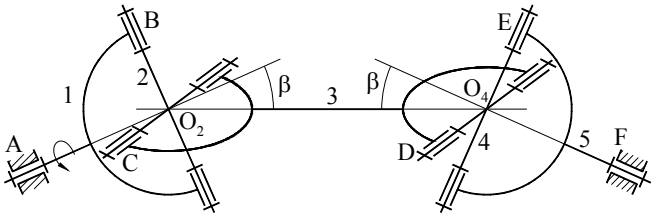
$$tg\varphi_1 = tg\varphi_3 \cdot \cos\beta$$

$$tg\varphi_5 = tg\varphi_3 \cdot \cos\beta$$

de unde rezultă $\varphi_1 = \varphi_5, \omega_1 = \omega_5$ şi $i_{15} = 1$. Se remarcă faptul că elementul 3 nu are nevoie de o articulaţie cu elementul fix, deoarece axa de rotaţie O_2O_4 are direcţia fixă pentru că punctele O_2 şi O_4 sunt imobile.



a)

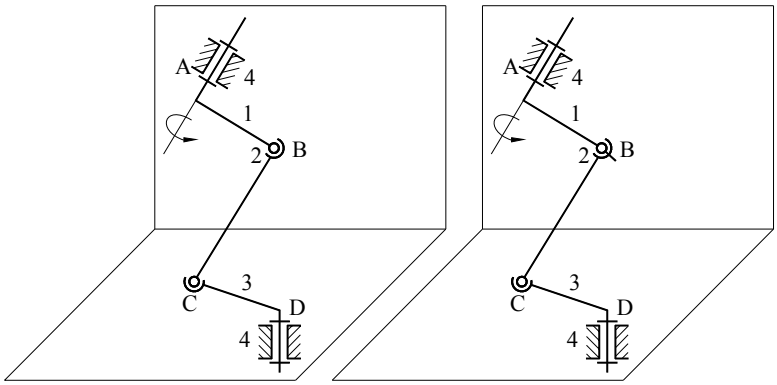


b)

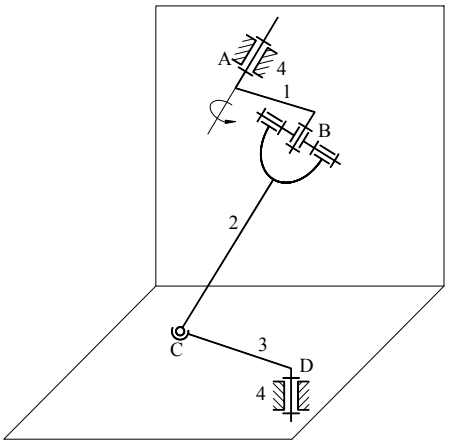
Fig. 2.26

2.1.9. Mecanismul patrulater articulat spaţial

Acest mecanism este de familia f = 0 şi se poate construi în mai multe variante în funcţie de tipul cuplelor bielei: cu două cuple sferice (Fig.2.27.a), cu o cuplă sferică şi o cuplă sferică cu deget (Fig.2.27.b) şi cu o cuplă sferică şi o articulaţie Hooke formată din două cuple de rotaţie cu axe perpendiculare (Fig. 2.27.c). Aşa cum am arătat (par. 1.2.3.1) prima variantă are un grad de mobilitate local concretizat prin rotaţia nedeterminată a bielei în jurul axei care uneşte cuplele sferice. Toate variantele realizează, însă, aceeaşi mişcare pentru elementul 3 care este, de regulă, elementul de execuţie al mecanismului. Unghiul dintre axele de rotaţie A şi D poate avea orice valoare, însă în



a) *b)*



c)

Fig. 2.27

aplicațiile practice ale mecanismului este $\frac{\pi}{2}$ (mecanism ortogonal). În cele ce urmează se prezintă analiza cinematică a mecanismului ortogonal RSSR (Fig. 2.27.a).

Parametrii de intrare:

1) $\mathbf{A(x_A, z_A)}$, $\mathbf{D(x_D, y_D)}$,
   $\mathbf{l_1 = AB}$, $\mathbf{l_2 = BC}$, $\mathbf{l_3 = CD}$
2) $\boldsymbol{\varphi_1}$, $\boldsymbol{\omega_1}$, $\boldsymbol{\varepsilon_1}$

▪ Problema pozițiilor

Se aplică metoda intersecției locurilor geometrice utilizând reprezentarea mecanismului prin proiecțiile pe două plane H (Oxy) şi V (Oyz) - Fig.2.28. Elementele 1 şi 3 se rotesc în aceste plane, iar biela 2 este reprezentată prin proiecțiile sale B_hC şi BC_v. Pentru a pune în evidență lungimea reală a bielei se rabate triunghiul BB_hC peste planul V. În acest scop se intersectează cercul cu centrul în B_h, de rază B_hC cu linia de pământ (Oy) obținând punctul C_O. Segmentul BC_O reprezintă lungimea reală a bielei.

Rezolvarea grafică a problemei pozițiilor este redată în Fig.2.29.a. Cunoscând poziția punctului A şi unghiul φ_1 se reprezintă elementul

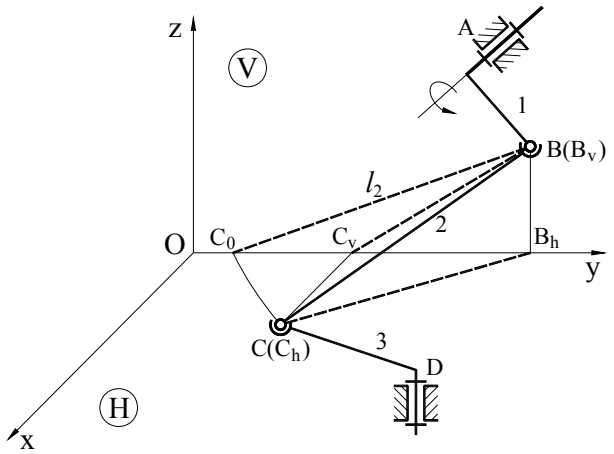


Fig. 2.28

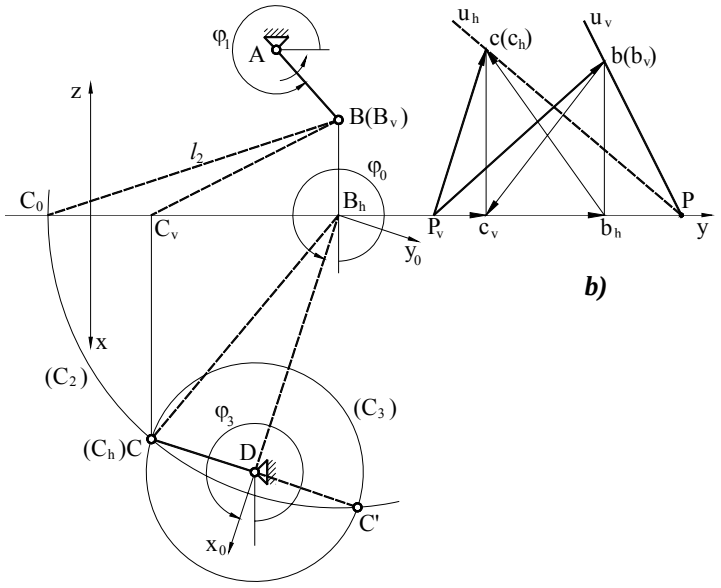


Fig. 2.29

conducător AB. Se intersectează, apoi, cercul cu centrul în B, de rază l_2, cu linia de pământ obținând punctul C_O. Se poziționează, în planul orizontal, punctul D. În continuare, se intersectează cercul (C_2) cu centrul în B_h, de rază B_hC_O cu

cercul (C_3) cu centrul în D, de rază l_3. Se obțin punctele de intersecție C şi C' care reprezintă cele două soluții ale problemei şi care conduc la pozițiile ABCD şi ABC'D. Adoptând una dintre soluții (de exemplu ABCD) se reprezintă elementul 3 (DC) şi biela BC prin proiecțiile sale.

Rezolvarea analitică presupune adoptarea unui sistem de axe de coordo-nate suplimentar $B_hx_0y_0$ poziționat ca în Fig.2.29.a. Se determină coordonatele punctului B

$$y_B = y_A + l_1 \cdot \cos\varphi_1$$
$$z_B = z_A + l_1 \cdot \sin\varphi_1$$

Se calculează proiecția orizontală a bielei $l_{2h}=B_hC$, distanța $l_0=B_hD$ şi unghiul φ_0 format de axa B_hx_0 cu axa Ox

$$l_{2h} = B_hC = B_hC_0 = \sqrt{l_2^2 - z_B^2}$$
$$l_0 = B_hD = \sqrt{x_D^2 + (y_B - y_D)^2}$$
$$tg\varphi_0 = \frac{y_D - y_B}{x_D}$$

Se scriu ecuațiile cercurilor (C_2) şi (C_3) - definite la procedeul grafic, în raport cu sistemul $B_hx_0y_0$

$$x_0^2 + y_0^2 = l_{2h}^2$$
$$(x_0 - l_0)^2 + y_0^2 = l_3^2$$

Soluțiile acestui sistem reprezintă coordonatele punctului C (C') în raport cu sistemul $B_hx_0y_0$

$$x_{0C} = \frac{l_{2h}^2 - l_3^2 + l_0^2}{2l_0}$$
$$y_{0C} = \pm\sqrt{l_{2h}^2 - x_0^2} \qquad (2.71)$$

În final, se calculează poziția punctului C în raport cu sistemul absolut, aplicând transformarea de coordonate din sistemul $B_hx_0y_0$ în sistemul Oxy,

$$x_C = x_{0C}\cos\varphi_0 - y_{0C}\sin\varphi_0$$
$$y_C = y_B + x_{0C}\sin\varphi_0 + y_{0C}\cos\varphi_0$$

şi unghiul φ_3

$$tg\varphi_3 = \frac{y_C - y_D}{x_C - x_D}$$

Observații

1) Problema are două soluții care se diferențiază prin semnele care intervin în relația (2.71). Semnul (+) este în corespondență cu poziția ABC'D, iar (-) cu poziția ABCD.

2) Condițiile de existență a unei soluții reale sunt

$$\left| l_3 - l_{2h} \right| \le l_0 \le l_3 + l_{2h} \tag{2.72}$$

3) Pozițiile critice corespund egalităților din relațiile (2.72)

$$\begin{aligned} &\left| l_3 - l_{2h} \right| = l_0 \\ &l_3 + l_{2h} = l_0 \end{aligned} \tag{2.73}$$

şi se înregistrează când punctele B_h, C, D sunt coliniare. Cu alte cuvinte, în pozițiile critice proiecția bielei pe planul elementului condus este coliniară cu acest element.

■ Problema vitezelor şi a accelerațiilor

Determinarea vitezelor şi a accelerațiilor se rezolvă prin metoda ecuațiilor vectoriale adaptată pentru mecanismele spațiale. Ca şi la mecanismele plane există un procedeu grafic şi unul analitic.

Ecuațiile vectoriale de viteze sunt

$$\begin{aligned} &\overline{v}_C = \overline{v}_{\mathbf{B}} + \overline{v}_{CB} \\ &\overline{v}_C = \overline{v}_D + \overline{v}_{CD} \end{aligned} \tag{2.74}$$

Pentru **rezolvarea grafică** se precizează caracteristicile cunoscute ale vectorilor din acest sistem

$\overline{v}_C \in H$ şi reprezintă necunoscuta problemei

$$\overline{v}_B \begin{cases} \left| v_B \right| = \left| \omega_1 \right| \cdot l_1 \\ \perp \text{ AB in planul V} \\ \text{se roteste } \overline{AB} \text{ cu } 90^0 \text{in sensul } \omega_1 \end{cases}$$

$\overline{v}_{CB} \perp$ BC, $\overline{v}_D = 0$, $\overline{v}_{CD} \perp$ DC în planul H.

Cu aceste date se construieşte un poligon de viteze spațial reprezentat prin proiecțiile sale (Fig.2.29.b).

În polul vitezelor $\mathbf{p_v}$, situat pe linia de pământ, se aplică vectorul $\overline{v}_B(\overline{p_v b}) \perp AB$, conținut în planul vertical, având proiecția orizontală $\overline{p_v b_h}$. Prin punctul **b** se duce un plan perpendicular pe bielă, care conține viteza $\overline{v}_{CB}$. Urma verticală U_v se trasează prin $b(b_v)$ perpendiculară pe proiecția verticală a bielei (BC_v). Această urmă intersectează linia de pământ în punctul P. Prin acest punct se trasează urma orizontală a planului U_h - perpendiculară pe proiecția orizontală a bielei (B_hC). Prin $\mathbf{p_v}$ se trasează suportul vitezei $\overline{v}_C$ având direcția

perpendiculară pe DC. Această dreaptă intersectează urma U_h în **c(c_h)**. Vectorul $\overline{p_v c}$ reprezintă $\overline{v}_C$ şi se află în planul orizontal, proiecţia verticală fiind $\overline{p_v c_v}$. Viteza relativă $\overline{v}_{CB}$ este amplasată în spaţiu şi are proiecţiile $\overline{b_h c}$ şi $\overline{bc_v}$. Cunoscând $\overline{v}_C$ se determină ω_3 ca mărime

$$|\omega_3| = \frac{|\overline{v_C}|}{l_3},$$

iar sensul este acelaşi cu sensul în care se roteşte $\overline{DC}$ pentru a se suprapune peste $\overline{v}_C(\overline{p_v c})$.

Pentru **rezolvarea analitică** se reia sistemul (2.74) din care rezultă

$$\overline{v}_D + \overline{v}_{CD} = \overline{v}_B + \overline{v}_{CB} \tag{2.75}$$

Vitezele care intervin în această ecuaţie se exprimă în funcţie de proiecţiile lor pe axele sistemului Oxyz.

$$\overline{v}_D = 0$$

$$\overline{v}_{CD} = \overline{\omega}_3 \times \overline{DC} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 0 & 0 & \omega_3 \\ x_C - x_D & y_C - y_D & 0 \end{vmatrix} = -\overline{i}\,\omega_3(y_C - y_D) + \overline{j}\,\omega_3(x_C - x_D)$$

$$\overline{v}_B = \overline{v}_{BA} = \overline{\omega}_1 \times \overline{AB} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \omega_1 & 0 & 0 \\ 0 & y_B - y_A & z_B - z_A \end{vmatrix} =$$

$$= -\overline{j}\,\omega_1(z_B - z_A) + \overline{k}\,\omega_1(y_B - y_A)$$

Pentru a deduce expresia analitică a vitezei $\overline{v}_{CB}$, viteza unghiulară $\overline{\omega}_2$ se consideră formată din două componente $\overline{\omega}_{2t} \perp BC$ şi $\overline{\omega}_{2n} // BC$. În această ipoteză se scrie:

$$\overline{v}_{CB} = \overline{\omega}_2 \times \overline{BC} = (\overline{\omega}_{2t} + \overline{\omega}_{2n}) \times \overline{BC} = \overline{\omega}_{2t} \times \overline{BC} + \overline{\omega}_{2n} \times \overline{BC}.$$

Deoarece $\overline{\omega}_{2n} // BC$, $\overline{\omega}_{2n} \times \overline{BC} = 0$, $\overline{v}_{CB}$ se exprimă astfel

$$\overline{v}_{CB} = \overline{\omega}_{2t} \times \overline{BC} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \omega_{2tx} & \omega_{2ty} & \omega_{2tz} \\ x_C & y_C - y_B & -z_B \end{vmatrix} = \overline{i}(\omega_{2ty}(-z_B) - \omega_{2tz}(y_C - y_B)) -$$

$$-\overline{j}(\omega_{2tx}(-z_B) - \omega_{2tz} \cdot x_C) + \overline{k}(\omega_{2tx}(y_C - y_B) - \omega_{2ty} \cdot x_C)$$

Aceste expresii se introduc în ecuația (2.75) care se proiectează pe axele sistemului de coordonate rezultând trei ecuații scalare. La acestea se adaugă condiția de perpendicularitate dintre $\overline{\omega}_{2t}$ şi $\overline{BC}$,

$$\overline{\omega}_{2t} \cdot \overline{BC} = \omega_{2tx} \cdot x_C + \omega_{2ty}(y_C - y_B) - \omega_{2tz} \cdot z_B = 0$$

În felul acesta se obține un sistem liniar format din 4 ecuații cu necunoscutele $\omega_3, \omega_{2tx}, \omega_{2ty}, \omega_{2tz}$,

$$\begin{vmatrix} y_C - y_D & 0 & -z_B & -(y_C - y_B) \\ -(x_C - x_D) & z_B & 0 & x_C \\ 0 & y_C - y_B & -x_C & 0 \\ 0 & x_C & y_C - y_B & -z_B \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \omega_3 \\ \omega_{2tx} \\ \omega_{2ty} \\ \omega_{2tz} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ \omega_1(z_B - z_A) \\ -\omega_1(y_B - y_A) \\ 0 \end{vmatrix}$$

Se observă că $\overline{\omega}_{2t}$ se poate determina, pe când $\overline{\omega}_{2n}$ este nedeterminat, reflectând mobilitatea locală a elementului 2 care are caracter arbitrar.

Parametrul care interesează, în primul rând, este ω_3, dar şi celelalte necunoscute trebuie calculate pentru că intervin în problema accelerațiilor.

În cadrul **problemei accelerațiilor**, pe care o vom trata numai **analitic**, se deduce sub o formă convenabilă, ecuația vectorială care exprimă relația dintre $\overline{a}_C$ şi $\overline{a}_B$. Pentru aceasta, se derivează în raport cu timpul prima ecuație (2.74) scrisă sub forma

$$\overline{v}_C = \overline{v}_B + \overline{\omega}_{2t} \times \overline{BC}$$

şi se obține

$$\overline{a}_C = \overline{a}_B + \overline{\omega}_{2t} \times (\overline{\omega}_{2t} \times \overline{BC}) + \dot{\overline{\omega}}_{2t} \times \overline{BC} \tag{2.76}$$

Dublul produs vectorial se dezvoltă astfel

$$\overline{\omega}_{2t} \times (\overline{\omega}_{2t} \times \overline{BC}) = \overline{\omega}_{2t}(\overline{\omega}_{2t} \cdot \overline{BC}) - \overline{\omega}_{2t}{}^2 \cdot \overline{BC} = -\overline{\omega}_{2t}{}^2 \cdot \overline{BC}$$

Pentru simplificare, se face notația $\dot{\overline{\omega}}_{2t} = \overline{e}_2$ şi se descompune acest vector în două componente $\overline{e}_{2t} \perp BC$ şi $\overline{e}_{2n} \,//\, BC$. În aceste condiții se poate scrie

$$\dot{\overline{\omega}}_{2t} \times \overline{BC} = \overline{e}_{2t} \times \overline{BC} = (\overline{e}_{2t} + \overline{e}_{2n}) \times \overline{BC} = \overline{e}_{2t} \times \overline{BC}.$$

Introducând aceste rezultate în ecuația (2.76) şi adăugând ecuația care exprimă relația dintre $\overline{a}_C$ şi $\overline{a}_D$ se obține sistemul

$$\begin{cases} \overline{a}_C = \overline{a}_B - \overline{\omega}_{2t}^2 \cdot \overline{BC} + \overline{e}_{2t} \times \overline{BC} \\ \overline{a}_C = \overline{a}_D + \overline{a}_{CD}^n + \overline{a}_{CD}^t \end{cases}$$

din care rezultă ecuația unică

$$\bar{a}_D + \bar{a}^n_{CD} + \bar{a}^t_{CD} = \bar{a}_B - \bar{\omega}^2_{2t} \cdot \overline{BC} + \bar{e}_{2t} \times \overline{BC} \tag{2.77}$$

Termenii care intervin în această ecuație au expresiile

$$\bar{a}_D = 0$$

$$\bar{a}^n_{CD} = -\bar{\omega}^2_3 \cdot \overline{DC} = -\bar{i}\ \omega^2_3(x_C - x_D) - \bar{j}\ \omega^2_3(y_C - y_D)$$

$$\bar{a}^t_{CD} = \bar{\varepsilon}_3 \times \overline{DC} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \\ x_C - x_D & y_C - y_D & 0 \end{vmatrix} = -\bar{i}\ \varepsilon_3(y_C - y_D) + \bar{j}\ \varepsilon_3(x_C - x_D)$$

$$\bar{a}_B = \bar{a}^n_{BA} = -\bar{\omega}^2_1 \cdot \overline{AB} = -\bar{j}\ \omega^2_1(y_B - y_A) - \bar{k}\ \omega^2_1(z_B - z_A)$$

$$\bar{\omega}^2_{2t} \cdot \overline{BC} = \bar{i}\ \omega^2_{2t} x_C + \bar{j}\ \omega^2_{2t}(y_C - y_B) - \bar{k}\ \omega^2_{2t} z_B$$

$$\omega_{2t} = \sqrt{\omega^2_{2tx} + \omega^2_{2ty} + \omega^2_{2tz}}$$

$$\bar{e}_{2t} \times \overline{BC} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ e_{2tx} & e_{2ty} & e_{2tz} \\ x_C & y_C - y_B & -z_B \end{vmatrix} = \bar{i}(e_{2ty}(-z_B) - e_{2tz}(y_C - y_B)) -$$

$$-\bar{j}(e_{2tx}(-z_B) - e_{2tz} \cdot x_C) + \bar{k}(e_{2tx}(y_C - y_B) - e_{2ty} \cdot x_C)$$

Aceste expresii se introduc în ecuația (2.77) care se proiectează pe axele de coordonate. Se adaugă condiția de perpendicularitate dintre $\bar{e}_{2t}$ şi $\overline{BC}$,

$$\bar{e}_{2t} \cdot \overline{BC} = e_{2tx} \cdot x_C + e_{2ty}(y_C - y_B) - e_{2tz} \cdot z_B = 0$$

şi se obține un sistem liniar format din 4 ecuații cu necunoscutele $\varepsilon_3, e_{2tx}, e_{2ty}, e_{2tz}$, care se scrie sub forma

$$\begin{vmatrix} y_C - y_D & 0 & -z_B & -(y_C - y_B) \\ -(x_C - x_D) & z_B & 0 & x_C \\ 0 & y_C - y_B & -x_C & 0 \\ 0 & x_C & y_C - y_B & -z_B \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \varepsilon_3 \\ e_{2tx} \\ e_{2ty} \\ e_{2tz} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\omega^2_3(x_C - x_D) + \omega^2_{2t} x_C \\ A \\ \omega^2_1(z_B - z_A) - \omega^2_{2t} z_B \\ 0 \end{vmatrix}$$

în care $A = -\omega^2_3(y_C - y_D) + \omega^2_1(y_B - y_A) + \omega^2_{2t}(y_C - y_B)$.

Prin rezolvarea sistemului se determină accelerația unghiulară a elementului condus ε_3.

2.1.10. Mecanismul manivelă - piston spațial

Mecanismul manivelă - piston spațial (Fig.2.30) se aseamănă cu patrulaterul articulat spațial deosebindu-se de acesta prin faptul că elementul condus 3 este legat de bază printr-o cuplă de translație. Operația de analiză cinematică este similară cu cea de la mecanismul patrulater, astfel încât nu sunt necesare explicații detaliate.

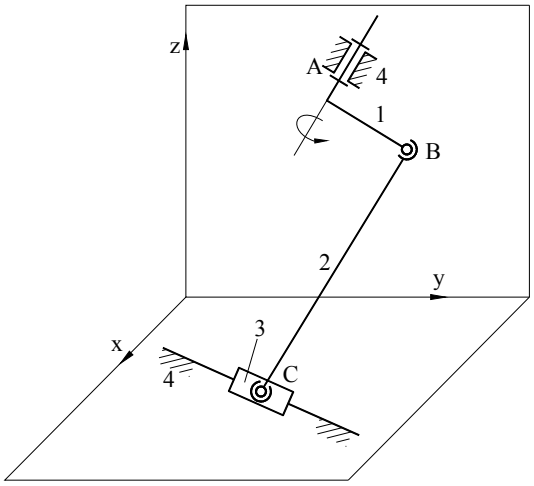


Fig. 2.30

Parametrii de intrare:

1) $\mathbf{A(y_A, z_A)}$, $\mathbf{(D_3)(P(x_P, y_P)}$, $\boldsymbol{\varphi_3}$**)**, $\mathbf{l_1 = AB}$, $\mathbf{l_2 = BC}$

2) $\boldsymbol{\varphi_1}$, $\boldsymbol{\omega_1}$, $\boldsymbol{\varepsilon_1}$

■ Problema pozițiilor

Rezolvarea grafică este arătată în Fig.2.31.a. Se reprezintă segmentul AB (cunoscând A, φ_1 şi l_1) şi dreapta (D_3) (cunoscând P şi φ_3). Se trasează, apoi, un cerc cu centrul în B, de rază l_2 care intersectează linia de pământ în C_0. Punctul C(C') se găseşte la intersecția cercurilor (C_2) cu centrul în B_h, de rază B_hC_0 cu dreapta (D_3).

Pentru **rezolvarea analitică** se adoptă un sistem de coordonate suplimentar $B_h x_0 y_0$ cu axa Bx_0 perpendiculară pe (D_3) în punctul D. Poziţiile punctelor B şi D se calculează astfel

$$y_B = y_A + l_1 \cos\varphi_1$$
$$z_B = z_A + l_1 \sin\varphi_1$$
$$x_D = \frac{m(y_B - y_P) + m^2 x_P}{1 + m^2}$$
$$y_D = \frac{-m x_P + m^2 y_B + y_P}{1 + m^2}$$

în care $m = \mathrm{tg}\varphi_3$.

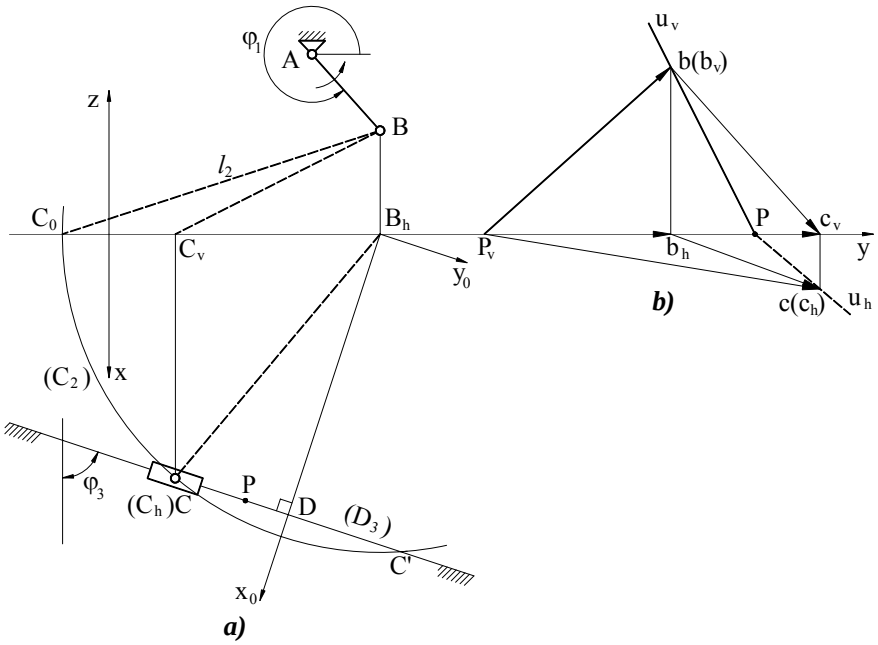


Fig. 2.31

În continuare se calculează $l_{2h} = B_h C$, $l_0 = B_h D$ şi φ_0 cu formulele utilizate la mecanismul patrulater spaţial,

$$l_{2h} = B_h C = B_h C_0 = \sqrt{l_2^2 - z_B^2}$$
$$l_0 = B_h D = \sqrt{x_D^2 + (y_B - y_D)^2}$$
$$\mathrm{tg}\varphi_0 = \frac{y_D - y_B}{x_D}.$$

Se scriu ecuațiile cercului (C_2) şi a dreptei (D_3) în raport cu sistemul $B_h x_0 y_0$

$$x_0^2 + y_0^2 = l_{2h}^2$$

$$x_0 = l_0$$

Soluțiile acestui sistem de ecuații reprezintă coordonatele punctului C(C') în raport cu reperul $B_h x_0 y_0$

$$x_{0C} = l_0$$

$$y_{0C} = \pm\sqrt{l_{2h}^2 - l_0^2} \qquad (2.78)$$

Poziția punctului C în raport cu sistemul absolut rezultă printr-o transformare de coordonate:

$$x_C = x_{0C}\cos\varphi_0 - y_{0C}\sin\varphi_0$$

$$y_C = y_B + x_{0C}\sin\varphi_0 + y_{0C}\cos\varphi_0$$

Observații

1) Problema are două soluții care se diferențiază prin semnele din formula (2.78). Semnul (+) este în corespondență cu poziția ABC', iar semnul (-) cu ABC.

2) Condiția de existență a unei soluții reale, dedusă din (2.78) este

$$l_{2h} \geq l_0 . \qquad (2.79)$$

3) Poziția critică a mecanismului, determinată de relația

$$l_{2h} = l_0 \qquad (2.80)$$

se înregistrează când proiecția orizontală a bielei este perpendiculară pe axa de translație (D_3).

▪ Problema vitezelor şi a accelerațiilor

În ecuația de **viteze**

$$\overline{v}_C = \overline{v}_B + \overline{v}_{CB} \qquad (2.81)$$

vectorii $\overline{v}_B$ şi $\overline{v}_{CB}$ au aceleaşi caracteristici ca şi la mecanismul patrulater, iar $\overline{v}_C \,//\, (D_3)$, astfel încât în **poligonul de viteze**, care se construieşte în acelaşi mod, $\overline{p_v c}$ se trasează paralel cu (D_3).

Pentru **tratarea analitică** expresiile vitezelor $\overline{v}_B$ şi $\overline{v}_{CB}$ sunt cele arătate la mecanismul patrulater, iar $\overline{v}_C$ este

$$\overline{v}_C = \overline{i}\, v_C \cos\varphi_3 + \overline{j}\, v_C \sin\varphi_3 .$$

Proiecțiile ecuației (2.81) pe axele de coordonate, împreună cu condiția de perpendicularitate dintre $\overline{\omega}_{2t}$ şi $\overline{BC}$, formează următorul sistem liniar cu necunoscutele $v_C, \omega_{2tx}, \omega_{2ty}, \omega_{2tz}$,

$$\begin{vmatrix} -\cos\varphi_3 & 0 & -z_B & -(y_C - y_B) \\ -\sin\varphi_3 & z_B & 0 & x_C \\ 0 & y_C - y_B & -x_C & 0 \\ 0 & x_C & y_C - y_B & -z_B \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} v_C \\ \omega_{2tx} \\ \omega_{2ty} \\ \omega_{2tz} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ \omega_1(z_B - z_A) \\ -\omega_1(y_B - y_A) \\ 0 \end{vmatrix}$$

Parametrul care interesează, în primul rând, este desigur $\overline{v}_C$.

În ecuația de **accelerații**

$$\overline{a}_C = \overline{a}_B - \overline{\omega}_{2t}^2 \cdot \overline{BC} + \overline{e}_{2t} \times \overline{BC} \tag{2.82}$$

termenii din membrul drept au aceleaşi expresii ca la mecanismul patrulater, iar $\overline{a}_C$ este

$$\overline{a}_C = \overline{i}\, a_C \cos\varphi_3 + \overline{j}\, a_C \sin\varphi_3 .$$

Se ajunge la sistemul liniar

$$\begin{vmatrix} -\cos\varphi_3 & 0 & -z_B & -(y_C - y_B) \\ -\sin\varphi_3 & z_B & 0 & x_C \\ 0 & y_C - y_B & -x_C & 0 \\ 0 & x_C & y_C - y_B & -z_B \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_C \\ e_{2tx} \\ e_{2ty} \\ e_{2tz} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \omega_{2t}^2 \cdot x_C \\ B \\ \omega_1^2(z_B - z_A) - \omega_{2t}^2 \cdot z_B \\ 0 \end{vmatrix}$$

în care $B = \omega_1^2(y_B - y_A) + \omega_{2t}^2(y_C - y_B)$. Prin rezolvare se determină a_C.

2.2. ANALIZA CINETOSTATICĂ

2.2.1. Forțele în mecanisme

2.2.1.1. Obiectul analizei cinetostatice

Analiza cinetostatică este operația prin care se determină forțele de legătură din cuplele cinematice utilizând **metoda cinetostatică**. Această metodă este o aplicație a **principiului lui d'Alembert** care se enunță astfel:

În orice moment al mişcării forțelor aplicate, forțele de inerție şi forțele de legătură se află în echilibru.

Forțele aplicate şi cele de inerție se consideră cunoscute, iar forțele de legătură reprezintă necunoscutele problemei. Ele se determină pe baza unui model matematic constituit din ecuații de echilibru similare cu cele din statică.

Forțele de inerție se calculează într-o fază premergătoare, pe baza distribuției de accelerații şi în funcție de caracteristicile masice ale elementelor (masele, pozițiile centrelor de masă, momentele de inerție). Rezultă că, înainte de a aborda analiza cinetostatică, trebuie efectuată analiza cinematică pentru a determina parametrii de poziție, care intervin în ecuațiile de echilibru şi accelerațiile, care intervin în calculul forțelor de inerție. Dacă forțele de inerție sunt mici în raport cu forțele aplicate ele pot fi neglijate, iar operația de determinare a forțelor de legătură se numeşte, în acest caz, **analiză statică**.

Forțele de legătură se grupează în două categorii: **reacțiuni normale (ideale)** şi **forțe de frecare**. Forțele de frecare sunt mici în raport cu reacțiunile normale (sub 10%) şi, dacă nu există pretenții de precizie deosebite, pot fi neglijate. Prin urmare, analiza cinetostatică se poate efectua **în prezența forțelor de frecare** sau în absența lor.

Trebuie menționat că rezultatele analizei cinetostatice sunt aproximative deoarece mişcarea nu este concepută ca o consecință a acțiunii forțelor aplicate, ci este determinată prin operația de analiză cinematică. La rândul său, analiza cinematică are ca punct de plecare mişcarea din cuplele conducătoare. Cu cât parametrii acestei mişcări sunt mai apropiați de cei reali, analiza cinetostatică reflectă mai precis comportarea dinamică a mecanismului. În calculele tehnice, nivelul de precizie oferit de analiza cinetostatică este, totuşi, acceptabil. Menționăm că datele de ieşire ale analizei cinetostatice - forțele de legătură din cuplele cinematice, servesc în procesul de proiectare organologică intervenind în calculul de rezistență al elementelor.

2.2.1.2. Forțele aplicate

Forțele aplicate acționează asupra fiecărui element ca forțe exterioare şi pot fi **motoare** sau **rezistente**. Forțele motoare dezvoltă un lucru mecanic

elementar pozitiv, iar unghiul dintre o forță motoare $\overline{F}$ şi viteza punctului de aplicație $\overline{v}$ este ascuțit (Fig.2.32.a). În cazul forțelor rezistente, care dezvoltă un lucru mecanic elementar negativ, acelaşi unghi este obtuz (Fig.2.32.b). Cuplurile de forțe pot fi, de asemenea, motoare sau rezistente după cum momentul lor este de acelaşi sens, sau de sens opus în raport cu viteza unghiulară a elementului asupra căruia acționează.

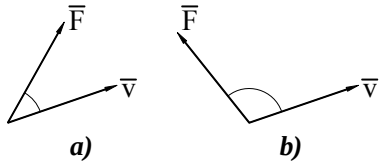


Fig. 2.32

Cele mai importante forțe aplicate sunt **forțele de acționare** şi **forțele tehnologice**. Forțele de acționare lucrează în cuplele conducătoare, sunt generate de motoarele asociate acestor cuple şi au, evident, caracter motor. Forțele tehnologice acționează asupra elementelor conduse, de execuție, sunt generate ca rezultat al operației tehnologice efectuate de mecanisme şi au caracter rezistent. Ele se mai numesc **forțe de rezistență utilă**. În analiza cinetostatică forțele tehnologice se consideră cunscute, fiind determinate din studiul procesului tehnologic, iar forțele de acționare intervin ca necunoscute fiind denumite **forțe (momente) de echilibrare**. Denumirea se explică prin faptul că prezența acestor forțe, ca necunscute, realizează echilibrul cinetostatic. În absența lor problema devine incompatibilă deoarece numărul de ecuații este mai mare decât cel al necunscutelor (vezi Tab.1.2). Forțele (momentele) de echilibrare trebuie dezvoltate de motoarele de acționare, astfel încât valorile lor sunt importante pentru adoptarea acestor motoare. În unele cazuri, cum este cel al mecanismului manivelă-piston din construcția motoarelor termice, forța motoare, generată de presiunea gazelor, este cunoscută, iar momentul de rezistență utilă, devine moment de echilibrare şi constituie necunoscuta problemei.

O altă categorie de forțe aplicate este reprezentată de **forțele de greutate** care acționează întotdeauna asupra mecanismelor care funcționează în câmpul gravitațional. Forța de greutate a unui element poate fi motoare, dacă centrul de masă coboară sau rezistentă - dacă se ridică. În orice caz, lucrul mecanic dezvoltat de forțele de greutate într-un ciclu cinematic este nul.

În categoria forțelor aplicate se includ şi **forțele elastice** generate de arcuri. De obicei arcurile au rolul de a menține contactul dintre elementele cuplelor deschise. Ele se pot monta între un element mobil şi bază sau între două elemente mobile. Forțele elastice se determină în funcție de poziția relativă dintre cele două elemente, iar lucrul mecanic dezvoltat într-un ciclu cinematic este, de asemenea, nul. Uneori arcurile au rol de elemente de acționare (motoare). În acest caz forțele generate de ele se asimilează cu forțele de echilibrare.

Forțele de interacțiune cu mediul (aerodinamice, hidrodinamice) sunt, de asemenea, forțe aplicate şi au caracter rezistent. Ele sunt luate în considerare

numai atunci când sunt destul de importante pentru a influența rezultatele analizei cinetostatice.

2.2.1.3. Forțele de inerție

■ Reducerea forțelor de inerție

Se consideră un element cinematic în mişcare generală plan paralelă şi un sistem de axe de coordonate solidar cu elementul, având originea în centrul de masă G şi axa Gz perpendiculară pe planul mişcării. Torsorul rezultant al forțelor de inerție, redus în punctul G are următoarele componente

$$\begin{aligned} \overline{F}_i &= -m \cdot \overline{a}_G \\ \overline{M}_i &= \overline{i} \cdot (\varepsilon \cdot J_{xz} - \omega^2 \cdot J_{yz}) + \overline{j} \cdot (\varepsilon \cdot J_{yz} + \omega^2 \cdot J_{xz}) + \overline{k} \cdot (-\varepsilon \cdot J_z) \end{aligned} \qquad (2.83)$$

în care $\overline{F}_i$ este forța de inerție rezultantă, M_i - momentul rezultant al forțelor de inerție, m - masa elementului, J_z - momentul de inerție al elementului în raport cu axa Gz, J_{xz}, J_{yz} - momentele de inerție centrifugale, $\overline{a}_G$ - accelerația centrului de masă, ω şi ε - viteza şi accelerația unghiulară ale elementului. Dacă axa Gz este axă principală de inerție, J_{xz}= 0 şi J_{yz}= 0, iar formulele (2.83) devin

$$\begin{aligned} \overline{F}_i &= -m \cdot \overline{a}_G \\ M_i &= -\varepsilon \cdot J_z \end{aligned} \qquad (2.84)$$

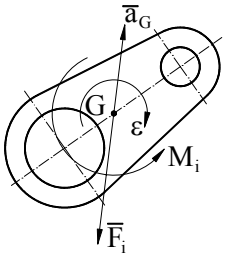


Fig. 2.33

Din (2.84) rezultă că forța de inerție $\overline{F}_i$ are aceeaşi direcție cu accelerația centrului de masă $\overline{a}_G$ şi sens opus, iar momentul forțelor de inerție $\overline{M}_i$ este orientat perpendicular pe planul mişcării şi are sens opus accelerației unghiulare ε (Fig. 2.33).

Se remarcă faptul că torsorul (2.83) este spațial, pe când torsorul (2.84) reprezintă un sistem de forțe amplasate în planul mişcării Gxy. Această particularitate are consecințe favorabile în ce priveşte comportarea dinamică a mecanismului aşa cum se arată în par. 5.2.2.1. De aceea, se recomandă proiectarea elementelor astfel încât J_{xz}= 0 şi J_{yz}= 0, iar în cele ce urmează, vom lua în considerare numai acest caz.

Forța de inerție $\overline{F}_i = 0$ dacă $\overline{a}_G = 0$, ceea ce se întâmplă în cazul mişcării de translație uniforme sau în cazul mişcării de rotație în jurul unei axe fixe ce trece prin centrul de masă. Momentul forțelor de inerței M_i = 0 dacă

$\varepsilon = 0$, ceea ce se întâmplă în cazul mişcării de translaţie sau în cazul mişcării de rotaţie uniforme.

■ Metoda concentrării maselor

În ecuaţiile de echilibru cinetostatic intervin două categorii de forţe care depind de caracteristicile masice ale elementelor - forţele de greutate şi forţele de inerţie. Efectul acestor forţe se poate evidenţia prin concentrarea masei elementului într-un număr finit de puncte. Fiecare masă concentrată m_k, generează o forţă de greutate $\overline{F}_{gk}$ şi o forţă de inerţie $\overline{F}_{ik}$

$$\begin{aligned} \overline{F}_{gk} &= m_k \cdot \overline{g} \\ \overline{F}_{ik} &= -m_k \cdot \overline{a}_k \end{aligned} \tag{2.85}$$

în care $\overline{g}$ este acceleraţia gravitaţională, iar $\overline{a}_k$ - acceleraţia punctului de concentrare. Sistemul forţelor de greutate şi de inerţie ale maselor concentrate trebuie să fie echivalent cu sistemul format din forţa de greutate şi torsorul forţelor de inerţie redus în centrul de masă. Pentru aceasta, dacă ne limităm la cazul mişcării plan paralele, trebuie îndeplinite următoarele condiţii

$$\begin{cases} m_1 + m_2 + ... + m_n = m \\ m_1\overline{r}_1 + m_2\overline{r}_2 + ... + m_n\overline{r}_n = m\overline{r}_G \\ m_1 r_1^2 + m_1 r_2^2 + ... + m_1 r_n^2 = J_0 \end{cases} \tag{2.86}$$

În formulele (2.87), $\overline{r}_k(x_k, y_k)$ (k = 1, n) reprezintă vectorii de poziţie ai maselor concentrate m_k, în raport cu originea unui sistem de axe solidar cu elementul, $\overline{r}_G(x_G, y_G)$ - vectorul de poziţie al centrului de masă şi J_0 - momentul de inerţie al elementului în raport cu axa Oz, perpendiculară pe planul mişcării. Ecuaţia a doua este echivalentă cu două ecuaţii scalare

$$\begin{cases} m_1 x_1 + m_2 x_2 + ... + m_n x_n = m x_G \\ m_1 y_1 + m_2 y_2 + ... + m_n y_n = m y_G \end{cases} \tag{2.87}$$

iar ecuaţia a treia se poate scrie

$$m_1(x_1^2 + y_1^2) + m_2(x_2^2 + y_2^2) + ... + m_n(x_n^2 + y_n^2) = J_0 \tag{2.88}$$

Primele două condiţii (2.86) asigură echivalenţa forţelor de greutate şi de inerţe (nu şi a momentelor forţelor de inerţie). Dacă sunt respectate numai aceste condiţii, concentrarea se numeşte **statică**. Dacă sunt respectate toate cele trei condiţii echivalenţa este totală, iar concentrarea se numeşte **dinamică**. Concentrarea statică se foloseşte numai dacă $M_i = 0$ (mişcare de translaţie sau de rotaţie uniformă, când $\varepsilon = 0$) sau este neglijabil ($J_0 \cong 0$).

Parametrii care definesc concentrarea sunt valorile maselor şi coordonatele punctelor de concentrare. Deci, pentru pentru fiecare punct trebuie cunoscuţi trei parametri (m_k, x_k, y_k). În cazul concentrării dinamice există 4 ecuaţii scalare şi 3n necunoscute, astfel că 3n - 4 parametri pot fi aleşi arbitrar. În cazul concentrării statice numărul de ecuaţii este 3, iar cel de necunoscute 3n, aşa încât 3n - 3 parametri pot fi adoptaţi arbitrar. În continuare se vor analiza câteva cazuri particulare de concentrare.

■ Concentrarea statică în două puncte

Considerând O ≡ G, relaţiile (2.86) şi (2.87) devin

$$m_1 + m_2 = m$$
$$m_1 x_1 + m_2 x_2 = 0$$
$$m_1 y_1 + m_2 y_2 = 0$$

Din ultimele două ecuaţii rezultă

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$$

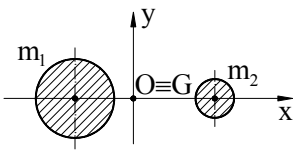


Fig. 2.34

ceea ce arată că punctele de concentrare sunt coliniare cu centrul de masă. În aceste condiţii cele trei puncte pot fi considerate pe axa Ox (Fig.2.34), iar $y_1 = y_2 = 0$. Sistemul se reduce la primele două ecuaţii care conţin 4 parametri. Dacă x_1 şi x_2 se adoptă, rezultă m_1 şi m_2,

$$m_1 = m\frac{x_2}{x_2 - x_1},\ m_2 = m\frac{x_1}{x_1 - x_2}.$$

Pentru a obţine soluţii pozitive (masa negativă nu are sens fizic) este necesar ca x_1 şi x_2 să aibă semne diferite.

■ Concentrarea dinamică în două puncte

În ipoteza O ≡ G, condiţiile de concentrare (2.86), (2.87) şi (2.88) se scriu astfel

$$m_1 + m_2 = m$$
$$m_1 x_1 + m_2 x_2 = 0$$
$$m_1 y_1 + m_2 y_2 = 0$$
$$m_1(x_1^2 + y_1^2) + m_2(x_2^2 + y_2^2) = J_G$$

Ca şi în cazul precedent, punctele de concentrare şi centrul de masă sunt coliniare şi se pot adopta pe axa Ox ($y_1 = y_2 = 0$), iar sistemul de ecuaţii devine

$$m_1 + m_2 = m$$
$$m_1 x_1 + m_2 x_2 = 0$$
$$m_1 x_1^2 + m_2 x_2^2 = J_G$$

Dintre cei 4 parametri (x_1, x_2, m_1, m_2) se impune unul (de exemplu x_1), iar ceilalţi trei rezultă

$$m_1 = \frac{J_G m}{m x_1^2 + J_G},\ m_2 = \frac{m^2 x_1^2}{m x_1^2 + J_G},\ x_2 = -\frac{J_G}{m x_1}$$

- **Concentrarea dinamică în trei puncte coliniare, dintre care unul este centrul de masă**

Se consideră O ≡ G şi punctele de concentrare pe axa Ox (Fig.2.35). Sistemul de ecuaţii este

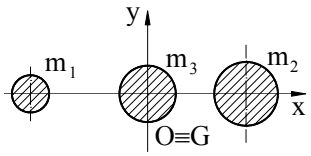


Fig. 2.35

$$m_1 + m_2 + m_3 = m$$
$$m_1 x_1 + m_2 x_2 = 0$$
$$m_1 x_1^2 + m_2 x_2^2 = J_G$$

Având 3 ecuaţii şi 5 necunoscute (x_1, x_2, m_1, m_2, m_3) trebuie adoptaţi doi parametri, de exemplu x_1 şi x_2. Rezultă cele trei mase

$$m_1 = \frac{J_G}{x_1(x_1 - x_2)};\ m_2 = \frac{J_G}{x_2(x_2 - x_1)};\ m_3 = m + \frac{J_G}{x_1 x_2}$$

Pentru a obţine soluţii pozitive trebuie îndeplinite condiţiile

$$x_1 x_2 < 0 \text{ şi } m > \frac{J_G}{|x_1 x_2|}$$

2.2.1.4. Forţele de legătură

Forţele de legătură exprimă interacţiunea dinamică dintre elementele cuplelor cinematice, acţionează prin intermediul suprafeţelor în contact şi se împart în două categorii: reacţiuni normale şi forţe de frecare.

■ Reacțiunile normale

Aşa cum am arătat (par. 1.1.1), reacțiunile normale înlocuiesc legăturile cinematice (restricțiile la deplasare). Tipul (forță de reacțiune sau moment de reacțiune) şi direcția lor în raport cu geometria cuplei sunt indicate în Tab.1.1. În cazul mecanismelor plane (de care ne ocupăm în primul rând) se face ipoteza că încărcările (forțele aplicate) şi forțele de inerție acționează într-un singur plan, paralel cu planul mişcării.

În aceste condiții, componentele torsorului de reacțiune care nu acționează în acest plan devin nule din condițiile de echilibru. Componentele diferite de zero pot fi asociate cu restricțiile raportate la mişcarea plan paralelă. Astfel, în cazul **cuplei de rotație** (Fig.2.36.a), torsorul de reacțiune se reduce, în centrul cuplei, la o reacțiune unică $\overline{R}_{12}$ (primul indice arată elementul din partea căruia se exercită reacțiunea, iar al doilea - elementul asupra căruia se exercită), având componentele necunoscute R_{12x} şi R_{12y}. În cazul **cuplei de translație** (Fig.2.36.b) torsorul de reacțiune se reduce într-un punct de pe axa de translație la o reacțiune perpendiculară pe această axă $\overline{R}_{12} \perp Ax$ şi la un moment de reacțiune M_{r12}. Parametri scalari necunoscuți sunt R_{12y} ($R_{12x} = 0$) şi M_{r12}. De obicei punctul de reducere se adoptă în centrul zonei de contact a cuplei (Fig.2.36.b), dar se poate adopta şi într-un punct determinat astfel încât

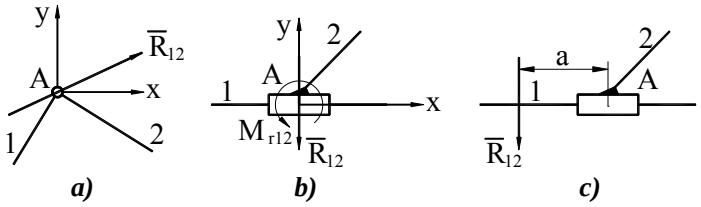


Fig. 2.36

torsorul să fie format dintr-o reacțiune unică (Fig.2.36.c). În acest caz distanța a, care determină poziția punctului de reducere față de centrul zonei de contact, este o necunoscută a problemei de analiză cinetostatică şi este legată de parametrii $|R_{12}|$ şi $|M_{r12}|$ prin relația

$$|M_{r12}| = |R_{r12}| \cdot a \,. \tag{2.89}$$

■ Forțele de frecare

Fenomenul frecării este deosebit de complex, fiind determinat de un număr foarte mare de factori mecanici, fizici şi chimici. În contextul acestei

expuneri ne interesează numai una dintre manifestările frecării - forța de frecare de alunecare. Între mărimea forței de frecare $\overline{F}_{f12}$ şi cea a reacțiunii normale $\overline{R}_{12}$ există relația

$$|F_{f12}| = \mu \cdot |R_{12}|$$

unde μ este coeficientul de frecare. Forța de frecare $\overline{F}_{f12}$ are direcția şi sensul vitezei relative de alunecare $\overline{v}_{12}$ (se opune vitezei $\overline{v}_{21}$) - Fig.2.37.

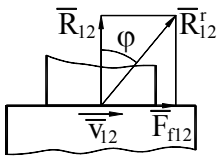


Fig. 2.37

Dacă se compune reacțiunea normală $\overline{R}_{12}$ cu forța de frecare $\overline{F}_{f12}$ se obține reacțiunea rezultantă $\overline{R}^r_{12}$. Unghiul φ dintre $\overline{R}_{12}$ şi $\overline{R}^r_{12}$ se numeşte unghi de frecare, iar tangenta sa este egală cu coeficientul de frecare

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{|F_{f12}|}{|R_{12}|} = \mu .$$

Valoarea coeficientului de frecare, esențială pentru calculul forțelor de frecare, depinde de regimul de frecare din cupla cinematică. În Tribologie (ştiința frecării) se consideră că există trei regimuri de frecare: uscată, limită şi fluidă. **Frecarea uscată** se produce în absența lubrifiantului şi, practic, nu se admite în cuplele cinematice datorită uzării foarte rapide a suprafețelor. **Regimul limită** apare când între suprafețe există un start de fluid foarte subțire (molecular) de lubrifiant. **Frecarea fluidă** presupune existența unei pelicule de lubrifiant care separă complet suprafețele, iar alunecarea se produce între straturile de fluid. Se admite şi o stare de frecare intermediară, numită **mixtă** în care pelicula de lubrifiant se reface şi se întrerupe periodic. Valorile coeficientului de frecare sunt date, în mod orientativ, în Tab.2.3.

Tabelul 2.3

Regimul de frecare	Valoarea aproximativă a coeficientului de frecare
Frecare uscată	$\mu > 0,3$
Frecare limită	0,1 - 0,3
Frecare mixtă	0,005 - 0,1
Frecare fluidă	0,001 - 0,005

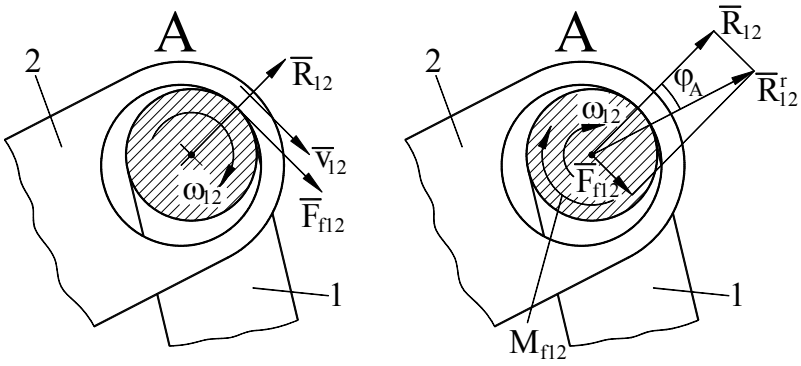
Din Tab.2.3 rezultă că, în cazul frecării fluide, coeficientul de frecare este foarte mic, iar forțele de frecare au valori neglijabile în raport cu reacțiunile normale. De aceea, în analiza cinetostatică, se iau în considerare, în primul rând, forțele de frecare din cuplele cu frecare limită sau mixtă.

În cazul **cuplei de rotație** forța de frecare $\overline{F}_{f12}$ acționează în punctul de contact fus - lagăr care apare datorită jocului din cuplă. Direcția forței de frecare este orientată după tangenta comună la cele două cercuri, iar sensul este acelaşi

cu al vitezei relative $\overline{v}_{12}$ (Fig.2.38.a). Din motive care țin de simplificarea analizei cinetostatice, reducerea forțelor de frecare se face în centrul fusului (Fig.2.38.b). În această ipoteză, pe lângă forța de frecare intervine şi un moment de frecare M_{f12} având sensul vitezei unghiulare relative ω_{12}. Forța şi momentul de frecare se calculează, în modul, cu relațiile

$$\left| F_{f12} \right| = \mu_A \cdot \left| R_{12} \right|$$

$$\left| M_{f12} \right| = \mu_A \cdot r_A \cdot \left| R_{12} \right|$$



a) ***b)***

Fig. 2.38

în care μ_A este coeficientul de frecare din cupla A, iar r_A este raza fusului. Reacțiunea normală $\overline{R}_{12}$ şi forța de frecare $\overline{F}_{f12}$ se compun obținându-se reacțiunea rezultantă $\overline{R}^r_{12}$. În felul acesta, torsorul rezultant al forțelor de legătură din cuplă se reduce, în centrul cuplei, la forța $\overline{R}^r_{12}(R^r_{12x}, R^r_{12y})$ şi la momentul M_{f12} care se exprimă în funcție de R^r_{12},

$$M_{f12} = s_{12} \cdot \mu_A \cdot r_A \cdot \left| R^r_{12} \right| \cos\varphi_A$$

Termenul s_{12} indică semnul (sensul) momentului şi se determină astfel

$$s_{12} = \begin{cases} +1, & \text{dacă } \widetilde{\omega}_{12} \text{ este pozitiv} \\ -1, & \text{dacă } \widetilde{\omega}_{12} \text{ este negativ} \end{cases}$$

Deoarece $\mu_A = \mathrm{tg}\varphi_A$, iar $\left| R^r_{12} \right| = \sqrt{(R^r_{12x})^2 + (R^r_{12y})^2}$ formula devine

$$M_{f12} = s_{12} \cdot r_A \sqrt{(R^r_{12x})^2 + (R^r_{12y})^2} \sin\varphi_A, \qquad (2.90)$$

iar dacă φ_A este mic ($< 10^0$), $\sin\varphi_A \cong \mathrm{tg}\varphi_A = \mu_A$, se poate folosi şi formula:

$$M_{f12} = s_{12} \cdot \mu_A \cdot r_A \sqrt{(R^r_{12x})^2 + (R^r_{12y})^2} \qquad (2.91)$$

În cazul lagărelor cu rulmenți se aplică aceleaşi relații, cu observația că r_A este o rază de reducere convențională - în mod obişnuit raza cercului care trece prin centrele corpurilor de rulare.

Pentru a studia modul în care acționează forțele de frecare în **cupla de translație**, torsorul reacțiunilor normale ($\overline{R}_{12}$, M_{r12}) se înlocuieşte prin două forțe, perpendiculare pe axa de translație şi amplasate la extremitățile zonei de contact. Aceste forțe, determinate din ecuații de momente, de echivalență, scrise în raport cu punctele A' şi A" (Fig.2.39.a), au valorile:

$$R'_{12} = \frac{|R_{12}|}{2} + \frac{|M_{r12}|}{b}$$

$$R''_{12} = \frac{|R_{12}|}{2} - \frac{|M_{r12}|}{b}$$

în care b este lungimea zonei de contact a cuplei.

Pentru a calcula forța de frecare vom lua în considerare două cazuri

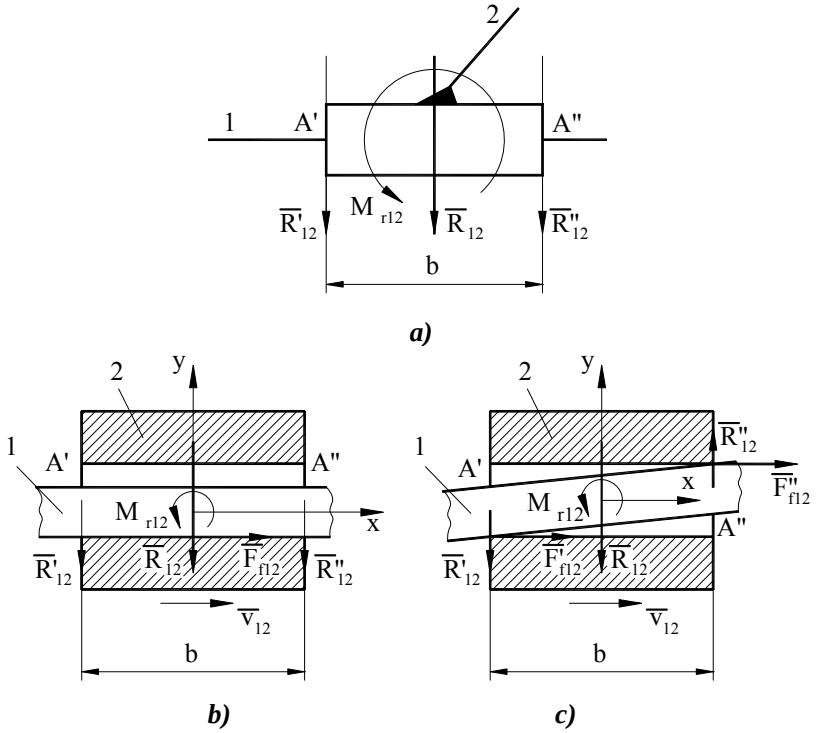


Fig. 2.39

Cazul (1) $\frac{|R_{12}|}{2} > \frac{|M_{r12}|}{b}$ sau $|R_{12}| > \frac{2 \cdot |M_{r12}|}{b}$

Dacă M_{r12} se înlocuieşte cu expresia (2.89) se obține condiția

$$a < \frac{b}{2}$$

care arată că acest caz se inregistrează când punctul de reducere al reacțiunii unice se află în interiorul zonei de contact.

Deoarece $\overline{R}'_{12}$ şi $\overline{R}''_{12}$ au acelaşi sens, poziția relativă dintre cele două elemente, având în vedere jocul din cuplă, este cea din Fig.2.39.b, iar forța de frecare are mărimea

$$|F_{f12}| = \mu_{A1} \cdot |R_{12}| \tag{2.92}$$

în care μ_{A1} este coeficientul de frecare din cuplă, corespunzător acestui caz. Componentele forței de frecare, în raport cu un reper solidar cu un element al cuplei, având axa abscisei paralelă cu axa de translație sunt

$$\begin{aligned} F_{f12} &= F_{f12x} = s_{12} \cdot \mu_{A1} \cdot |R_{12}| \\ F_{f12y} &= 0 \end{aligned} \tag{2.93}$$

în care s_{12} indică semnul (sensul) forței de frecare şi se determină astfel

$$s_{12} = \begin{cases} +1, & \text{dacă } v_{12} \text{ este pozitiv (are sensul axei x)} \\ -1, & \text{dacă } v_{12} \text{ este negativ (are sens opus axei x)} \end{cases}$$

Cazul (2) $\frac{|R_{12}|}{2} < \frac{|M_{r12}|}{b}$, $|R_{12}| < \frac{2 \cdot |M_{r12}|}{b}$, $a > \frac{b}{2}$

Desigur, acest caz se înregistrează când punctul de reducere al rezultantei unice se află în afara zonei de contact.

Deoarece $\overline{R}'_{12}$ şi $\overline{R}''_{12}$ au sensuri opuse, poziția relativă dintre elemente este cea din Fig.2.39.c, cu două puncte de contact la extremitățile patinei. În consecință apar două forțe de frecare

$$|F'_{f12}| = \mu_{A2} |R'_{12}| = \mu_{A2} \left(\frac{|R_{12}|}{2} + \frac{|M_{r12}|}{b} \right)$$

$$|F''_{f12}| = \mu_{A2} |R''_{12}| = \mu_{A2} \left(\frac{|M_{r12}|}{b} - \frac{|R_{12}|}{2} \right),$$

iar forța de frecare rezultantă este

$$|F_{f12}| = |F'_{f12}| + |F''_{f12}| = \mu_{A2} \frac{2 \cdot |M_{r12}|}{b} \tag{2.94}$$

$$F_{f12} = F_{f12x} = s_{12} \cdot \mu_{A2} \frac{2 \cdot |M_{r12}|}{b} \qquad (2.95)$$

$$F_{f12y} = 0 .$$

În aceste relații μ_{A2} este coeficientul de frecare din cuplă corespunzător acestui caz, iar s_{12} are aceeaşi semnificație ca în cazul (1).

Comparând relația (2.94) cu (2.92) şi având în vedere condițiile de definiție ale celor două cazuri rezultă că forța de frecare în cazul (2) este mai mare decât în cazul (1), în ipoteza că R_{12} are aceeaşi valoare. Trebuie remarcat că în sprijinul acestei afirmații intervine şi faptul că $\mu_{A2} > \mu_{A1}$. Aceasta se explică prin aceea că în **cazul (2)** reacțiunile R'_{12} şi R''_{12} sunt concentrate, presiunile de contact sunt mari, iar regimul de ungere - defavorabil. Se observă, de asemenea, că forța de frecare în **cazul (2)** depinde şi de parametrul **b** (2.94). Cu cât această lungime este mai mică, forța de frecare este mai mare.

Aceste observații conduc la concluzia că este recomandabil să fie evitat **cazul (2)**. Această cerință se poate realiza printr-o proiectare rațională a mecanismului prin care să se obțină momente de reacțiune cât mai mici în cuplele de translație (vezi par. 2.2.3.1). Reamintim că, pentru a evita **cazul (2)**, punctul de aplicație al rezultantei unice trebuie să se afle în interiorul zonei de contact a cuplei.

2.2.2. Analiza cinetostatică fără frecare

■ Considerații generale

Aşa cum am arătat, modelul matematic al analizei cinetostatice se constituie din ecuațiile de echilibru ale elementelor. În cazul mecanismelor plane ecuațiile de forțe sunt vectoriale, iar ecuațiile de momente pot fi exprimate scalar. Prin proiectarea ecuațiilor de forțe pe axele sistemului de coordonate solidar cu baza, toate ecuațiile devin scalare şi au caracter liniar. Prin urmare, analiza cinetostatică fără frecare este o problemă liniară cu avantajele care decurg de aici în ce priveşte rezolvarea numerică. Problema poate fi tratată pe ansamblul mecanismului sau pe grupe structurale. Cea de-a doua modalitate prezintă avantajele semnalate şi la analiza cinematică: cu ajutorul unui număr redus de procedee se poate analiza un număr mare de mecanisme. Pe lângă aceasta, abordarea pe grupe structurale reduce mult numărul de ecuații care trebuie rezolvate simultan, simplificând procedeul de rezolvare. Astfel, în cazul grupelor 0/2/2 numărul de ecuații care trebuie rezolvate simultan este de maximum patru. Trebuie precizat că în cinetostatică

ordinea în care se face analiza grupelor componente este inversă în raport cu ordinea de formare a mecanismului.

Rezolvarea ecuațiilor de echilibru se poate face grafo - analitic sau analitic. Procedeul grafo - analitic presupune rezolvarea analitică a ecuațiilor scalare, de momente şi rezolvarea grafică (prin construcția unor poligoane) a ecuațiilor vectoriale, de forțe.

2.2.2.1. Analiza cinetostatică a grupelor structurale

Procedeele de analiză cinetostatică pentru grupele structurale uzuale sunt prezentate în Tab.2.4. În acest tabel sunt indicate sistemele de ecuații de echilibru scrise sub formele specifice celor două moduri de rezolvare.

Sunt reprezentate, de asemenea, poligoanele de forțe care reprezintă rezolvarea grafică a ecuațiilor de forțe. În cadrul acestor procedee, forțele cunoscute (aplicate şi de inerție) care acționează asupra unui element **k**, se reduc, într-un punct de poziție cunoscută O_k, la un torsor ($\overline{F}_k, \overline{M}_k$). În aplicațiile concrete multe dintre aceste componente sunt nule sau neglijabile. Pentru a înlesni înțelegerea procedeelor prezentate sintetic în Tab.2.4, se tratează, detaliat, în continuare, două grupe structurale. Se va efectua, de asemenea, analiza cinetostatică a mecanismului patrulater articulat plan utilizând, comparativ, abordarea globală şi cea pe grupe structurale.

- **Grupa structurală RRT** (Fig. 2.40)

Vom trata, la început, **procedeul grafo - analitic**.

Reacțiunea $\overline{R}_{12}$ se consideră formată din două componente $\overline{R}^t_{12} \perp AB$ şi $\overline{R}^n_{12} // AB$.

Se scrie ecuația de momente, pentru elementul 2, în raport cu punctul B,

$$\sum M_B(2) = 0; \quad M_B(\overline{R}^t_{12}) + M_B(\overline{F}_2) + M_2 = 0$$

Momentul $M_B(\overline{F}_2)$ care intervine în această ecuație se calculează astfel:

$$M_B(\overline{F}_2) = \pm \left| \overline{F}_2 \right| \cdot h_2$$

unde h_2 este brațul momentului (Fig.2.40.a) care poate fi determinat grafic, prin măsurare pe desen. Semnul se determină în funcție de sensul momentului, observat pe desen, şi convenția de semn adoptată.

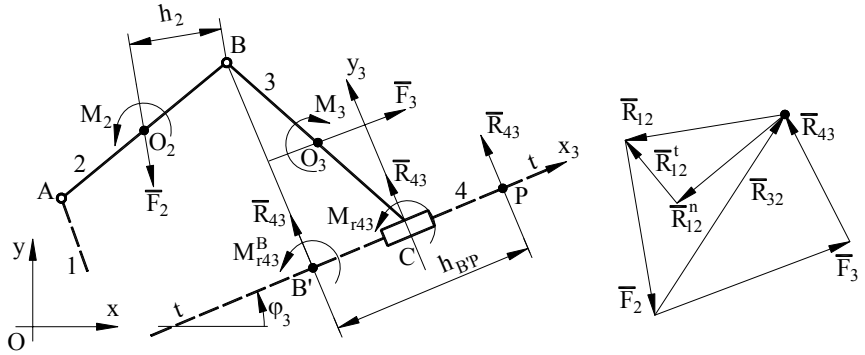
Din ecuația de momente se calculează

$$M_B(\overline{R}^t_{12}) = -(M_B(\overline{F}_2) + M_2)$$

şi apoi

$$\left| R_{12}^{t} \right| = \frac{\left| M_B(\overline{R}_{12}^{t}) \right|}{l_2}.$$

Sensul reacțiunii $\overline{R}_{12}^{t}$ se stabilește în funcție de semnul momentului $M_B(\overline{R}_{12}^{t})$.



a) ***b)***

Fig. 2.40

Se scrie, apoi, ecuația vectorială de forțe pentru sistemul format din elementele 2 şi 3,

$$\sum \overline{F}\ (2,\ 3) = 0\ ; \quad \underline{\overline{R}_{12}^{n}} + \underline{\underline{\overline{R}_{12}^{t}}} + \underline{\underline{\overline{F}_2}} + \underline{\underline{\overline{F}_3}} + \underline{\overline{R}_{43}} = 0.$$

Ecuația se rezolvă grafic, prin construcția unui poligon de forțe. Se reprezintă, la început, forțele cunoscute $\overline{R}_{12}^{t}$, $\overline{F}_2$ şi $\overline{F}_3$ înşiruite una după alta (Fig.2.40.b). Apoi, prin punctul inițial se trasează suportul reacțiunii $\overline{R}_{12}^{n}$ // AB, iar prin punctul final suportul reacțiunii $\overline{R}_{43}$ $\perp$ tt. Cele două drepte se intersectează închizând poligonul. În felul acesta rezultă $\overline{R}_{12}^{n}$ şi $\overline{R}_{43}$, iar sensul lor se stabileşte astfel ca înteg poligonul să fie parcurs în acelaşi sens. Prin compunere grafică se determină $\overline{R}_{12} = \overline{R}_{12}^{n} + \overline{R}_{12}^{t}$.

Se scrie ecuația de forțe pentru un element al grupei, de exemplu elementul 2,

$$\sum \overline{F}\ (2) = 0\ ; \quad \underline{\underline{\overline{R}_{12}}} + \underline{\underline{\overline{F}_2}} + \overline{R}_{32} = 0.$$

Reacțiunea $\overline{R}_{32}$ se determină grafic, prin construcția unui triunghi de vectori (Fig.2.40.b) conform cu ecuația de echilibru.

În final, se determină momentul de reacțiune din cupla de translație cu ajutorul unei ecuații de momente scrisă pentru elementul 3. De regulă, această ecuație se scrie în raport cu punctul B. Aceasta înseamnă că reducerea torsorului de reacțiune se face în B sau în B' - piciorul perpendicularei dusă prin B pe axa

tt. (Toate punctele de reducere situate pe suportul forței rezultante au acelaşi moment rezultant).

$$\sum M_B(3)=0; \quad M_B(\overline{F}_3)+M_3+M_{r43}^B=0$$
$$M_{r43}^B=-(M_B(\overline{F}_3)+M_3)$$

Dacă torsorul de reacțiune se reduce la o reacțiune unică, atunci poziția punctului de reducere P trebuie determinată. Se scrie relația de calcul a momentului la schimbarea polului din B' în P,

$$M_{r43}^P=M_{r43}^B+M_P(\overline{R}_{43})=0$$
$$M_P(\overline{R}_{43})=-M_{r43}^B$$

De aici rezultă $h_{B'P}$,

$$h_{B'P}=\frac{|M_P(\overline{R}_{43})|}{|R_{43}|},$$

iar sensul de măsurare se determină astfel încât momentul $M_P(\overline{R}_{43})$ să aibă sensul obținut din calcul.

Dacă punctul de reducere este centrul zonei de contact C, atunci $M_{r43}=M_{r43}^C$ se poate determina fie prin schimbarea polului, din B' în C sau din P în C, fie scriind o ecuație de momente pentru elementul 3 în raport cu C,

$$\sum M_C(3)=0; \quad M_C(\overline{F}_3)+M_3+M_C(\overline{R}_{23})+M_{r43}=0$$
$$M_{r43}=-(M_C(\overline{F}_3)+M_3+M_C(\overline{R}_{23})).$$

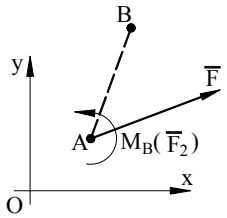


Fig. 2.41

Procedeul analitic foloseşte aceleaşi ecuații de echilibru ca şi procedeul grafic, cu observația că ecuațiile de momente se scriu, mai întâi, sub formă vectorială şi apoi se transpun scalar. Astfel, momentul unei forțe $\overline{F}$ aplicată în A, în raport cu polul B (Fig.2.41) se scrie

$$\overline{M}_B(\overline{F})=\overline{BA}\times\overline{F}=\overline{F}\times\overline{AB},$$

iar apoi se dezvoltă, obținând expresia scalară

$$\overline{M}_B=\overline{F}\times\overline{AB}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ F_x & F_y & 0\\ x_B-x_A & y_B-y_A & 0\end{vmatrix}=\overline{k}(F_x(y_B-y_A)-F_y(x_B-x_A))$$

$$M_B=M_{Bz}=F_x(y_B-y_A)-F_y(x_B-x_A)$$

În cazul grupei RRT se scriu următoarele ecuații de echilibru:

$$\sum\overline{M}(2)=0; \quad \overline{R}_{12}\times\overline{AB}+\overline{F}_2\times\overline{O_2B}+\overline{M}_2=0$$

$$\sum \overline{F}(2,3)=0\,;\quad \overline{R}_{12}+\overline{R}_{43}+\overline{F}_2+\overline{F}_3=0$$

Ecuația de momente se transpune scalar, iar ecuațiile de forțe se proiectează pe axele de coordonate. Pentru a scrie proiecțiile reacțiunii $\overline{R}_{43}\perp tt$, se utilizează unghiul φ_3 format de axa de translație Cx_3 cu axa Ox. În felul acesta se obține următorul sistem liniar

$$\begin{vmatrix} y_B-y_A & -(x_B-x_A) & 0 \\ 1 & 0 & -\sin\varphi_3 \\ 0 & 1 & \cos\varphi_3 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} R_{43} \\ R_{12x} \\ R_{12y} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -(M_2+F_{2x}(y_B-y_A)- \\ -F_{2y}(x_B-x_A)) \\ -(F_{2x}+F_{3x}) \\ -(F_{2y}+F_{3y}) \end{vmatrix} \qquad (2.96)$$

din care se calculează R_{43}, R_{12x} şi R_{12y}.

Reacțiunea R_{32} rezultă din ecuația de forțe pentru elementul 2,

$$\sum \overline{F}(2)=0\;;\quad \begin{aligned} &\overline{R}_{12}+\overline{F}_2+\overline{R}_{32}=0 \\ &R_{12x}+F_{2x}+R_{32x}=0 \\ &R_{12y}+F_{2y}+R_{32y}=0 \\ &R_{32x}=-(R_{12x}+F_{2x}) \\ &R_{32y}=-(R_{12y}+F_{2y}) \end{aligned}$$

Momentul M^B_{r43} rezultă din ecuația de momente pentru elementul 3 în raport cu B,

$$\sum \overline{M}_B(3)=0\,;\quad \begin{aligned} &\overline{F}_3\times\overline{O_3B}+\overline{M}_3+\overline{M}^B_{r43}=0 \\ &M^B_{r43}=-(F_{3x}(y_B-y_{O_3})-F_{3y}(x_B-x_{O_3})+M_3) \end{aligned}$$

Dacă reducerea se face în C, se scrie ecuația de momente în raport cu acest punct

$$\sum \overline{M}_C(3)=0\,;\quad \overline{F}_3\times\overline{O_3C}+\overline{M}_3+\overline{R}_{23}\times\overline{BC}+\overline{M}_{r43}=0$$

$$M_{r43}=-(F_{3x}(y_C-y_{O_3})-F_{3y}(x_C-x_{O_3})+M_3+R_{23x}(y_C-y_B)-R_{23y}(x_C-x_B))$$

Observație

Determinantul sistemului (2.96) are aceeaşi expresie ca şi determinantul sistemelor care intervin la analiza vitezelor şi a accelerațiilor (2.17),

$$D=(x_B-x_A)\cos\varphi_3+(y_B-y_A)\sin\varphi_3$$

Aceasta înseamnă că analiza cinetostatică fără frecare, ca şi analiza cinematică, este o problemă compatibilă şi determinată dacă se evită poziția critică

($AB \perp tt$) în care D = 0. Această observație este valabilă pentru toate grupele structurale.

■ Grupa structurală 0/3/3 cu cuple de rotație

În cadrul **procedeului grafo - analitic** se folosesc punctele singulare întâlnite şi la analiza cinematică. Să considerăm punctul S situat la intersecția dreptelor AB şi CD (Fig.2.42). Reacțiunile din cuplele exterioare se consideră formate din două componente, astfel: $\bar{R}_{12}$ ($\bar{R}^n_{12}$ // AB, $\bar{R}^t_{12}$ $\perp$ AB), $\bar{R}_{64}$ ($\bar{R}^n_{64}$ // CD, $\bar{R}^t_{64}$ $\perp$ CD), $\bar{R}_{75}$ ($\bar{R}^n_{75}$ // EF, $\bar{R}^t_{75}$ $\perp$ EF). Se scriu următoarele ecuații de momente

$$\sum M_B(2) = 0; \quad M_B(\bar{R}^t_{12}) + M_B(\bar{F}_2) + M_2 = 0 \Rightarrow \bar{R}^t_{12}$$
$$\sum M_D(4) = 0; \quad M_D(\bar{R}^t_{64}) + M_D(\bar{F}_4) + M_4 = 0 \Rightarrow \bar{R}^t_{64}$$
$$\sum M_F(5) = 0; \quad M_F(\bar{R}^t_{75}) + M_F(\bar{F}_5) + M_5 = 0 \Rightarrow \bar{R}^t_{75}$$

din care rezultă, după modelul de rezolvare de la grupa RRT, componentele tangențiale.

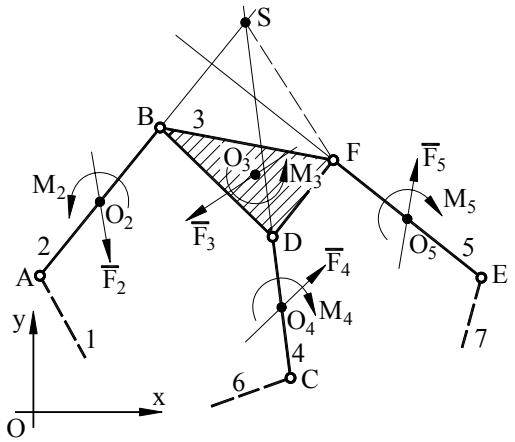


Fig. 2.42

Se scrie ecuația de momente pentru toată grupa în raport cu punctul S

$$\begin{aligned}\sum M_S(2,3,4,5) = 0; \quad & M_S(\bar{R}^t_{12}) + M_S(\bar{F}_2) + M_2 + \\ & + M_S(\bar{R}^t_{64}) + M_S(\bar{F}_4) + M_4 + \\ & + M_S(\bar{R}^t_{75}) + M_S(\bar{R}^n_{75}) + M_S(\bar{F}_5) + M_5 + \\ & + M_S(\bar{F}_3) + M_3 = 0 \Rightarrow \bar{R}^n_{75}\end{aligned}$$

Din această ecuație se obține singura forță necunoscută $\overline{R}_{75}^{n}$. În continuare, se scrie o serie de ecuații de forțe, care se rezolvă grafic şi din care rezultă celelalte reacțiuni:

$$\sum \overline{F}(5)=0\,; \qquad \overline{R}_{75}+\overline{F}_5+\overline{R}_{35}=0 \;\Rightarrow\; \overline{R}_{35}$$

$$\sum \overline{F}(2,3,4,5)=0\,; \overline{R}_{12}^{n}+\overline{R}_{12}^{t}+\overline{F}_2+\overline{R}_{64}^{n}+\overline{R}_{64}^{t}+$$
$$+\overline{F}_4+\overline{R}_{75}+\overline{F}_5+\overline{F}_3=0 \Rightarrow \overline{R}_{12}^{n},\ \overline{R}_{64}^{n}$$

$$\sum \overline{F}(2)=0\,; \qquad \overline{R}_{12}+\overline{F}_2+\overline{R}_{32}=0 \;\Rightarrow\; \overline{R}_{32}$$

$$\sum \overline{F}(4)=0\,; \qquad \overline{R}_{64}+\overline{F}_4+\overline{R}_{34}=0 \;\Rightarrow\; \overline{R}_{34}$$

Procedeul analitic debutează cu scrierea următoarelor ecuații de echilibru

$$\sum \overline{M}_B(2)=0\,; \quad \overline{R}_{12}\times\overline{AB}+\overline{F}_2\times\overline{O_2B}+\overline{M}_2=0$$

$$\sum \overline{M}_D(4)=0\,; \quad \overline{R}_{64}\times\overline{CD}+\overline{F}_4\times\overline{O_4D}+\overline{M}_4=0$$

$$\sum \overline{M}_F(5)=0\,; \quad \overline{R}_{75}\times\overline{EF}+\overline{F}_5\times\overline{O_5F}+\overline{M}_5=0$$

$$\sum \overline{M}_B(2,\ 3,\ 4,\ 5)=0\,; \quad \overline{R}_{12}\times\overline{AB}+\overline{F}_2\times\overline{O_2B}+\overline{M}_2+$$
$$+\overline{R}_{64}\times\overline{CD}+\overline{F}_4\times\overline{O_4D}+\overline{M}_4+$$
$$+\overline{R}_{75}\times\overline{EB}+\overline{F}_5\times\overline{O_5B}+\overline{M}_5+$$
$$+\overline{F}_3\times\overline{O_3B}+\overline{M}_3=0$$

$$\sum \overline{F}(2,3,4,5)=0\,; \ \overline{R}_{12}+\overline{R}_{64}+\overline{R}_{75}+\overline{F}_2+\overline{F}_3+\overline{F}_4+\overline{F}_5=0$$

Sistemul vectorial se transformă, după modelul cunoscut, în unul scalar format din 6 ecuații cu necunoscutele R_{12x}, R_{12y}, R_{64x}, R_{64y}, R_{75x}, R_{75y}.

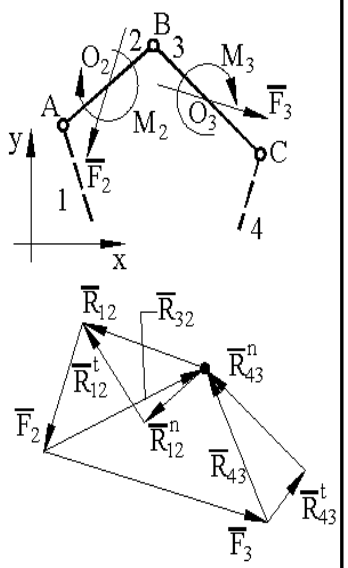
Din ecuațiile de forțe scrise, separat, pentru elementele 2, 4 şi 5 rezultă celelalte reacțiuni

$$\sum \overline{F}(2)=0\,; \qquad \overline{R}_{12}+\overline{F}_2+\overline{R}_{32}=0 \;\Rightarrow\; \overline{R}_{32}\ (R_{32x},\ R_{32y})$$

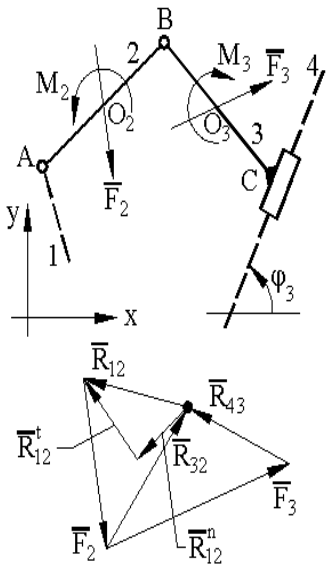
$$\sum \overline{F}(4)=0\,; \qquad \overline{R}_{64}+\overline{F}_4+\overline{R}_{34}=0 \;\Rightarrow\; \overline{R}_{34}\ (R_{34x},\ R_{34y})$$

$$\sum \overline{F}(5)=0\,; \qquad \overline{R}_{75}+\overline{F}_5+\overline{R}_{35}=0 \;\Rightarrow\; \overline{R}_{35}\ (R_{35x},\ R_{35y})$$

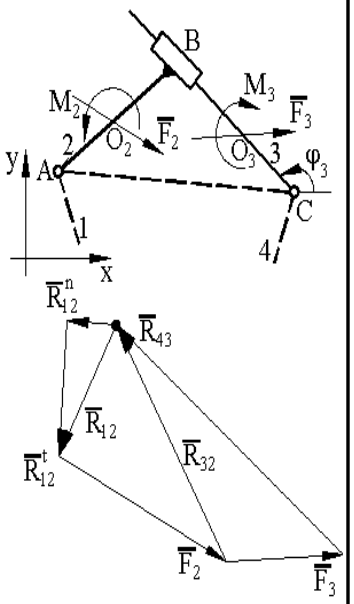
Tabelul 2.4

Schema grupei. Poligonul de forțe	Metoda grafo - analitică	Metoda analitică
RRR (0/2/2, aspectul 1)  	$\overline{R}_{12}\left\langle\begin{array}{l}\overline{R}^n_{12} \,//\, AB\\ \overline{R}^t_{12} \perp AB\end{array}\right.$ $\quad \overline{R}_{43}\left\langle\begin{array}{l}\overline{R}^n_{43} \,//\, BC\\ \overline{R}^t_{43} \perp BC\end{array}\right.$ $\sum M_B(2)=0$ $R^t_{12} l_{AB} + M_B(F_2) + M_2 = 0 \quad \Rightarrow R^t_{12}$ $\sum M_B(3)=0$ $R^t_{43} l_{BC} + M_B(F_3) + M_3 = 0 \quad \Rightarrow R^t_{43}$ $\sum \overline{F}(2,\ 3)=0$ $\overline{R}^n_{12} + \overline{R}^t_{12} + \overline{F}_2 + \overline{F}_3 + \overline{R}^n_{43} + \overline{R}^t_{43} = 0$ $\Downarrow$ $\overline{R}^n_{12},\ \overline{R}^n_{43}$ $\sum \overline{F}(2)=0$ $\overline{R}_{12} + \overline{F}_2 + \overline{R}_{32} = 0 \quad \Rightarrow \overline{R}_{32}$	$\left\{\begin{array}{l}\sum M_B(2)=0\\ \quad R_{12x}(y_B - y_A) - R_{12y}(x_B - x_A) +\\ \quad F_{2x}(y_B - y_{O_2}) - F_{2y}(x_B - x_{O_2}) + M_2 = 0\\ \sum M_B(3)=0\\ \quad R_{43x}(y_B - y_C) - R_{43y}(x_B - x_C) +\\ \quad +F_{3x}(y_B - y_{O_3}) - F_{3y}(x_B - x_{O_3}) + M_3 = 0\\ \sum F_x(2,\ 3)=0\\ \quad R_{12x} + F_{2x} + F_{3x} + R_{43x} = 0\\ \sum F_y(2,\ 3)=0\\ \quad R_{12y} + F_{2y} + F_{3y} + R_{43y} = 0\end{array}\right.$ $\Downarrow$ $R_{12x},\ R_{12y},\ R_{43x},\ R_{43y}$ $\sum F_x(2)=0 \quad R_{12x} + F_{2x} + R_{32x} = 0 \quad \Rightarrow R_{32x}$ $\sum F_y(2)=0 \quad R_{12y} + F_{2y} + R_{32y} = 0 \quad \Rightarrow R_{32y}$

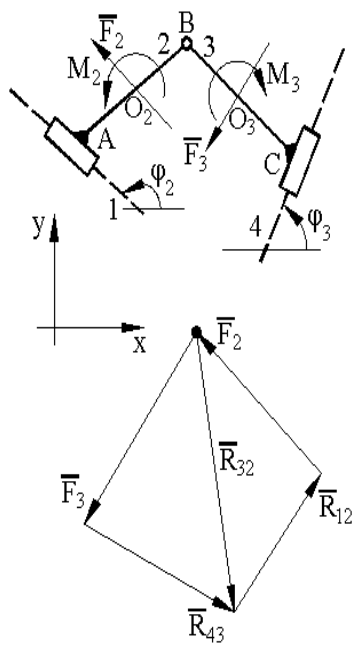
Tabelul 2.4 (continuare)

RRT (0/2/2, aspectul 2)  	$\overline{R}_{12}\begin{cases}\overline{R}_{12}^{n} \,//\, AB \\ \overline{R}_{12}^{t} \perp AB\end{cases}$ $\sum M_B(2)=0$ $R_{12}^{t} l_{AB} + M_B(F_2) + M_2 = 0 \quad \Rightarrow R_{12}^{t}$ $\sum \overline{F}(2,\ 3)=0$ $\overline{R}_{12}^{n} + \overline{R}_{12}^{t} + \overline{F}_2 + \overline{F}_3 + \overline{R}_{43} = 0$ $\Downarrow$ $\overline{R}_{12}^{n},\ \overline{R}_{43}$ $\sum \overline{F}(2)=0$ $\overline{R}_{12} + \overline{F}_2 + \overline{R}_{32} = 0 \quad \Rightarrow \overline{R}_{32}$ $\sum M_B(3)=0$ $M_{r43}^{B} + M_B(F_3) + M_3 = 0 \quad \Rightarrow M_{r43}^{B}$	$\begin{cases}\sum M_B(2)=0 \\ \quad R_{12x}(y_B - y_A) - R_{12y}(x_B - x_A) + \\ F_{2x}(y_B - y_{O_2}) - F_{2y}(x_B - x_{O_2}) + M_2 = 0 \\ \sum F_x(2,\ 3)=0 \\ \quad R_{12x} + F_{2x} + F_{3x} - R_{43}\sin\varphi_3 = 0 \\ \sum F_y(2,\ 3)=0 \\ \quad R_{12y} + F_{2y} + F_{3y} + R_{43}\cos\varphi_3 = 0\end{cases}$ $\Downarrow$ $R_{12x},\ R_{12y},\ R_{43}$ $\sum F_x(2)=0 \quad R_{12x} + F_{2x} + R_{32x} = 0 \quad \Rightarrow R_{32x}$ $\sum F_y(2)=0 \quad R_{12y} + F_{2y} + R_{32y} = 0 \quad \Rightarrow R_{32y}$ $\sum M_B(3)=0$ $M_{r43}^{B} + F_{3x}(y_B - y_{O_3}) - F_{3y}(x_B - x_{O_3}) +$ $+ M_3 = 0$ $\Downarrow$ M_{r43}^{B}

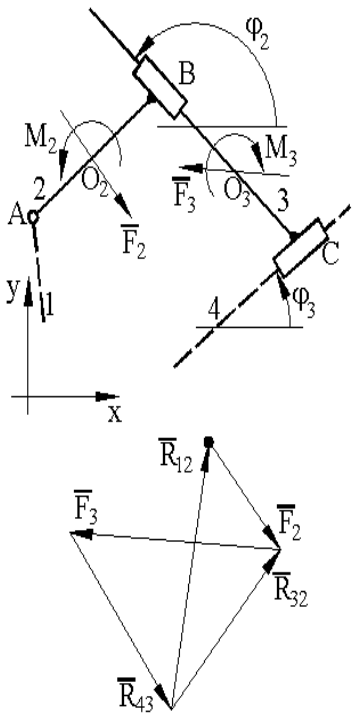
Tabelul 2.4 (continuare)

RTR (0/2/2, aspectul 3)  	$\overline{R}_{12} \left\langle \begin{array}{l} \overline{R}_{12}^n \,//\, AC \\ \overline{R}_{12}^t \perp AC \end{array} \right.$ $\sum M_C(2,\ 3)=0$ $R_{12}^t l_{AC} + M_C(F_2) + M_2 +$ $+M_C(F_3) + M_3 = 0 \quad \Rightarrow R_{12}^t$ $\sum \overline{F}(2)=0$ $\overline{R}_{12}^n + \overline{R}_{12}^t + \overline{F}_2 + \overline{R}_{32} = 0$ $\Downarrow$ $\overline{R}_{12}^n,\ \overline{R}_{32}$ $\sum \overline{F}(2,\ 3)=0$ $\overline{R}_{12} + \overline{F}_2 + \overline{F}_3 + \overline{R}_{43} = 0 \quad \Rightarrow \overline{R}_{43}$ $\sum M_A(2)=0$ $R_{r32}^A h_{32} + M_A(F_2) + M_2 = 0 \quad \Rightarrow M_{r32}^A$	$\left\{ \begin{array}{l} \sum M_C(2,\ 3)=0 \\ \quad R_{12x}(y_C - y_A) - R_{12y}(x_C - x_A) + \\ +F_{2x}(y_C - y_{O_2}) - F_{2y}(x_C - x_{O_2}) + M_2 + \\ +F_{3x}(y_C - y_{O_3}) - F_{3y}(x_C - x_{O_3}) + M_3 = 0 \\ \sum F_x(2)=0 \quad R_{12x} + F_{2x} - R_{32}\sin\varphi_3 = 0 \\ \sum F_y(2)=0 \quad R_{12y} + F_{2y} + R_{32}\cos\varphi_3 = 0 \end{array} \right.$ $\Downarrow$ $R_{12x},\ R_{12y},\ R_{32}$ $\sum F_x(2,\ 3)=0$ $R_{12x} + F_{2x} + F_{3x} + R_{43x} = 0 \quad \Rightarrow R_{43x}$ $\sum F_y(2,\ 3)=0$ $R_{12y} + F_{2y} + F_{3y} + R_{43y} = 0 \quad \Rightarrow R_{43y}$ $\sum M_A(2)=0$ $M_{r32}^A + F_{2x}(y_A - y_{O_2}) - F_{2y}(x_A - x_{O_2}) + M_2 = 0$ $\Downarrow$ M_{r32}^A

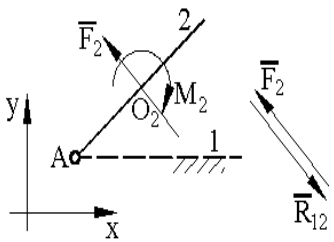
Tabelul 2.4 (continuare)

TRT (0 / 2 / 2, aspectul 4)  	$\sum \overline{F}(2,\ 3)=0$ $\overline{R}_{12}+\overline{F}_2+\overline{F}_3+\overline{R}_{43}=0 \quad \Rightarrow \overline{R}_{12},\ \overline{R}_{43}$ $\sum \overline{F}(2)=0$ $\overline{R}_{12}+\overline{F}_2+\overline{R}_{32}=0 \quad \Rightarrow \overline{R}_{32}$ $\sum M_B(2)=0$ $M^B_{r12}+M_B(F_2)+M_2=0 \quad \Rightarrow M^B_{r12}$ $\sum M_B(3)=0$ $M^B_{r43}+M_B(F_3)+M_3=0 \quad \Rightarrow M^B_{r43}$	$\begin{cases} \sum F_x(2,\ 3)=0 \\ \quad -R_{12}\sin\varphi_2+F_{2x}+F_{3x}-R_{43}\sin\varphi_3=0 \\ \sum F_y(2,\ 3)=0 \\ \quad R_{12}\cos\varphi_2+F_{2y}+F_{3y}+R_{43}\cos\varphi_3=0 \end{cases}$ $\Downarrow$ $R_{12},\ R_{43}$ $\sum F_x(2)=0 \quad R_{12x}+F_{2x}+R_{32x}=0 \Rightarrow R_{32x}$ $\sum F_y(2)=0 \quad R_{12y}+F_{2y}+R_{32y}=0 \Rightarrow R_{32y}$ $\sum M_B(2)=0$ $M^B_{r12}+F_{2x}(y_B-y_{O_2})-F_{2y}(x_B-x_{O_2})+M_2=0$ $\Downarrow$ M^B_{r12} $\sum M_B(3)=0$ $M^B_{r43}+F_{3x}(y_B-y_{O_3})-F_{3y}(x_B-x_{O_3})+M_3=0$ $\Downarrow$ M^B_{r43}

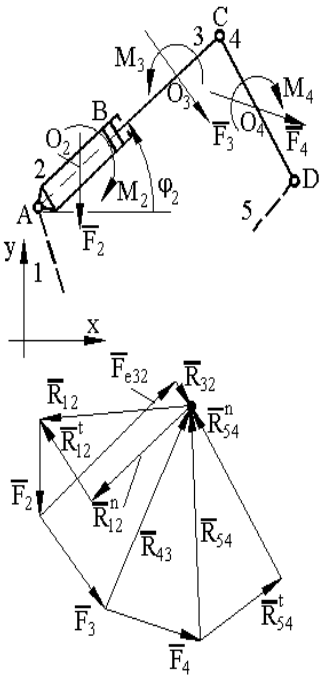
Tabelul 2.4 (continuare)

RTT (0/2/2, aspectul 5)  	$\sum \bar{F}(3)=0$ $\bar{R}_{23}+\bar{F}_3+\bar{R}_{43}=0 \quad \Rightarrow \bar{R}_{23},\ \bar{R}_{43}$ $\sum \bar{F}(2,\ 3)=0$ $\bar{R}_{12}+\bar{F}_2+\bar{F}_3+\bar{R}_{43}=0 \quad \Rightarrow \bar{R}_{12}$ $\sum M_A(2)=0$ $M^A_{r32}h_{32}+M_A(F_2)+M_2=0 \Rightarrow M^A_{r32}$ $\sum M_A(2,\ 3)=0$ $M^A_{r43}+M_A(F_2)+M_2+M_A(F_3)+M_3=0$ $\Downarrow$ M^A_{r43}	$\begin{cases} \sum F_x(3)=0 \\ -R_{23}\sin\varphi_2+F_{3x}-R_{43}\sin\varphi_3=0 \\ \sum F_y(3)=0 \\ R_{23}\cos\varphi_2+F_{3y}+R_{43}\cos\varphi_3=0 \end{cases}$ $\Downarrow$ $R_{23},\ R_{43}$ $\sum F_x(2,3)=0;\ R_{12x}+F_{2x}+F_{3x}+R_{43x}=0 \Rightarrow R_{12x}$ $\sum F_y(2,\ 3)=0;\ R_{12y}+F_{2y}+F_{3y}+R_{43y}=0 \Rightarrow R_{12y}$ $\sum M_A(2)=0;\ M^A_{r32}+F_{2x}(y_A-y_{O_2})-$ $-F_{2y}(x_A-x_{O_2})+M_2=0 \quad \Rightarrow M^A_{r32}$ $\sum M_A(2,\ 3)=0$ $M^A_{r43}+F_{2x}(y_A-y_{O_2})-F_{2y}(x_A-x_{O_2})+M_2+$ $+F_{3x}(y_A-y_{O_3})-F_{3y}(x_A-x_{O_3})+M_3=0$ $\Downarrow$ M^A_{r43}

Tabelul 2.4 (continuare)

R (1/1/1) 	$\sum \overline{F}(2)=0$ $\overline{R}_{12}+\overline{F}_2=0 \quad \Rightarrow \overline{R}_{12}$ $\sum M_A(2)=0$ $M_e+M_A(F_2)+M_2=0 \quad \Rightarrow M_e$	$\sum F_x(2)=0$ $R_{12x}+F_{2x}=0 \quad \Rightarrow R_{12x}$ $\sum F_y(2)=0$ $R_{12y}+F_{2y}=0 \quad \Rightarrow R_{12y}$ $\sum M_A(2)=0$ $M_e+F_{2x}(y_A-y_{O_2})-F_{2y}(x_A-x_{O_2})+M_2=0$ $\Downarrow$ M_e
RTRR (1/2/2)	$\overline{R}_{12}\left\langle \begin{matrix} \overline{R}^n_{12} // AC \\ \overline{R}^t_{12} \perp AC \end{matrix}\right.$ $\quad \overline{R}_{54}\left\langle \begin{matrix} \overline{R}^n_{54} // DC \\ \overline{R}^t_{54} \perp DC \end{matrix}\right.$ $\sum M_C(2,\ 3)=0$ $R^t_{12}l_{AC}+M_C(F_2)+M_2+M_C(F_3)+M_3=0$ $\Rightarrow R^t_{12}$ $\sum M_C(4)=0$ $R^t_{54}l_{DC}+M_C(F_4)+M_4=0 \Rightarrow R^t_{54}$	$\left\{ \begin{matrix} \sum M_C(2,\ 3)=0 \\ R_{12x}(y_C-y_A)-R_{12y}(x_C-x_A)+ \\ +F_{2x}(y_C-y_{O_2})-F_{2y}(x_C-x_{O_2})+M_2+ \\ +F_{3x}(y_C-y_{O_3})-F_{3y}(x_C-x_{O_3})+M_3=0 \\ \sum M_C(4)=0 \\ R_{54x}(y_C-y_D)-R_{54y}(x_C-x_D)+ \\ +F_{4x}(y_C-y_{O_4})-F_{4y}(x_C-x_{O_4})+M_4=0 \end{matrix} \right.$

Tabelul 2.4 (continuare)

	$\sum\overline{F}(2,\ 3,\ 4)=0$ $\overline{R}_{12}^n+\overline{R}_{12}^t+\overline{F}_2+\overline{F}_3+\overline{F}_4+\overline{R}_{54}^n+\overline{R}_{54}^t=0$ $\Downarrow$ $\overline{R}_{12}^n,\ \overline{R}_{54}^n$ $\sum\overline{F}(2,\ 3)=0$ $\overline{R}_{12}+\overline{F}_2+\overline{F}_3+\overline{R}_{43}=0 \quad \Rightarrow \overline{R}_{43}$ $\sum\overline{F}(2)=0$ $\overline{R}_{12}+\overline{F}_2+\overline{F}_{e32}+\overline{R}_{32}=0$ $\Rightarrow \overline{F}_{e32}, \overline{R}_{32}$ $\sum M_A(2)=0$ $M_{r32}^A h_{32}+M_A(F_2)+M_2=0 \Rightarrow M_{r32}^A$	$\begin{cases}\sum F_x(2,\ 3,\ 4)=0 \\ \quad R_{12x}+F_{2x}+F_{3x}+F_{4x}+R_{54x}=0 \\ \sum F_y(2,\ 3,\ 4)=0 \\ \quad R_{12y}+F_{2y}+F_{3y}+F_{4y}+R_{54y}=0\end{cases}$ $\Downarrow$ $R_{12x},\ R_{12y},\ R_{54x},\ R_{54y}$ $\sum F_x(2,3)=0;\ R_{12x}+F_{2x}+F_{3x}+R_{43x}=0 \Rightarrow R_{43x}$ $\sum F_y(2,\ 3)=0;\ R_{12y}+F_{2y}+F_{3y}+R_{43y}=0 \Rightarrow R_{43y}$ $\begin{cases}\sum F_x(2)=0 \\ \quad R_{12x}+F_{2x}+F_{e32}\cos\varphi_2-R_{32}\sin\varphi_2=0 \\ \sum F_y(2)=0 \\ \quad R_{12y}+F_{2y}+F_{e32}\sin\varphi_2+R_{32}\cos\varphi_2=0\end{cases}$ $\Downarrow$ $F_{e32},\ R_{32}$ $\sum M_A(2)=0;\ M_{r32}^A+F_{2x}(y_A-y_{O_2})-$ $-F_{2y}(x_A-x_{O_2})+M_2=0 \quad \Rightarrow M_{r32}^A$

2.2.2.2. Mecanismul patrulater articulat plan

Se aplică, pentru început, **modul global** de abordare a analizei cinetostatice, prin procedeul analitic. Se scrie, pentru fiecare element mobil (Fig.2.43), câte o ecuație de forțe şi una de momente

$$\sum \overline{F}(1) = 0\,;\ \overline{R}_{41} + \overline{F}_1 + \overline{R}_{21} = 0$$

$$\sum \overline{F}(2) = 0\,;\ \overline{R}_{12} + \overline{F}_2 + \overline{R}_{32} = 0$$

$$\sum \overline{F}(3) = 0\,;\ \overline{R}_{43} + \overline{F}_3 + \overline{R}_{23} = 0$$

$$\sum \overline{M}_A(1) = 0\,;\quad \overline{R}_{21} \times \overline{BA} + \overline{F}_1 \times \overline{O_1A} + \overline{M}_1 + \overline{M}_e = 0$$

$$\sum \overline{M}_B(2) = 0\,;\quad \overline{R}_{32} \times \overline{CB} + \overline{F}_2 \times \overline{O_2B} + \overline{M}_2 = 0$$

$$\sum \overline{M}_D(3) = 0\,;\quad \overline{R}_{23} \times \overline{CD} + \overline{F}_3 \times \overline{O_3D} + \overline{M}_3 = 0$$

Sistemul vectorial se transformă într-un sistem scalar format din 9 ecuații care conțin toate necunoscutele problemei - reacțiunile din cele patru cuple şi momentul de echilibrare. Sistemul scalar are forma

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ y_B - y_A & -(x_B - x_A) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & y_C - y_B & -(x_C - x_B) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y_D - y_C & -(x_D - x_C) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} R_{12x} \\ R_{12y} \\ R_{23x} \\ R_{23y} \\ R_{34x} \\ R_{34y} \\ R_{14x} \\ R_{14y} \\ M_e \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ -F_{2x} \\ -F_{2y} \\ F_{3x} \\ F_{3y} \\ -F_{1x}(y_A - y_{O_1}) + F_{1y}(x_A - x_{O_1}) - M_1 \\ -F_{2x}(y_B - y_{O_2}) + F_{2y}(x_B - x_{O_2}) - M_2 \\ -F_{3x}(y_D - y_{O_3}) + F_{3y}(x_D - x_{O_3}) - M_3 \end{vmatrix} \qquad (2.97)$$

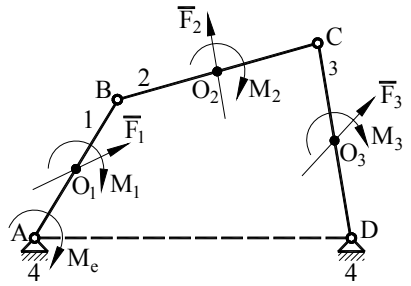


Fig. 2.43

Se efectuează, în continuare, analiza cinetostatică pentru acelaşi mecanism, utilizând **procedeele grupelor structurale** componente. Mecanismul conţine o grupă 1/1/1, R (formată din elementul 1 şi cupla A) şi o grupă 0/2/2, RRR (elementele 2, 3 şi cuplele B, C, D) care participă, în această ordine, la formarea sa. Aşa cum am arătat, grupele se tratează în ordine inversă în raport cu ordinea de formare. Se aplică, prin urmare, procedeul indicat în Tab.2.4 pentru grupa RRR. Se scriu următoarele ecuaţii de echilibru

$$\sum \overline{F}(2,3)=0\,; \quad \overline{R}_{12}+\overline{F}_2+\overline{F}_3+\overline{R}_{43}=0$$
$$\sum \overline{M}_C(2)=0\,; \quad \overline{R}_{12}\times\overline{BC}+\overline{F}_2\times\overline{O_2C}+\overline{M}_2=0$$
$$\sum \overline{M}_C(3)=0\,; \quad \overline{R}_{43}\times\overline{DC}+\overline{F}_3\times\overline{O_3C}+\overline{M}_3=0$$

Prin transformare scalară se ajunge la un sistem format din 4 ecuaţii,

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ y_C-y_B & -(x_C-x_B) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y_C-y_D & -(x_C-x_D) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} R_{12x} \\ R_{12y} \\ R_{43x} \\ R_{43x} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -F_{2x}-F_{3x} \\ -F_{2y}-F_{3y} \\ -F_{2x}(y_C-y_{O_2})+F_{2y}(y_C-y_{O_2})-M_2 \\ -F_{3x}(y_C-y_{O_3})+F_{3y}(y_C-y_{O_3})-M_3 \end{vmatrix} \qquad (2.98)$$

cea de a treia reacţiune ($\overline{R}_{32}$) rezultă imediat din ecuaţia

$$\sum \overline{F}(2)=0\,; \qquad \overline{R}_{12}+\overline{F}_2+\overline{R}_{32}=0$$
$$R_{12x}+F_{2x}+R_{32x}=0 \Rightarrow R_{32x}$$
$$R_{12y}+F_{2y}+R_{32y}=0 \Rightarrow R_{32y}$$

Se trece, apoi, la grupa R, având în vedere că reacțiunea determinată $\overline{R}_{21} = -\overline{R}_{12}$ este cunoscută

$$\sum \overline{F}(1) = 0; \qquad \overline{R}_{41} + \overline{F}_1 + \overline{R}_{21} = 0$$

$$R_{41x} + F_{1x} + R_{21x} = 0 \Rightarrow R_{41x}$$

$$R_{41y} + F_{1y} + R_{21y} = 0 \Rightarrow R_{41y}$$

$$\sum \overline{M}_A(1) = 0; \qquad \overline{R}_{21} \times \overline{BA} + \overline{F}_1 \times \overline{O_1A} + \overline{M}_1 + \overline{M}_e = 0$$

$$M_e = -(R_{21x}(y_A - y_B) - R_{21y}(x_A - x_B) +$$

$$+ F_{1x}(y_A - y_{O_1}) - F_{1y}(x_A - x_{O_1}) + M_1)$$

Comparând cele două procedee şi, în special, sistemele de ecuații (2.97) şi (2.98), se observă avantajul tratării pe grupe sub aspectul simplificării procesului de rezolvare numerică.

2.2.3. Analiza cinetostatică în prezența frecării

2.2.3.1. Considerații generale

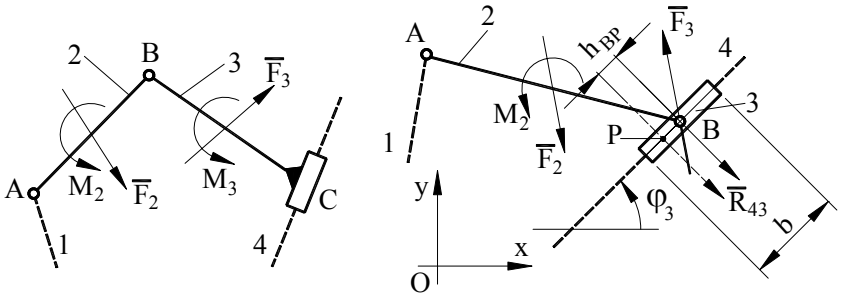
Modelul matematic al analizei cinetostatice cu frecare este constituit din ecuații de echilibru în care, pe lângă celelalte forțe, figurează şi forțele de frecare. Aşa cum s-a arătat (par. 2.2.1.4), în cazul cuplelor de rotație reacțiunea normală şi forța de frecare se consideră cumulate, astfel încât, torsorul forțelor de legătură, redus în centrul cuplei, este ($\overline{R}^r_{12}$, $\overline{M}_{f12}$). Momentul de frecare M_{f12} se calculează cu relația (2.90) care este neliniară în raport cu reacțiunile R^r_{12x} şi R^r_{12y}. În consecință, analiza cinetostatică cu frecare este o problemă neliniară.

În cazul cuplelor de translație reacțiunea normală şi forța de frecare se consideră separat, iar sistemul forțelor de legătură este ($\overline{R}_{12}$, $\overline{F}_{f12}$, M_{r12}). Forța de frecare $\overline{F}_{f12}$ se determină cu formula (2.92) dacă $|R_{12}| > \frac{2 \cdot |M_{r12}|}{b}$ (**cazul (1)**) sau cu formula (2.94)) dacă $|R_{12}| < \frac{2 \cdot |M_{r12}|}{b}$ (**cazul (2)**) (b - lungimea zonei de contact). Pentru a stabili cazul în care se află cupla, se efectuează analiza cinetostatică fără frecare şi se determină valorile aproximative pentru $|R_{12}|$ şi $|M_{r12}|$. După cum am arătat, cazul al doilea trebuie evitat, deoarece forțele de frecare sunt mai mari decât în primul caz. Vom arăta cum se poate realiza acest lucru printr-o proiectare rațională a schemei cinematice şi de încărcare a mecanismului.

Se consideră grupa structurală RRT (Fig.2.44.a). Referindu-ne la cupla de translație C, **cazul (1)** se înregistrează atunci când punctul de aplicație al reacțiunii unice $\overline{R}_{43}$ se află în zona de contact a cuplei. Este uşor de demonstrat că această cerință se obține când sunt îndeplinite condițiile:

• Articulația interioară (B) trebuie să fie amplasată pe axa de translație şi în interiorul zonei de contact, formând un element (3) cu dimensiuni reduse (Fig.2.44.b). Aşa cum s-a precizat în par. 1.3.2 această formă a grupei structurale se numeşte redusă sau degenerată.

• Încărcarea elementului redus (3) trebuie să se facă printr-o forță unică, al cărui suport să treacă prin articulația interioară (B). Deoarece elementul redus are, în general, dimensiuni şi masă mici, forțele de greutate şi de inerție sunt neglijabile, astfel că respectarea acestei condiții depinde numai de sistemul forțelor aplicate.



a) ***b)***

Fig. 2.44

Se scrie ecuația de momente pentru elementul 3 în raport cu C (centrul zonei de contact) în ipoteza că torsorul de reacțiune, din cupla de translație, se reduce la reacțiunea unică $\overline{R}_{43}$,

$$\sum \overline{M}_C(3) = 0; \quad M_C(\overline{R}_{23}) + M_C(\overline{F}_3) + M_C(\overline{R}_{43}) + M_3 = 0$$

Dacă sunt îndeplinite condițiile anterioare (Fig.2.44.b), $M_C(\overline{R}_{23}) = 0$, $M_C(\overline{F}_3) = 0$, $M_3 = 0$, ceea ce conduce la concluzia că şi $M_C(\overline{R}_{43}) = 0$. Aceasta înseamnă că punctul de aplicație al reacțiunii $\overline{R}_{43}$ se află în C, deci în interiorul zonei de contact. Cel mai reprezentativ mecanism, care conține grupa structurală RRT, este mecanismul manivelă - piston. În Fig.2.45 sunt reprezentate mai multe scheme cinematice şi de încărcare ale acestui mecanism indicându-se care sunt corecte şi care sunt greşite din punctul de vedere al respectării condițiilor formulate anterior.

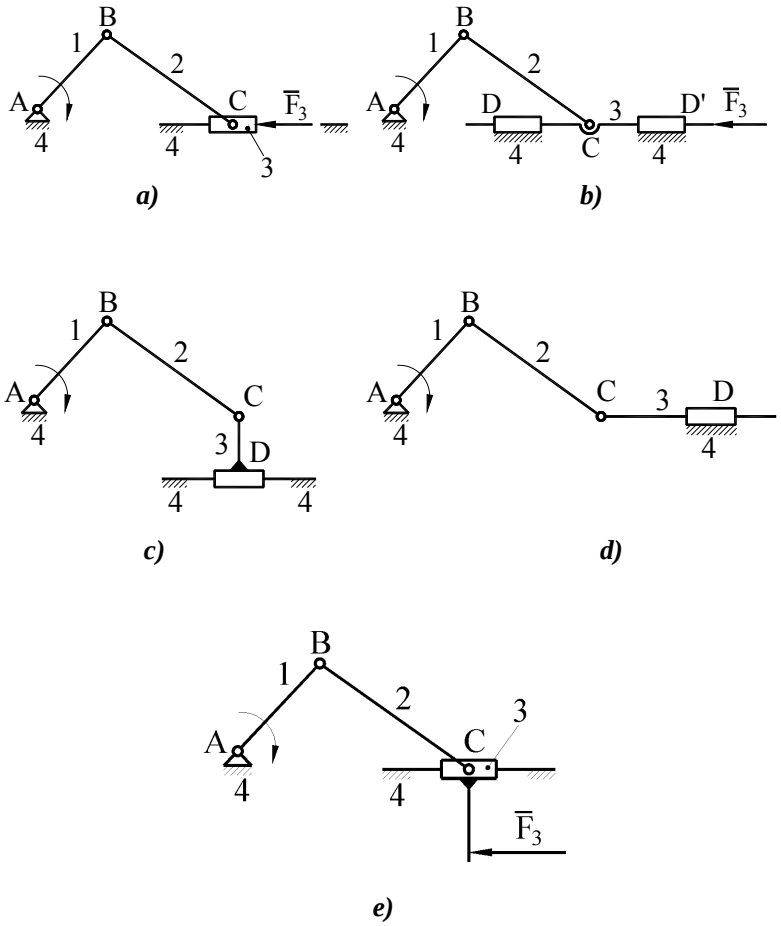


Fig. 2.45

a), b) *scheme cinematice şi încărcări corecte;*
c) *schemă cinematică greşită – articulaţia C nu se află pe axa de translaţie;*
d) *schemă cinematică greşită – articulaţia C nu se află în zona de contact a cuplei de translaţie;*
e) *încărcare greşită – forţa* F_3 *nu trece prin C.*

Se consideră, acum, grupa structurală RTR (Fig.2.46). Pentru a încadra cupla B în **cazul (1)** trebuie îndeplinite aceleaşi condiţii, menţionate la grupa RRT, cu observaţia că elementul redus poate fi oricare dinte cele două elemente ale grupei. Cel mai reprezentativ mecanism care conţine grupa RTR este mecanismul cu culisă de rotaţie. În Fig.2.47 sunt analizate mai multe variante ale acestui mecanism şi sunt indicate cele corecte şi cele greşite.

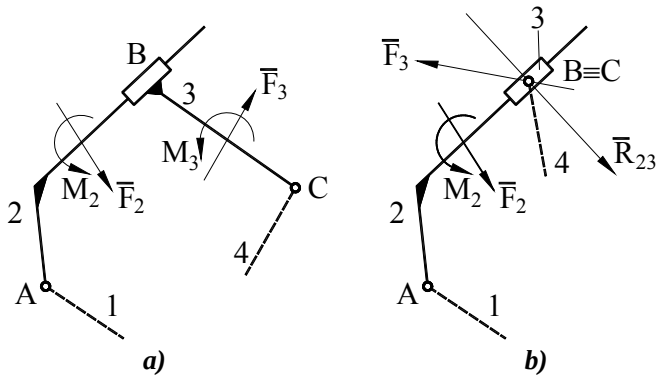


Fig. 2.46

În concluzia celor arătate considerăm că în toate mecanismele proiectate corect situaţia forţelor de legătură din cuplele de translaţie se încadrează în **cazul (1)** şi, ca urmare, în ecuaţiile de echilibru vom folosi numai formula (2.93).

Când coeficienţii de frecare din cuplele de rotaţie sunt foarte mici (de ordinul 10^{-3}), ceea ce se înregistrează la articulaţiile cu rulmenţi, forţele de frecare din aceste cuple se pot neglija, luând în considerare numai frecarea din cuplele de translaţie. Procedând în felul acesta, operaţia de analiză cinetostatică este mult simplificată şi are caracter liniar.

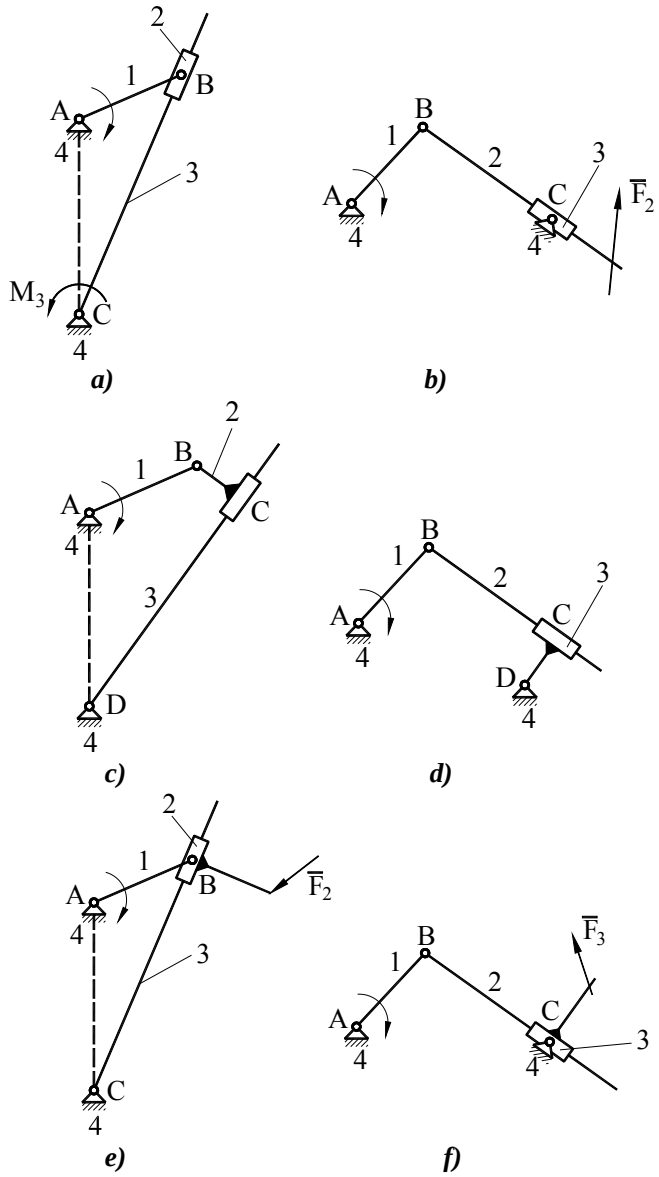


Fig. 2.47

a), b) *scheme cinematice şi încărcări corecte;*
c), d) *scheme cinematice greşite – nici una dintre articulații nu se află în zona de contact a cuplei de translație;*
e), f) *încărcări greşite –este încărcat necorespunzător elementul redus.*

2.2.3.2. Modelul matematic

- **Grupa RRT**

Pentru a exemplifica modul de lucru şi pentru a oferi o privire comparativă asupra celor două tipuri de analiză cinetostatică (cu şi fără frecare), vom trata, din nou, grupa structurală 0/2/2, RRT. Ţinând seama de recomandările din paragraful precedent, se ia în considerare forma redusă a grupei (Fig.2.44.b).

Se scriu următoarele ecuaţii de echilibru

$$\sum \overline{M}_B(2) = 0 \;;\quad \overline{R}^r_{12} \times \overline{AB} + \overline{M}_{f12} + \overline{M}_{f32} + \overline{F}_2 \times \overline{O_2B} + \overline{M}_2 = 0$$
$$\sum \overline{F}(2) = 0 \;;\quad \overline{R}^r_{12} + \overline{R}^r_{32} + \overline{F}_2 = 0$$
$$\sum \overline{F}(3) = 0 \;;\quad \overline{R}^r_{23} + \overline{R}_{43} + \overline{F}_{f43} + \overline{F}_3 = 0$$

Prin transformarea ecuaţiilor vectoriale în ecuaţii scalare, după modelul de la anliza cinetostatică fără frecare, se ajunge la următorul sistem

$$\begin{aligned}
&R^r_{12x}(y_B - y_A) - R^r_{12y}(x_B - x_A) + s_{12} r_A \sqrt{(R^r_{12x})^2 + (R^r_{12y})^2}\,\sin\varphi_A + \\
&\quad + s_{32} r_B \sqrt{(R^r_{32x})^2 + (R^r_{32y})^2}\,\sin\varphi_B + F_{2x}(y_B - y_{O_2}) - F_{2y}(x_B - x_{O_2}) + M_2 = 0 \\
&R^r_{12x} + R^r_{32x} + F_{2x} = 0 \\
&R^r_{12y} + R^r_{32y} + F_{2y} = 0 \\
&-R^r_{32x} - R_{43}\sin\varphi_3 + s_{43}\mu_C \left| R_{43} \right| \cos\varphi_3 + F_{3x} = 0 \\
&-R^r_{32y} + R_{43}\cos\varphi_3 + s_{43}\mu_C \left| R_{43} \right| \sin\varphi_3 + F_{3y} = 0
\end{aligned} \tag{2.99}$$

Sistemul (2.99) este neliniar, datorită ecuaţiilor de momente, şi se rezolvă printr-un procedeu numeric, rezultând necunoscutele R^r_{12x}, R^r_{12y}, R^r_{32x}, R^r_{32y}, R_{43}.

Momentul M_{r43} rezultă din ecuaţia de momente pentru elementul 3 în raport cu punctul B. Forţele $\overline{R}_{23}$, $\overline{F}_3$ şi $\overline{F}_{f43}$ trec prin B (Fig.2.44.b), deci momentele lor sunt nule, astfel încât, ecuaţia de momente are forma

$$M_{r43} + M_{f23} = 0$$
$$M_{r43} = -M_{f23} = -s_{23} r_B \left| \overline{R}^r_{32} \right| \sin\varphi_B$$

Poziţia punctului P, de reducere a reacţiunii unice R_{43}, este determinată de distanţa h_{BP},

$$h_{BP} = \frac{\left| M_{r43} \right|}{\left| R_{43} \right|} = \frac{\left| M_{f23} \right|}{\left| R_{43} \right|}.$$

Deoarece momentul M_{f23} este foarte mic, distanța h_{BP} rezultă, de asemenea, foarte mică astfel încât punctul P se găseşte, foarte probabil, în zona de contact. Deci, cupla de translație se încadrează în **cazul (1)**, iar formula utilizată pentru forța de frecare (2.92) este cea corectă. Desigur, are importanță şi lungimea patinei (b), deoarece cu cât aceasta este mai mare, probabilitatea ca punctul P să fie în zona de contact este mai mare. Având în vedere că forța de frecare din cupla de translație este invers proporțională cu lungimea b, este recomandabil şi din acest punct de vedere, ca aceasta să aibă o valoare cât mai mare.

■ Metoda aproximațiilor succesive

Am arătat că pentru rezolvarea sistemelor de ecuații care intervin în analiza cinetostatică, în prezența frecării, se utilizează metode numerice iterative. O metodă tradițională, utilizată chiar înainte de dezvoltarea modernă a tehnicii de calcul, este metoda aproximațiilor succesive. Această metodă presupune parcurgerea mai multor trepte de aproximare conform schemei logice din Fig.2.48. În prima treaptă de aproximare (I = 1, blocul 1) forțele de frecare se consideră egale cu zero (blocul 2) şi se efectuează analiza cinetostatică fără frecare (blocul 3) rezultând reacțiunile normale. După fiecare treaptă, se testează abaterile relative (blocul 4) şi se trece la treapta următoare (blocul 5) sau se opreşte procesul (blocul 7). Desigur, după prima treaptă se trece la treapta a 2-a. Se calculează forțele de frecare în funcție de reacțiunile normale de la treapta precedentă (blocul 6) şi se aplică, din nou, analiza cinetostatică (blocul 3) considerând forțele de frecare cu valori cunoscute. Abaterile relative se calculează cu formula:

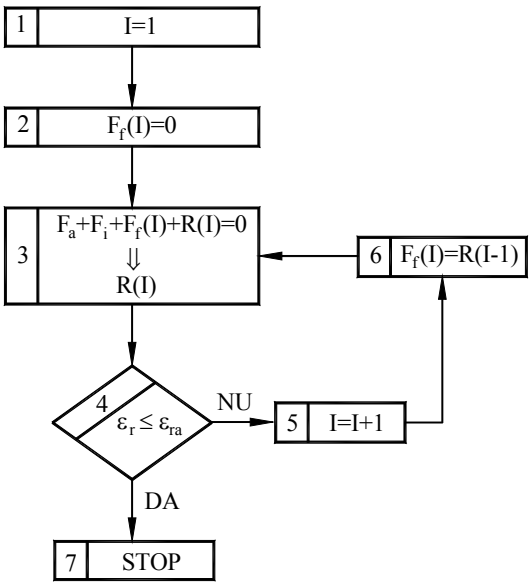


Fig. 2.48

$$\varepsilon = \frac{\left| R_{mn}(I) - R_{mn}(I-1) \right|}{R_{mn}} \ ,$$

în care R_{mn} este o reacțiune oarecare, iar I treapta de aproximare. Este important de observat că în analiza cinetostatică, aferentă fiecărei trepte de aproximație, necunoscutele sunt numai reacțiunile normale, forțele de frecare fiind considerate cunoscute. În felul acesta modelul matematic este liniar şi nu se deosebeşte, formal, de cel folosit la cinetostatica fără frecare. Procedeul converge cu atât mai rapid, cu cât raportul dintre mărimea forțelor de frecare şi cea a reacțiunilor este mai mic. Uzual acest raport este mai mic decât 1/10, ceea ce determină aplicarea a 2 - 3 trepte de aproximație în condițiile unei abateri relative admisibile de 0,05.

2.2.3.3. Fenomenul de autoblocare

- **Explicarea producerii fenomenului de autoblocare**

Fenomenul de autoblocare se manifestă prin oprirea sau imposibilitatea pornirii mecanismului, în anumite poziții, oricât de mare ar fi momentul aplicat elementului conducător. Această situatie se explică prin faptul că transmiterea forțelor în mecanism se face defectuos, astfel încât, pentru a învinge forțele de frecare, momentul de echilibrare tebuie tinde, teoretic, la infinit.

Pentru a studia modul în care se produce acest fenomen, să revenim la analiza cinetostatică a grupei RRT (par. 2.2.3.2). Pentru simplificare, se neglijează frecarea în cuplele de rotație şi se consideră numai forța de frecare din cupla de translație. În această ipoteză, sistemul de ecuații inițial este

$$\sum \overline{M}_B(2) = 0 \ ; \ \ \overline{R}_{12} \times \overline{AB} + \overline{F}_2 \times \overline{O_2B} + \overline{M}_2 = 0$$

$$\sum \overline{F}(2,3) = 0 \ ; \ \ \overline{R}^r_{12} + \overline{R}_{43} + \overline{F}_{f43} + \overline{F}_2 + \overline{F}_3 = 0$$

$$\begin{cases} R_{12x}(y_B - y_A) - R_{12y}(x_B - x_A) = -(F_{2x}(y_B - y_{O_2}) - F_{2y}(x_B - x_{O_2}) + M_2) \\ R_{12x} - R_{43}\sin\varphi_3 + s_{43}\mu_C \left| R_{43} \right| \cos\varphi_3 = -F_{3x} \\ R_{12y} + R_{43}\cos\varphi_3 + s_{43}\mu_C \left| R_{43} \right| \sin\varphi_3 = -F_{3y} \end{cases} \qquad (2.100)$$

Deoarece necunoscuta R_{43} intervine şi sub forma $\left| R_{43} \right|$, ultimele două ecuații se scriu în mod diferit, în funcție de semnul ipotetic al reacțiunii R_{43}.

Dacă $R_{43} > 0$, sistemul (2.100) devine

$$\begin{cases} R_{12x}(y_B - y_A) - R_{12y}(x_B - x_A) = -(F_{2x}(y_B - y_{O_2}) - F_{2y}(x_B - x_{O_2}) + M_2) \\ R_{12x} - R_{43}\sin\varphi_3 + s_{43}\mu_C R_{43}\cos\varphi_3 = -F_{3x} \\ R_{12y} + R_{43}\cos\varphi_3 + s_{43}\mu_C R_{43}\sin\varphi_3 = -F_{3y} \end{cases} \qquad (2.101)$$

Dacă $R_{43} < 0$, sistemul (2.100) devine

$$\begin{cases} R_{12x}(y_B - y_A) - R_{12y}(x_B - x_A) = -(F_{2x}(y_B - y_{O_2}) - F_{2y}(x_B - x_{O_2}) + M_2 \\ R_{12x} - R_{43}\sin\varphi_3 - s_{43}\mu_C R_{43}\cos\varphi_3 = -F_{3x} \\ R_{12y} + R_{43}\cos\varphi_3 - s_{43}\mu_C R_{43}\sin\varphi_3 = -F_{3y} \end{cases} \tag{2.102}$$

Sistemele (2.101) şi (2.102) liniare, în necunoscutele R_{12x}, R_{12y}, R_{43} se rezolvă şi se reţine soluţia care corespunde cu ipoteza iniţială referitoare la R_{43}. Să presupunem, pentru început, că sistemul (2.101) livrează soluţia corectă. Determinantul acestui sistem, D_1, este

$$D_1 = (y_B - y_A)(\sin\varphi_3 - s_{43}\mu_C\cos\varphi_3) + (x_B - x_A)(\cos\varphi_3 + s_{43}\mu_C\sin\varphi_3)$$

Dacă $D_1 \neq 0$, sistemul este compatibil determinat, iar dacă $D_1 = 0$, mecanismul se autoblochează deoarece reacţiunile R_{12x}, R_{12y} şi R_{43} care constituie necunoscutele problemei, ca şi forţele de frecare, tind la infinit. Punând condiţia $D_1 = 0$ şi având în vedere că $\mu_C = \mathrm{tg}\varphi_C$ rezultă

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = -\frac{1}{\mathrm{tg}(\varphi_3 - s_{43}\varphi_C)} \tag{2.103}$$

Pentru cele două cazuri posibile, $s_{43} = +1$ şi $s_{43} = -1$, formula (2.103) devine

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = -\frac{1}{\mathrm{tg}(\varphi_3 - \varphi_C)} \tag{2.104}$$

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = -\frac{1}{\mathrm{tg}(\varphi_3 + \varphi_C)} \tag{2.105}$$

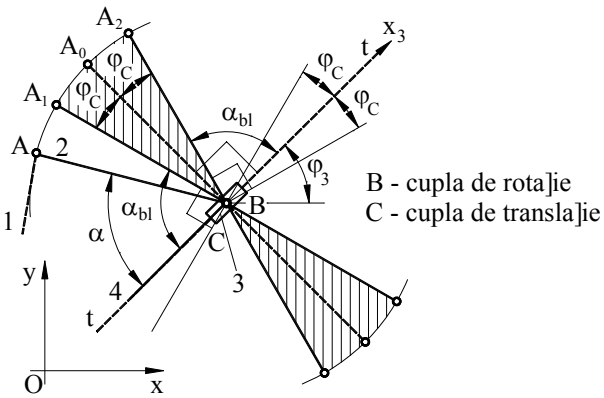


Fig. 2.49

Formulele (2.104) şi (2.105) arată că grupa structurală se blochează în două configuraţii (configuraţia este poziţia relativă a unui element al grupei faţă de celălalt) - când dreapta AB este perpendiculară pe o dreaptă înclinată faţă de Bx_3 cu unghiul φ_C în cele două sensuri. Cele două configuraţii de

blocare A_1B şi A_2B (Fig.2.49) sunt simetrice faţă de configuraţia critică A_0B, când AB este perpendiculară pe Bx_3. La aceeaşi concluzie se ajunge dacă se ia în considerare ipoteza că sistemul (2.102) livrează soluţia corectă.

Pentru a caracteriza o configuraţie oarecare se foloseşte un parametru care, pentru această grupă, este unghiul α format între elementul AB şi axa de translaţie tt (Bx_3). Unghiul de configuraţie la care se produce blocarea se numeşte unghi de blocare, notat α_{bl}. În cazul nostru $\alpha_{bl} = \frac{\pi}{2} - \varphi_C$. Intervalul, definit ca o vecinătate a configuraţiei critice, care este limitat de configuraţiile de blocare, este domeniul de blocare, în care funcţionarea nu este posibilă. În interiorul domeniului de blocare, sistemul (2.100) nu are soluţii. Pentru a evita domeniul de blocare, unghiul de configuraţie trebuie să îndeplinească condiţia $\alpha < \alpha_{bl}$. Pentru a înţelege mai bine iterpretarea fizică a modelului matematic, să studiem funcţionarea unui mecanism manivelă - piston (Fig.2.50) care conţine această grupă structurală. Am neglijat forţele de inerţie şi de greutate şi am considerat o singură forţă aplicată F_3, cu caracter rezistent (se opune vitezei punctului C). În aceste condiţii am determinat, folosind procedeul descris anterior, reacţiunile $\overline{R}_{12}(R_{12x}, R_{12y})$, $\overline{R}_{43}$ şi momentul de echilibrare M_e pentru un şir de poziţii succesive ale elementului conducător. Reacţiunea $\overline{R}_{43}$ s-a determinat în cele două ipoteze precizate anterior. Astfel, considerând $R_{43} > 0$ s-a obţinut valoarea R_{43p}, iar pentru $R_{43} < 0$, R_{43n}. Variaţia lor, în funcţie de unghiul φ_1, este redată în diagrama din Fig.2.51. Se observă că, atât R_{43p}, cât şi R_{43n} sunt negative în intervalul ciclului cinematic $\varphi_1 \in [0, 2\pi]$. Aceasta înseamnă că ipoteza corectă este $R_{43} < 0$, iar $R_{43} = R_{43n}$. În această ipoteză s-au

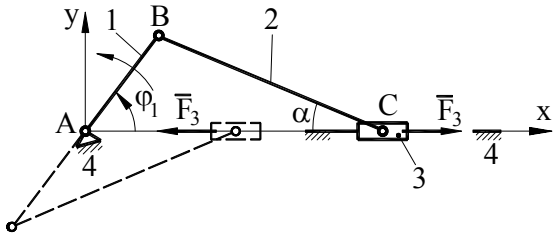


Fig. 2.50

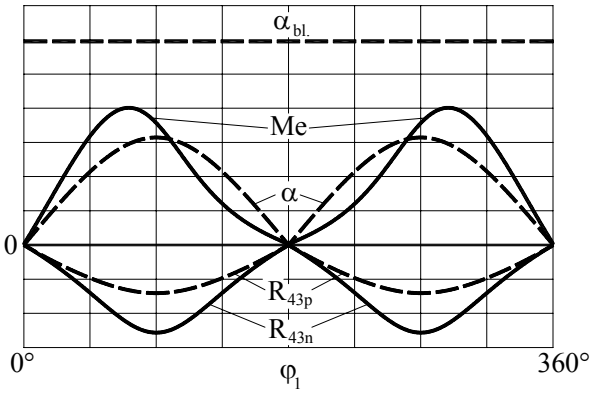


Fig. 2.51

determinat, apoi, celelalte reacțiuni şi momentul de echilibrare. În aceeaşi diagramă sunt trasate curba de variație a unghiului de configurație $\alpha(\varphi_1)$ şi a momentului de echilibrare $M_e(\varphi_1)$. Se observă că este îndeplinită condiția $\alpha < \alpha_{bl}$, astfel încât mecanismul nu înregistrează fenomenul de autoblocare. În diagrama din Fig.2.52 sunt trasate aceleaşi curbe în situația în care condiția $\alpha < \alpha_{bl}$ nu este îndeplinită pe întreg intervalul ciclului cinematic. Din această diagramă se observă că în punctele $\alpha = \alpha_{bl}$, reacțiunea $R_{43} = R_{43n}$ tinde la infinit şi îşi schimbă semnul.

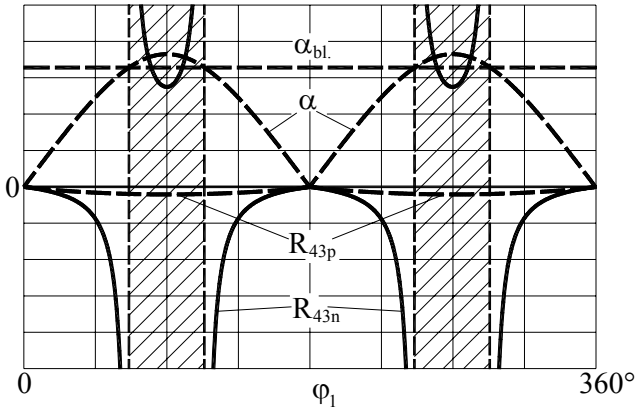


Fig. 2.52

De aceea, în zonele cu $\alpha < \alpha_{bl}$, $R_{43p} < 0$ şi $R_{43n} > 0$ şi, deci, nici una dinte ipotezele inițiale nu se confirmă. Aceasta înseamnă că sistemul de ecuații nu are soluții, în aceste intervale, iar funcționarea mecanismului nu este posibilă. Curba $M_e(\varphi_1)$ este trasată separat, în Fig.2.53. Ca şi reacțiunea R_{43}, momentul de echilibrare tinde la infinit în punctele $\alpha = \alpha_{bl}$. În intervalele $\alpha < \alpha_{bl}$, această curbă nu este trasată deoarece mecanismul nu funcționează în aceste zone.

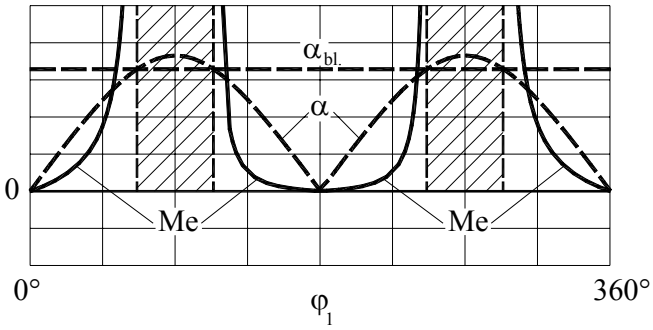


Fig. 2.53

Condiția $\alpha < \alpha_{bl}$, deşi permite evitarea autoblocării nu asigură o funcționare corespunzătoare deoarece în apropierea cinfigurațiilor de blocare, reacțiunile şi forțele de frecare au valori foarte mari. Pentru a evita acest neajuns unghiul de configurație α trebuie să îndeplinească următoarea condiție:

$$\alpha \leq \alpha_a \ (\alpha_a < \alpha_{bl}) \tag{2.106}$$

în care α_a este valoarea admisibilă a unghiului de configurație.

■ Analiza comportării grupelor structurale

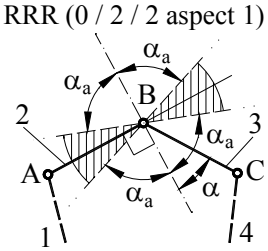
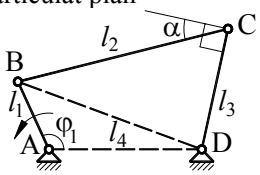
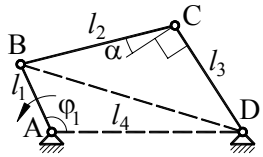
Observațiile legate de producerea fenomenului de autoblocare la grupa RRT sunt valabile, în general, pentru toate grupele structurale şi se pot sintetiza astfel.

Autoblocarea unei grupe structurale se produce într-o vecinătate simetrică a configurațiilor critice, delimitată de două configurații de blocare. Valoarea parametrului de configurație, corespunzătoare configurațiilor de blocare, se determină în funcție de parametri geometrici şi de frecare ai grupei. Evitarea autoblocării şi asigurarea unei funcționări favorabile din punct de vedere al transmiterii forțelor se realizează prin respectarea unor condiții limitative pentru parametrul de configurație.

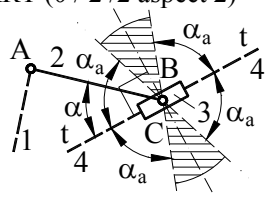
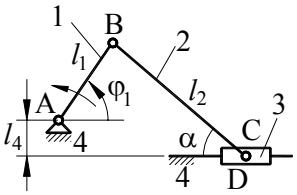
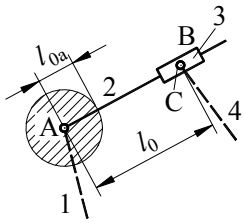
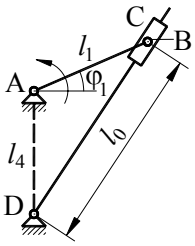
În Tab.2.5 se prezintă o analiză a grupelor structurale uzuale din punct de vedere al evitării autoblocării şi al calității transmiterii forțelor. În acest tabel se defineşte parametrul de configurație şi se precizează valoarea sa pentru configurația critică (rubrica 1.1). În cazul grupelor RRR, RRT şi RTRR acesta este un unghi (α), adoptat în aşa fel, încât să aibă valoarea $\frac{\pi}{2}$ atunci când configurația este critică. În cazul grupei RTR parametrul de configurație este o lungime (l_0), deoarece cupla interioară este de translație, iar poziția relativă dintre elemente se determină numai în felul acesta. Se indică, de asemenea, expresiile de calcul pentru parametrul de configurație de blocare (rubrica 1.2) fără a demonstra aceste relații. În fine, se formulează condiția de evitare a autoblocării şi cea de asigurare a calității transmiterii forțelor (rubrica 1.3). Cea de-a doua condiție este suficientă deoarece respectarea sa determină şi respectarea primei condiții. Menționăm că în cazul grupei conducătoare R (1/1/1) nu se poate produce fenomenul de autoblocare.

Cunoaşterea comportării grupelor uzuale permite aprecierea comportării mecanismelor. Astfel, pentru evitarea autoblocării şi pentru a asigura calitatea transmiterii forțelor, în cazul unui mecanism, toate grupele componente trebuie să respecte condițiile menționate. În Tab.2.5 se prezintă şi analiza mecanismelor reprezentative pentru fiecare grupă structurală.

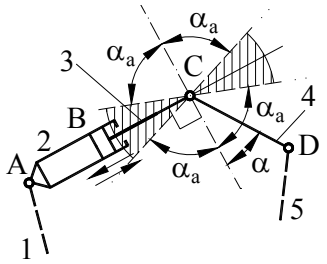
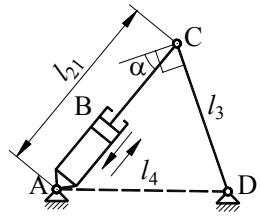
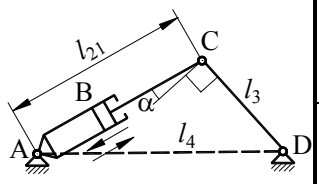
Tabelul 2.5

1	Schema grupei structurale cu domeniul de blocare	1.1	Definiția parametrului de configurație
		1.2	Expresia unghiului de blocare Notații: $r_{fA} = \mu_A \cdot r_A$
		1.3	Condiția de evitare a autoblocării şi de transmitere a forțelor
2	Mecanismul reprezentativ	2.1	Calculul parametrului de configurație curent la mecanismul reprezentativ
		2.2	Valoarea extremă a parametrului de configurație
		2.3	Valoarea recomandată pentru parametrul de configurație admisibil
1	RRR (0 / 2 / 2 aspect 1)  $l_2 = l_{AB}$ $l_3 = l_{BC}$	1.1	α - unghiul ascuțit format între un element (BC) şi perpendiculara pe celălalt elemet (AB). $\alpha_{cr} = \frac{\pi}{2}$
		1.2	$\alpha_{bl} = \arccos\left(\frac{r_{fA} + r_{fB}}{l_2}\right) +$ $+ \arccos\left(\frac{r_{fB} + r_{fC}}{l_3}\right) - \frac{\pi}{2}$
		1.3	$\alpha < \alpha_{bl}$ $\alpha \le \alpha_a \ (\alpha_a < \alpha_{bl})$
2	Mecanismul patrulater articulat plan  ***a)***	2.1	α - unghiul de presiune $\alpha = \left\lvert \frac{\pi}{2} - \sphericalangle BCD \right\rvert$ $\sphericalangle BCD = \arccos\left(\frac{l_2^2 + l_3^2 - l_{BD}^2}{2 l_2 l_3}\right)$ $l_{BD} = \sqrt{l_1^2 + l_4^2 - 2 l_1 l_4 \cos\varphi_1}$
	 ***b)***	2.2	$\alpha_{max} = \max(\alpha_1,\ \alpha_2)$ $\alpha_1 = \left\lvert \frac{\pi}{2} - \arccos\frac{l_2^2 + l_3^2 - (l_1 + l_4)^2}{2 l_2 l_3} \right\rvert$ $\alpha_2 = \left\lvert \frac{\pi}{2} - \arccos\frac{l_2^2 + l_3^2 - (l_1 - l_4)^2}{2 l_2 l_3} \right\rvert$
		2.3	$\alpha_a = 45^0 - 60^0$

Tabelul 2.5 (continuare)

1	RRT (0 / 2 /2 aspect 2)  $l_2 = l_{AB}$ B – cupla de rotație (2-3) C – cupla de translație	1.1	α - unghiul ascuțit format între elementul care are două cuple de rotație (AB) şi axa de translație (tt). $\alpha_{cr} = \frac{\pi}{2}$
		1.2	$\alpha_{bl} = \arccos\left(\frac{r_{fA} + r_{fB}}{l_2}\right) - \varphi_C$
		1.3	$\alpha < \alpha_{bl}$ $\alpha \le \alpha_a \ (\alpha_a < \alpha_{bl})$
2	Mecanismul manivelă – piston  	2.1	α - unghi de presiune $\alpha = \arcsin\frac{\lvert l_1 \sin\varphi_1 + l_4 \rvert}{l_2}$
		2.2	$\alpha_{max} = \arcsin\frac{l_1 + l_4}{l_2}$
		2.3	$\alpha_a = 30^0 - 45^0$
1	RTR (0 / 2 / 2 aspect 3)  B – cupla de translație C – cupla de rotație (3–4)	1.1	$l_0 = l_{AC}$ - distanța dintre centrele articulațiilor
		1.2	$l_{0\,bl} = \frac{r_{fA} + r_{fC}}{\cos\varphi_B}$
		1.3	$l_0 > l_{0\,bl}$ $l_0 \ge l_{0a} \ (l_{0a} > l_{0bl})$
2	Mecanismul cu culisă de rotație  	2.1	$l_0 = \sqrt{l_1^2 + l_4^2 + 2 l_1 l_4 \sin\varphi_1}$
		2.2	$l_{0\,min} = \lvert l_1 - l_4 \rvert$
		2.3	$l_{0a} = (0{,}1 - 0{,}2) \cdot l_1$

Tabelul 2.5 (continuare)

1	RTRR (1 / 2 / 2)  $l_4 = l_{CD}$ $l_{32} = l_{AC}$	1.1	α - unghiul ascuțit format între perpendiculara pe AC şi elementul CD sau între perpendiculara pe CD şi dreapta AC. $\alpha_{cr} = \frac{\pi}{2}$
		1.2	$\alpha_{bl} = \arccos\left(\frac{r_{fA} + r_{fC}}{l_{32}}\right) +$ $+ \arccos\left(\frac{r_{fC} + r_{fD}}{l_4}\right) - \frac{\pi}{2}$
		1.3	$\alpha < \alpha_{bl}$ $\alpha \le \alpha_a \ (\alpha_a < \alpha_{bl})$
2	Mecanismul cu cilindru oscilant  ***a)***	2.1	α - unghiul de presiune $\alpha = \left\lvert \frac{\pi}{2} - \sphericalangle ACD \right\rvert$ $\sphericalangle ACD = \arccos\left(\frac{l_{21}^2 + l_3^2 - l_4^2}{2 l_{21} l_3}\right)$
		2.2	$\alpha_{max} = \max(\alpha_1,\ \alpha_2)$ $\alpha_1 = \left\lvert \frac{\pi}{2} - \arccos\left(\frac{l_{21\,min}^2 + l_3^2 - l_4^2}{2 l_{21\,min} l_3}\right) \right\rvert$ $\alpha_2 = \left\lvert \frac{\pi}{2} - \arccos\left(\frac{l_{21\,max}^2 + l_3^2 - l_4^2}{2 l_{21\,max} l_3}\right) \right\rvert$
	 ***b)***	2.3	$\alpha_a = 45^0 - 60^0$

Astfel, se indică modul de calcul al parametrului de configurație curent (rubrica 2.1) şi a valorii extreme pentru acest parametru (rubrica 2.2), importantă pentru verificarea celor două condiții. În cazul mecanismelor patrulater, manivală - piston şi cu cilindru oscilant, unghiul de configurație are denumirea consacrată de **unghi de presiune**, care se va folosi în continuare. Se dau, de asemenea, recomandări privind valoarea unghiului de presiune admisibil şi, în cazul mecanismului cu culisă de rotație, a distanței de configurație admisibilă. Aceste

valori sunt mult depărtate de valorile de blocare, aşa încât calculul acestora din urmă nu are importanță prea mare.

Criteriul descris, prin care se apreciază comportarea mecanismului pe baza grupelor structurale componente, este foarte util în cazul mecanismelor complexe, formate din mai multe grupe structurale la care studiul global este greoi şi pretențios. Pentru exemplificare, în Fig.2.54 sunt reprezentate un mecanism din structura unei maşini de cusut (Fig.2.54.a) şi un mecanism de încărcător frontal (Fig.2.54.b). Pentru ambele mecanisme sunt puse în evidență grupele componente şi parametrii de configurație ai acestora care trebuie verificați cu ajutorul condițiilor 1.3 - Tab.2.5 în vederea asigurării unei funcționări corecte.

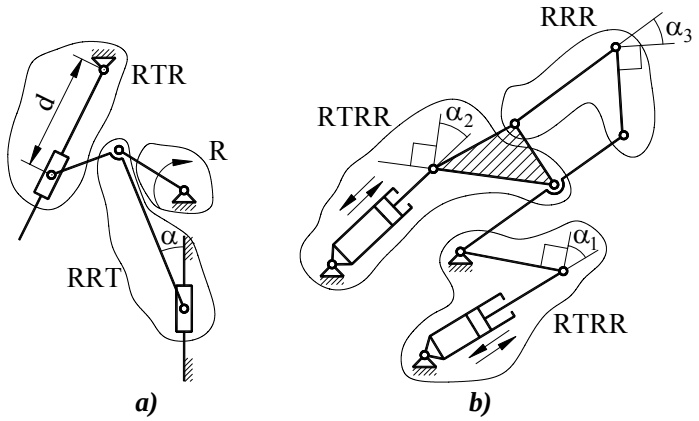


Fig. 2.54

2.2.4. Randamentul mecanic

Randamentul mecanic este un parametru care oglindeşte eficiența utilizării energiei mecanice în procesul de funcționare a mecanismelor. Randamentul poate avea caracter instantaneu sau global (pentru o perioadă de timp). Randamentul instantaneu, η se defineşte ca fiind raportul dintre puterea utilă, P_u şi puterea motoare P_m, considerate în valoare absolută

$$\eta = \frac{P_u}{P_m} \tag{2.107}$$

Puterea utilă este utilizată pentru efectuarea unei operații tehnologice la nivelul unui element condus, de execuție. Puterea motoare este primită de la motorul de acționare şi se dezvoltă în cuplele conducătoare. Între puterea utilă şi cea motoare există relația

$$P_m = P_u + P_f\,, \tag{2.108}$$

în care P_f este puterea pierdută prin frecare în cuplele cinematice. Având în vedere formula (2.108), randamentul se poate exprima şi în felul următor

$$\eta = \frac{P_u}{P_u + P_f} \tag{2.109}$$

$$\eta = \frac{P_m - P_f}{P_m} \tag{2.110}$$

Randamentul global se exprimă prin formule analoge, dar în funcție de lucrul mecanic util, L_u, motor, L_m şi de frecare L_f.

$$\eta_g = \frac{L_u}{L_m} \tag{2.111}$$

$$\eta_g = \frac{L_u}{L_u + L_f} \tag{2.112}$$

$$\eta_g = \frac{L_m - L_f}{L_m} \tag{2.113}$$

$$L_m = L_u + L_f \tag{2.114}$$

Cunoscând relația dintre lucrul mecanic şi putere

$$P = \frac{dL}{dt} = \frac{dL}{d\varphi_1} \cdot \frac{d\varphi_1}{dt} = \frac{dL}{d\varphi_1} \cdot \omega_1 ,$$

se determină lucrul mecanic de fiecare tip

$$L_u = \int_{\varphi_{11}}^{\varphi_{12}} \frac{1}{\omega_1} P_u d\varphi_1 \tag{2.115}$$

$$L_m = \int_{\varphi_{11}}^{\varphi_{12}} \frac{1}{\omega_1} P_m d\varphi_1 \tag{2.116}$$

$$L_f = \int_{\varphi_{11}}^{\varphi_{12}} \frac{1}{\omega_1} P_f d\varphi_1 \tag{2.117}$$

Parametrul φ_1 este unghiul de poziție al elementului conducător (variabila independentă a mecanismului), iar φ_{11} şi φ_{12} - valorile parametrului φ_1 care delimitează perioada pentru care se calculează lucrul mecanic.

În cazul acționării hidraulice, integrarea se face în funcție de variabila cuplei conducătoare cilindru - piston.

Dacă randamentul instantaneu este constant, randamentul global este, desigur, egal cu cel instantaneu.

Valoarea randamentului se înscrie în domeniul:

$0 \le \eta < 1$.

Limita superioară nu poate fi atinsă, aşa cum rezultă din formulele (2.109), (2.110), (2.112), (2.113), deoarece $P_f \neq 0$, $L_f \neq 0$. Randamentul este $\eta = 0$ atunci când $P_u = 0$, $L_u = 0$, adică atunci când mecanismul funcţionează fără sarcină utilă, **în gol**. Menţionăm că, din calcul, randamentul poate rezulta şi negativ. În acest caz mecanismul se găseşte într-o zonă de autoblocare. Rezultatul acesta se explică, având în vedere formulele (2.110) şi (2.113), prin faptul că $P_f > P_m$ şi $L_f > L_m$. Funcţionarea este cu atât mai eficientă, din punct de vedere energetic, cu cât randamentul se apropie mai mult de unitate. Majorarea randamentului se poate face numai prin reducerea energiei pierdută prin frecare, deci prin reducerea forţelor de frecare. Acestea depind direct proporţional de coeficienţii de frecare şi de reacţiunile normale. Reducerea coeficienţilor de frecare se realizează prin proiectarea corespunzătoare a cuplelor în relaţie cu lubrifierea şi utilizarea frecării de rostogolire (rulmenţi, ghidaje cu role, şuruburi cu bile). Diminuarea reacţiunilor normale este legată de proiectarea raţională a mecanismului pentru a funcţiona cât mai departe de poziţiile critice, cu respectarea condiţiilor 1.3 - Tab.2.5.

Calculul randamentului instantaneu este posibil dacă se cunosc două dintre puterile P_u, P_m şi P_f, utilizând una din formulele (2.107), (2.109), (2.110).

Dacă elementul de execuţie se notează cu n, puterea utilă se determină, după cum mişcarea este de rotaţie sau de translaţie, cu una dintre formulele:

$$P_u = -M_n \cdot \omega_n \tag{2.118}$$

$$P_u = -F_n \cdot v_n \tag{2.119}$$

în care M_n şi F_n reprezintă momentul sau forţa utilă (tehnologică), iar ω_n, v_n - viteza unghiulară sau de translaţie a elementului n (Fig. 2.55.a). Deoarece forţele utile au caracter rezistent, sensul lor este contrar vitezei, iar semnul (-) din formulele (2.118), (2.119) intervine pentru a obţine puterea în valoare absolută, în condiţiile în care M_n, ω_n, F_n şi v_n sunt scalari cu semn.

Notând cu 1 elementul conducător de rotaţie (Fig.2.56.a), puterea motoare este:

$$P_m = M_1 \cdot \omega_1 \tag{2.120}$$

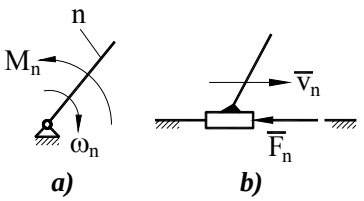


Fig. 2.55

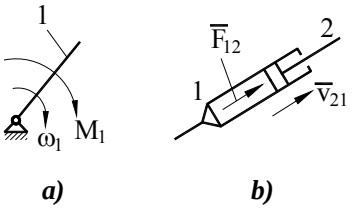


Fig. 2.56

În cazul acționării hidraulice, prin cupla conducătoare cilindru (1) - piston (2) (Fig.2.56.b), puterea motoare se calculează cu formula:

$$P_m = F_{12} \cdot v_{21} = F_{21} \cdot v_{12} \tag{2.121}$$

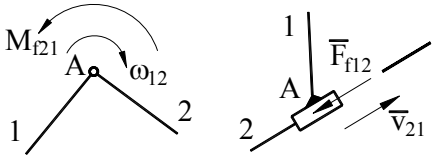
În formulele (2.120) şi (2.121) M_1 este momentul motor, având acelaşi sens cu viteza unghiulară ω_1, iar $F_{12}(F_{21})$ este forța motoare având sensul vitezei relative $v_{21}(v_{12})$.

Puterea pierdută prin frecare în cupla de rotație (Fig. 2.57.a) este

$$P_{fA} = -M_{f12} \cdot \omega_{21} = M_{f12} \cdot \omega_{12} \tag{2.122}$$

iar în cupla de translație (Fig. 2.57.b) este

$$P_{fA} = -F_{f12} \cdot v_{21} = F_{f12} \cdot v_{12} \tag{2.122}$$



a) ***b)***

Fig. 2.57

Desigur, puterea pierdută prin frecare în întregul mecanism se obține prin însumarea puterilor de frecare ale tuturor cuplelor.

Forțele de rezistență utilă (M_n, F_n) sunt, în general, cunoscute (par. 2.2.1.1). Forțele motoare de acționare (M_1, F_1) se determină asimilându-se cu forțele de echilibrare. Pentru calculul lor se efectuează analiza cinetostatică cu frecare, din care rezultă, evident, şi forțele de frecare din toate cuplele mecanismului.

Dintre cele trei posibilități de calcul al randamentului (2.107), (2.109), (2.110), cea mai comodă este cea care utilizează relația (2.107) pentru că nu reclamă calculul puterilor de frecare în fiecare cuplă cinematică. Înlocuind în (2.107) expresiile (2.118) şi (2.120) se obține

$$\eta = -\frac{M_n \omega_n}{M_1 \omega_1} = -\frac{M_n}{M_1} \cdot \frac{d\varphi_n}{d\varphi_1} \tag{2.124}$$

Dacă elementul condus are mişcare de translație (2.119), formula este

$$\eta = -\frac{F_n v_n}{M_1 \omega_1} = -\frac{F_n}{M_1} \cdot \frac{dx_n}{d\varphi_1} \tag{2.125}$$

În formulele (2.124) şi (2.125) $\frac{d\varphi_n}{d\varphi_1}$ şi $\frac{dx_n}{d\varphi_1}$ sunt funcții de transmitere caracteristice elementului condus n, care se determină din analiza cinematică a mecanismului.

Este important de observat că, în cazul neglijării forțelor de frecare ($\eta = 1$), formulele (2.124) şi (2.125) permit determinarea momentului motor (de

echilibrare) în funcţie de forţele (momentele) utile numai din considerente cinematice.

$$M_1 = -M_n \frac{d\varphi_n}{d\varphi_1} \tag{2.126}$$

$$M_1 = -F_n \frac{dx_n}{d\varphi_1} \tag{2.127}$$

Desigur, pentru calculul randamentului se pot folosi şi formule în care vitezele şi forţele (momentele) se introduc în valoare absolută

$$\eta = \frac{|M_n| \cdot |\omega_n|}{|M_1| \cdot |\omega_1|}; \; \eta = \frac{|F_n| \cdot |v_n|}{|M_1| \cdot |\omega_1|}.$$

Randamentul global se determină introducând expresiile puterilor (2.118) - (2.121), în formulele (2.115), (2.116) şi, apoi, în (2.111). Pentru cazul în care elementul condus are mişcare de rotaţie, rezultă

$$\eta_g = -\frac{\int_{\varphi_{11}}^{\varphi_{12}} M_n \frac{d\varphi_n}{d\varphi_1} d\varphi_1}{\int_{\varphi_{11}}^{\varphi_{12}} M_1 d\varphi_1} \tag{2.128}$$

sau

$$\eta_g = \frac{\int_{\varphi_{11}}^{\varphi_{12}} M_n \frac{d\varphi_n}{d\varphi_1} d\varphi_1}{\int_{\varphi_{11}}^{\varphi_{12}} \frac{1}{\eta} M_n \frac{d\varphi_n}{d\varphi_1} d\varphi_1} \tag{2.129}$$

iar pentru cazul în care elementul condus are mişcare de translaţie se obţine

$$\eta_g = -\frac{\int_{\varphi_{11}}^{\varphi_{12}} F_n \frac{dx_n}{d\varphi_1} d\varphi_1}{\int_{\varphi_{11}}^{\varphi_{12}} M_1 d\varphi_1} \tag{2.130}$$

sau

$$\eta_g = \frac{\int_{\varphi_{11}}^{\varphi_{12}} F_n \frac{dx_n}{d\varphi_1} d\varphi_1}{\int_{\varphi_{11}}^{\varphi_{12}} \frac{1}{\eta} F_n \frac{dx_n}{d\varphi_1} d\varphi_1} \tag{2.131}$$

Pentru exemplificare, se consideră, din nou, mecanismul manivelă - piston din Fig.2.50. S-a calculat randamentul instantaneu (2.125) şi randamentul global (2.130) luând în considerare numai frecarea din cupla de translaţie şi din

cupla conducătoare A. În Fig.2.58 se prezintă diagrama $\eta(\varphi_1), \varphi_1 \in [0, 2\pi]$ şi diagrama $\alpha(\varphi_1)$. Deoarece $\alpha < \alpha_{bl}$, mecanismul nu prezintă fenomenul de autoblocare iar randamentul este pozitiv pe înteg domeniul $\varphi_1 \in [0, 2\pi]$. Se observă că randamentul are cele mai mici valori în zonele în care unghiul de presiune este maxim, iar în punctele $\varphi_1 = 0$ şi $\varphi_1 = \pi$, în care viteza patinei 3 este zero, randamentul tinde, de asemenea, la zero. Valoarea randamentului global, calculată prin integrare numerică, în intervalul $\varphi_1 \in [0, 2\pi]$ este marcată, de asemenea, pe diagrama din Fig.2.58. În Fig.2.59 sunt reprezentate aceleaşi diagrame dar cu alte date numerice. În acest caz intervin zone de autoblocare ($\alpha < \alpha_{bl}$) în care $\eta < 0$.

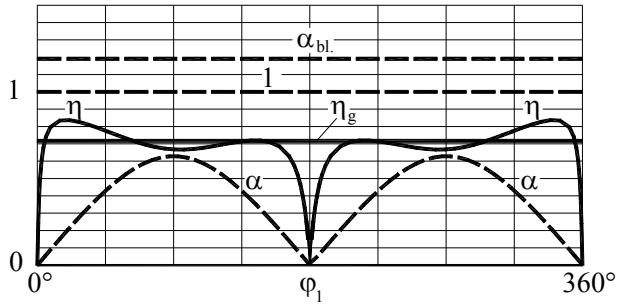


Fig. 2.58

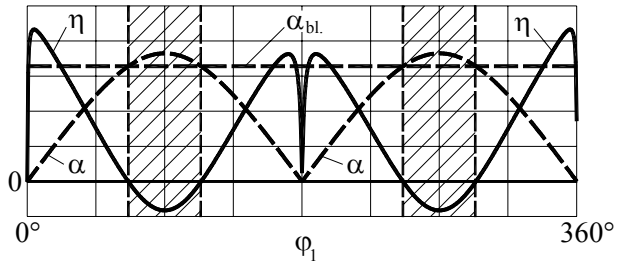
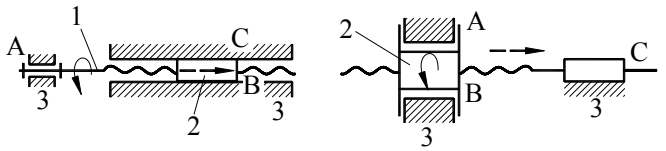


Fig. 2.59

2.2.5. Mecanismul cu şurub

Mecanismul elementar cu şurub (Fig.2.60.a) este format din două elemente mobile, legate printr-o cuplă elicoidală - şurub şi piuliță, unul având mişcare de rotație, iar celălalt de translație. Mecanismul se poate construi în două variante: când şurubul are mişcare de rotație şi piulița de translație

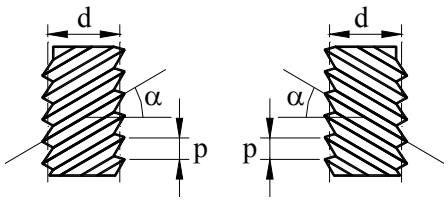
(Fig.2.60.a) sau invers (Fig.2.60.b). De obicei elementul conducător este cel cu mişcare de rotaţie. Filetul unui şurub poate avea două orientări - pe dreapta şi pe stânga. Filetul pe dreapta (cel mai uzual) se recunoaşte astfel: dacă aşezăm şurubul vertical, linia spirei urcă de la stânga spre dreapta (Fig.2.61.a). Desigur, în cazul filetului pe stânga, înclinarea spirei este inversă (Fig.2.61. c).



B – *cupla elicoidală* 1 - 2
C – *cupla de translaţie* 2 - 3
a)

B – *cupla elicoidală* 1 – 2
A – *cupla de rotaţie* 2 – 3
b)

Fig. 2.60



filet pe dreapta ***a)***

filet pe stânga ***b)***

Fig. 2.61

Analiza cinematică a acestui mecanism nu a fost tratată în capitolul 2.1, deoarece este foarte simplă şi este pezentată acum, împreună cu analiza cinetostatică, randamentul şi problema autoblocării.

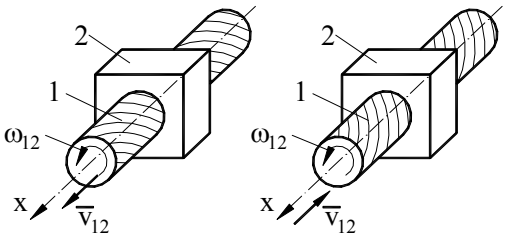
Mişcarea relativă şurub (1) - piuliţă (2) este descrisă cu ajutorul unei funcţii de transmitere de ordinul zero,

$$\frac{s_{12}}{\varphi_{12}} = \pm\frac{p}{2\pi} = \pm\frac{d}{2}\,\mathrm{tg}\alpha \qquad (2.132)$$

în care s_{12} şi φ_{12} sunt deplasările relative de translaţie şi unghiulară, p - pasul filetului, d - diametrul mediu al şurubului, iar α - unghiul de înclinare a spirei filetului pe cilindrul de diametrul mediu (Fig.2.61). Semnul (+) corespunde filetului pe dreapta, iar (-) celui pe stânga. Prin derivare în raport cu φ_{12} se obţine funcţia de transmitere de ordinul unu:

$$\frac{ds_{12}}{d\varphi_{12}} = \frac{v_{12}}{\omega_{12}} = \pm\frac{p}{2\pi} = \pm\frac{d}{2}\,\mathrm{tg}\alpha \qquad (2.133)$$

Semnele parametrilor s_{12}, φ_{12}, v_{12}, ω_{12} se stabilesc prin raportare la o axă orientată, suprapusă peste axa şurubului (Fig.2.62). Funcţiile de transmitere (2.132) şi (2.133) se folosesc pentru analiza cinematică a oricărui mecanism cu şurub. Astfel, în cazul mecanismului din Fig. 2.60.a, se scrie:



filet pe dreapta *filet pe stânga*

a) ***b)***

Fig. 2.62

$$s_1 = s_2 + s_{12}$$

$$\varphi_1 = \varphi_2 + \varphi_{12}$$

Deoarece $s_1 = 0$ şi $\varphi_2 = 0$, rezultă $s_{12} = -s_2$ şi $\varphi_{12} = \varphi_1$. Introducând aceste valori în formula (2.132) se obține funcția de transmitere de ordinul zero, pentru acest mecanism,

$$\frac{s_{12}}{\varphi_1} = \mp\frac{p}{2\pi} = \mp\frac{d}{2}\,\mathrm{tg}\alpha \qquad (2.134)$$

şi, prin derivare în raport cu φ_1, funcția de transmitere de ordinul unu,

$$\frac{ds_{12}}{d\varphi_1} = \frac{v_{12}}{\omega_1} = \mp\frac{p}{2\pi} = \mp\frac{d}{2}\,\mathrm{tg}\alpha \qquad (2.135)$$

cu semnul (-) pentru filetul pe dreapta şi (+) pentru filetul pe stânga.

Pentru a efectua analiza cinetostatică, mecanismul cu şurub, care este spațial, se transformă, prin desfăşurarea cilindrului de diametru mediu, într-un mecanism plan. Se consideră mecanismul din Fig.2.60 echipat cu un şurub cu filet dreptunghiular, orientat pe dreapta (Fig.2.63.a). Ne propunem să determinăm momentul motor M_1 necesar pentru ridicarea piuliței, încărcată cu forța F_2, care poate fi greutatea unei sarcini la o maşină de ridicat. Prin operația menționată, cuplele elicoidală B şi de rotație A, se transormă în cuple de translație, obținând un mecanism de familia f = 4 (Fig.2.36.b) ca şi mecanismul cu şurub inițial. Între viteze există ecuația

$$\overline{v}_2 = \overline{v}_1 + \overline{v}_{21},$$

în care

$$\overline{v}_1 \begin{cases} |\overline{v}_1| = |\omega_1| \cdot \dfrac{d}{2} \\ \text{// axa cuplei A} \\ \text{sens de la dreapta spre stânga} \end{cases}$$

$\overline{v}_2$ // axa cuplei C, $\overline{v}_{21}$ // axa cuplei B.

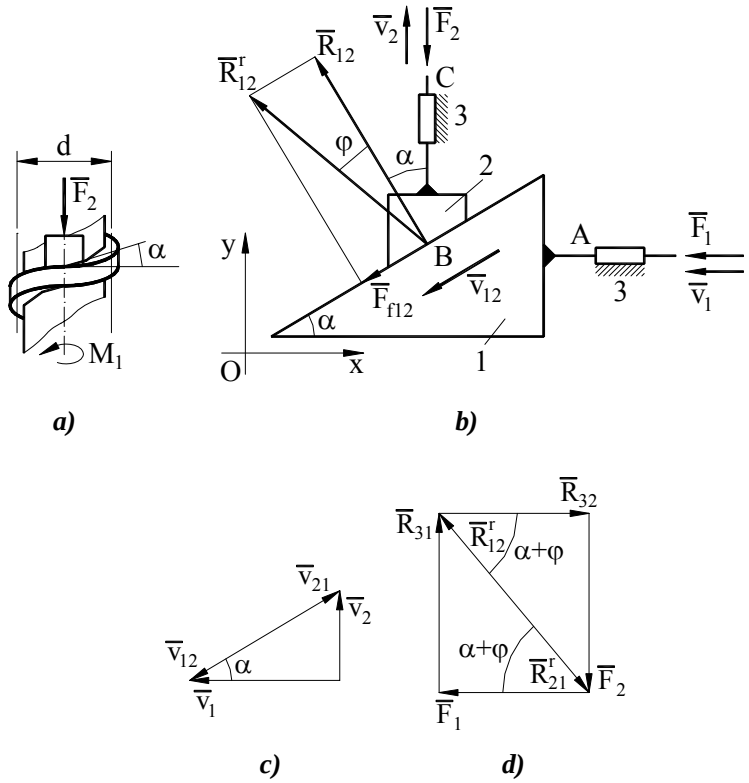


Fig. 2.63

Triunghiul vitezelor, corespunzător ecuației, este reprezentat în Fig.2.63.c.

Se scrie ecuația de echilibru a forțelor pentru elementul 2, considerând numai forța de frecare din cupla B,

$$\sum \overline{F}(2) = 0\,; \qquad \underline{\overline{R}^r_{12}} + \underline{\overline{R}_{32}} + \underline{\underline{\overline{F}_2}} = 0$$

În această ecuație $\overline{F}_2$ este forța utilă, cunoscută, $R_{32} \perp$ axa cuplei C, iar $\overline{R}^r_{12} = \overline{R}_{12} + \overline{F}_{f12}$ are orientarea indicată pe desen (Fig.2.63.b), având în vedere sensul forței de frecare, acelaşi cu al vitezei $\overline{v}_{12}$ (triunghiul vitezelor - Fig.2.63.c). Rezolvarea grafică a ecuației de forțe este redată prin poligonul din Fig.2.63.d.

Se scrie apoi, ecuația de forțe pentru elementul 1,

$$\sum \overline{F}(1) = 0\,; \qquad \underline{\underline{\overline{R}^r_{21}}} + \underline{\overline{R}_{31}} + \underline{\overline{F}_1} = 0\,,$$

în care $\overline{R}_{21} = -\overline{R}_{12}$, $\overline{R}_{31} \perp$ axa cuplei A, iar $\overline{F}_1 //$ axa cuplei A. Rezolvarea grafică este arătată, de asemenea, în Fig.2.63.d. Din poligonul forțelor se deduce, imediat,

$$F_1 = F_2 \mathrm{tg}(\alpha + \varphi),$$

în care φ este unghiul de frecare din cupla B. Semnele forțelor F_1 şi F_2 se stabilesc prin raportare la axele sistemului Oxy.

În cazul în care piulița coboară, fiind încărcată de aceeaşi forță $\overline{F}_2$ (Fig.2.64), se observă că sensurile vitezelor se inversează (Fig.2.64.b). Acest fapt modifică sensul forței de frecare $\overline{F}_{f12}$ şi direcția reacțiunii rezultante $\overline{R}^r_{12}$ ca în Fig.2.64.a. Poligonul de forțe, construit după aceleaşi ecuații de echilibru, se prezintă ca în Fig.2.64.c.

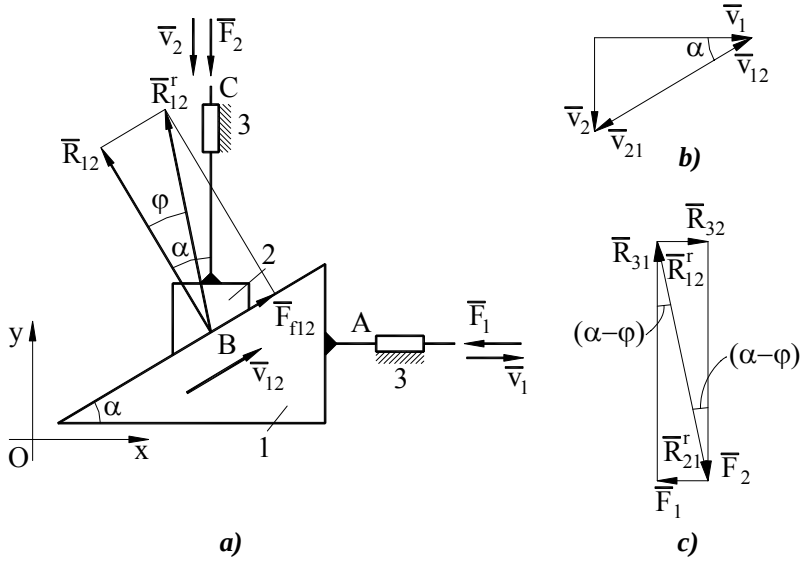


Fig. 2.64

Din acest poligon rezultă

$$F_1 = F_2 \mathrm{tg}(\alpha - \varphi)$$

Revenind la mecanismul inițial, cu şurub, se calculează $M_1 = F_1 \frac{d}{2}$, pentru cele două cazuri,

$$M_1 = F_2 \frac{d}{2} \mathrm{tg}(\alpha + \varphi) \tag{2.136}$$

$$M_1 = F_2 \frac{d}{2} \mathrm{tg}(\alpha - \varphi) \tag{2.137}$$

Randamentul mecanismului, în cazul ridicării piuliței, când şurubul este elementul conducător şi piulița - element condus, se determină cu formula (2.125) care, cu notațiile de aici, devine

$$\eta = -\frac{F_2 v_2}{M_1 \omega_1}$$

Înlocuind M_1 (2.136) şi $\frac{v_2}{\omega_1}$ (2.135) cu expresiile lor se obține

$$\eta = \frac{tg\alpha}{tg(\alpha + \varphi)} \qquad (2.138)$$

Autoblocarea mecanismului se produce când $\eta \le 0$, deci

$$\alpha + \varphi \ge \frac{\pi}{2}$$

$$\alpha \ge \frac{\pi}{2} - \varphi = \alpha_{bl}$$

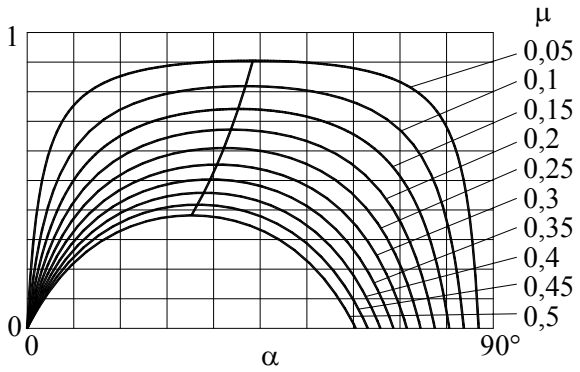


Fig. 2.65

În mod obişnuit unghiul α este mult mai mic decât valoarea de blocare. Din studiul expresiei (2.138) rezultă că valoarea maximă (optimă) a randamentului se obține când $\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}$. În Fig. 2.65 se prezintă diagrama $\eta(\alpha)$ pentru câteva valori ale coeficientului de frecare din cupla elicoidală.

În cazul coborârii piuliței, aceasta este element conducător, iar şurubul element condus, astfel că randamentul este

$$\eta = -\frac{M_1 \omega_1}{F_2 v_2}$$

Introducând expresiile lui M_1 (2.137) şi a raportului $\frac{\omega_1}{v_2}$ (2.135) se obține

$$\eta = \frac{tg(\alpha - \varphi)}{tg\alpha} \qquad (2.139)$$

Dacă $\alpha > \varphi$, $\eta > 0$, iar M_1 orientat în sus opus lui ω_1, are semnificația unui moment de frânare care împiedică accelerarea necontrolată a mişcării.

Dacă $\alpha < \varphi$, $\eta < 0$, are loc autoblocarea. Pentru a realiza deplasarea piuliței trebuie să acționeze şi momentul M_1 care, în acest caz, are caracter motor - este orientat în acelaşi sens cu ω_1.

Şuruburile cu $\alpha < \varphi$ se numesc **cu autofrânare** deoarece împiedică deşurubarea sub acțiunea forțelor elastice de strângere este împiedicată.

*

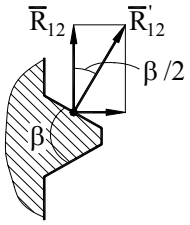


Fig. 2.66

Dacă filetul este triunghiular sau trapezoidal (Fig.2.66), reacțiunea normală la flancul elicoidal $\overline{R}'_{12}$ generează o componentă axială $\overline{R}_{12}$ care intervine în ecuațiile aferente analizei statice. Pe de altă parte, forța de frecare se calculează astfel,

$$\left|\overline{F}_{f12}\right| = \mu\left|\overline{R}'_{12}\right| = \frac{\mu}{\cos(\beta/2)}\left|\overline{R}_{12}\right|$$

în care β este unghiul dinte flancurile filetului.

Se fac notațiile

$$\mu' = tg\varphi' = \frac{\mu}{\cos(\beta/2)},$$

în care μ' se numeşte coeficient de frecare convențional, iar φ' - unghi de frecare convențional. Aceşti paraemtri se folosesc în locul parametrilor μ şi φ în toate formulele precedente, atunci când filetul este trapezoidal. Deoarece $\mu' > \mu$ randamentul acestor mecanisme este inferior celor cu filet dreptunghiular, dar se utilizează la şuruburile de fixare, când pericolul de autodeşurubare se reduce.

2.3. ANALIZA PRECIZIEI

2.3.1. Introducere. Abateri elementare

Analiza preciziei presupune definirea noțiunilor de **mecanism ideal** şi **mecanism real**. În cazul mecanismului ideal, parametrii constructivi au valori strict egale cu cele proiectate, numite valori nominale. În cazul mecanismului

real valorile acestor parametri sunt afectate de abateri (erori) în raport cu valorile **nominale**, numite **abateri elementare**. Aceste abateri reprezintă o consecință a proceselor de fabricare, reglare şi montare.

Precizia de funcționare a mecanismului ideal este absolută, pe când parametrii mişcării mecanismului real (deplasări, viteze, accelerații) sunt afectați de a**bateri funcționale**. Obiectivul analizei preciziei este de a face legătura între abaterile elementare şi abaterile funcționale ale mecanismului. Abaterea de deplasare (poziție) pentru un paraemtru de poziție oarecare, φ este

$$\Delta\varphi = \varphi(q_k + \Delta q_k) - \varphi_0(q_k)\,,\ (k = 1 \ldots p) \qquad (2.140)$$

în care φ este **deplasarea** (poziția) în mecanismul real, iar φ_0 în cel ideal; q_k - valorile nominale ale parametrilor constructivi; Δq_k - abaterile elementare; p - numărul parametrilor constructivi. Abaterile de viteză şi de accelerație se obțin prin derivarea, în raport cu timpul, a abaterilor de deplasare.

Trebuie menționat că analiza preciziei este justificată numai în situațiile în care abaterile funcționale influențează decisiv calitatea operațiilor deservite. Pot fi menționate, în acest sens, mecanismele echipamentelor de mecatronică şi mecanică fină, mecanismele din industria militară, mecanismele de dozare din industria farmaceutică şi alimentară, etc. Precizăm, de asemenea, că abaterile de deplasare sunt cele mai importante pentru aprecierea calității funcționării unui element de execuție. De aceea, în cele ce urmează, ne vom referi numai la această categorie de abateri.

Abaterile elementare reprezintă erori de poziție ale suprafețelor active care aparțin aceluiaşi element dar fac parte din cuple diferite. Astfel, un element k, având două cuple de rotație are două suprafețe active de formă cilindrică, interioare sau exterioare (Fig.2.67.a). Distanța dintre axele geometrice ale acestor suprafețe l_k este afectată de abaterea Δl_k. În acest caz mai pot interveni şi alte abateri cum ar fi eroarea unghiulară de la paralelismul axelor sau eroarea de la paralelismul suprafețelor plane frontale. Acestea se neglijează dacă sunt mici şi nu influențează consistent abaterile funcționale. Dacă elementul are o cuplă de rotație şi una de translație (Fig.2.67.b), parametrul care pune în evidență poziția relativă dintre suprafețele active este lungimea l_k dintre axele suprafeței cilindrice care intervine în cupla de rotație şi a suprafeței prismatice care ține de cupla de translație. Cele două axe trebuie să fie, teoretic, perpendiculare, dar eroarea de la perpendicularitate, de obicei, se neglijează.

Pentru analiza preciziei se utilizează **metoda deterministă** şi **metoda probabilistică** sau **stocastică**.

Metoda deterministă se aplică unui mecanism singular, cu abateri elementare cunoscute, iar rezultatul operației îl constituie valorile abaterilor funcționale.

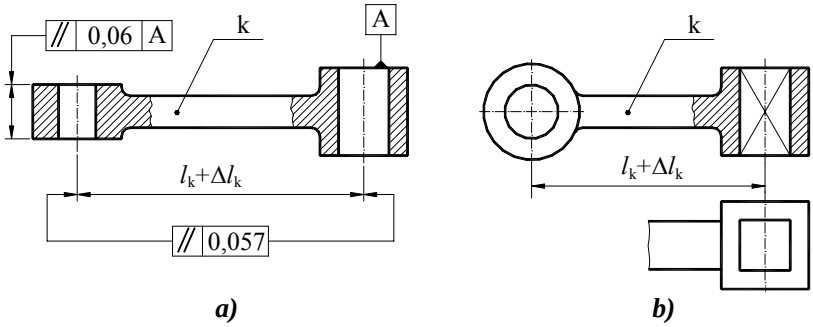


Fig. 2.67

În cadrul metodei probabilistice datele de intrare, pentru fiecare abatere elementară, sunt câmpul de toleraţă şi legea de distribuţie stabilită în funcţie de procesul tehnologic de fabricare. Rezultatul aplicării acestei metode se concretizează printr-o lege de distribuţie specifică fiecărei abateri funcţionale. Desigur, metoda stocastică este superioară celei deterministe fiind asociată unui proces normal de proiectare şi fabricaţie a mecanismului. Pe de altă parte, metoda deterministă trebuie cunoscută deoarece intervine ca o etapă în desfăşurarea metodei probabilistice.

2.3.2. Metoda deterministă

Calculul abaterilor de deplasare se poate efectua cu ajutorul relaţiei (2.140), dar printr-o dezvoltare în serie Taylor a funcţiei $\varphi(q_k + \Delta q_k)$, din care se reţin primii doi termeni, se ajunge la o relaţie mai comodă

$$\Delta\varphi = \sum_k \left(\frac{\partial\varphi}{\partial q_k} \right) \cdot \Delta q_k \ . \qquad (2.141)$$

Deoarece expresia este liniară în raport cu abaterile elementare, aplicarea ei în procesul de analiză a preciziei, poartă denumirea de metodă liniară. Derivatele parţiale $\frac{\partial\varphi}{\partial q_k}$ se numesc funcţii de transmitere ale abaterilor.

Pentru exemplificare, vom aplica metoda liniară în scopul determinării abaterilor de deplasare a pistonului (patinei) unui mecanism manivelă - piston (Fig.2.68). Presupunem cunoscute abaterile elementare ale lungimilor l_1, l_2, l_4 notate cu Δl_1, Δl_2, Δl_4. Abaterea de deplasare a punctului C, Δl_3, se exprimă în conformitate cu formula (2.141)

$$\Delta l_3 = \frac{\partial l_3}{\partial l_1}\Delta l_1 + \frac{\partial l_3}{\partial l_2}\Delta l_2 + \frac{\partial l_3}{\partial l_4}\Delta l_4 \qquad (2.142)$$

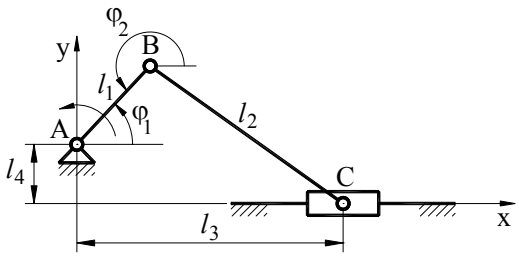


Fig. 2.68

Pentru determinarea funcţiior de transmitere ale abaterilor se apelează la relaţiile întâlnite la analiza cinematică a aces-tui mecanism (par. 2.1.4.3.).

Proiecţiile ecuaţiei de închidere (2.36) pe axele sistemului de coordonate sunt

$$l_1 \cos\varphi_1 + l_2 \cos\varphi_2 - l_3 = 0 \qquad (2.143)$$

$$l_1 \sin\varphi_1 + l_2 \sin\varphi_2 + l_4 = 0 \qquad (2.144)$$

Având în vedere că unghiul φ_2 este un parametru variabil care depinde de l_1, l_2 şi l_4, din ecuaţia (2.143) se deduce

$$\frac{\partial l_3}{\partial l_1} = \cos\varphi_1 - l_2 \sin\varphi_2 \frac{\partial\varphi_2}{\partial l_1}$$

$$\frac{\partial l_3}{\partial l_2} = \cos\varphi_2 - l_2 \sin\varphi_2 \frac{\partial\varphi_2}{\partial l_2}$$

$$\frac{\partial l_3}{\partial l_4} = -l_2 \sin\varphi_2 \frac{\partial\varphi_2}{\partial l_4}$$

Derivatele parţiale $\frac{\partial\varphi_2}{\partial l_1}$, $\frac{\partial\varphi_2}{\partial l_2}$ şi $\frac{\partial\varphi_2}{\partial l_4}$ se obţin prin derivarea succesivă a ecuaţiei (2.144) în raport cu l_1, l_2 şi l_4,

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial l_1} = -\frac{\sin\varphi_1}{l_2 \cos\varphi_2}$$

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial l_2} = \frac{l_1 \sin\varphi_1 + l_4}{l_2^2 \cos\varphi_2}$$

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial l_4} = -\frac{1}{l_2 \cos\varphi_2}$$

Făcând substituţiile necesare se ajunge la expresiile finale ale funcţiilor de transmitere a abaterilor,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial l_3}{\partial l_1} = \dfrac{\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}{\cos\varphi_2} \\ \dfrac{\partial l_3}{\partial l_2} = \dfrac{1}{\cos\varphi_2} \\ \dfrac{\partial l_3}{\partial l_4} = \mathrm{tg}\varphi_2 \end{cases} \tag{2.145}$$

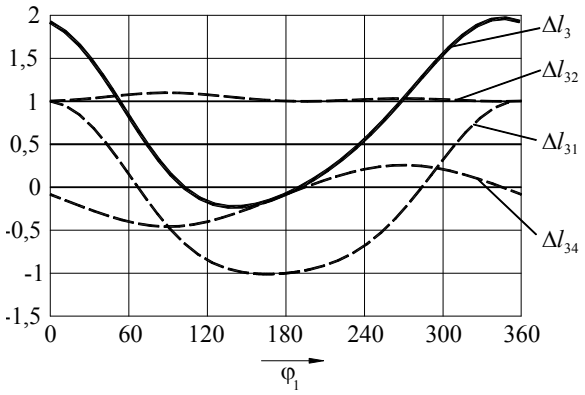


Fig. 2.69

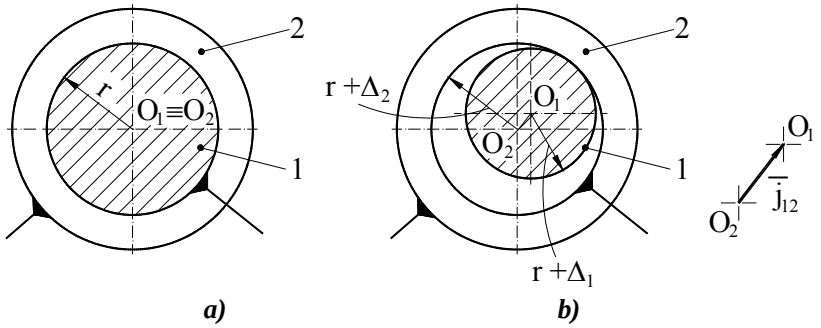
$l_1 = 100$ [mm]; $l_2 = 300$ [mm]; $l_4 = 25$ [mm]

$\Delta l_1 = \Delta l_2 = \Delta l_4 = 1.$

În Fig.2.69 se prezintă, pentru un caz concret, diagrama abaterii Δl_3 în funcție de unghiul φ_1, calculată cu formula (2.142). Sunt trasate, de asemenea, diagramele abaterilor parțiale $\Delta l_{31} = \dfrac{\partial l_3}{\partial l_1}\Delta l_1$, $\Delta l_{32} = \dfrac{\partial l_3}{\partial l_2}\Delta l_2$ şi $\Delta l_{34} = \dfrac{\partial l_3}{\partial l_4}\Delta l_4$ care arată influența fiecărei abateri elementare asupra abaterii totale Δl_3.

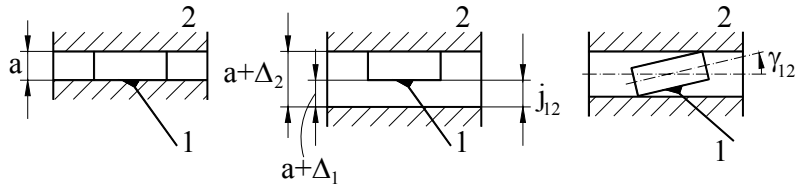
■ Influența jocurilor

Cuplele cinematice au suprafețele active, teoretic congruente, de formă şi dimensiuni identice, astfel încât, contactul se realizează după o zonă din aceste suprafețe. De exemplu, în cazul cuplei de rotație (Fig.2.70.a), raza fusului este egală cu raza lagărului, iar centrele lor coincid. În mecanismul real dimensiunile care definesc cele două suprafețe sunt afectate de abateri, iar între ele se creează un spațiu care permite deplasări relative în raport cu poziția ideală – numite **jocuri**. Acestă situație este ilustrată în Fig.2.70.b pentru cupla de rotație. Jocul $\bar{j}_{12}$ este o mărime vectorială, caracterizată prin modul, direcție şi sens. Dacă modulul $j_{12} = \Delta_2 - \Delta_1$ (Δ_2, Δ_1 - abaterile celor două raze) este constant, direcția şi sensul jocului sunt variabile în timpul funcționării. O situație similară se poate constata în cazul cuplei de translație (Fig.2.71) unde poate să intervină o deplasare de translație (Fig.2.71.b) sau una de rotație



a) ***b)***

Fig. 2.70



a) ***b)*** ***c)***

Fig. 2.71

(Fig.2.71.c) care dă naştere unui joc unghiular (γ_{12}). Existenţa jocurilor influenţează, desigur, precizia de funcţionare. Ele pot fi interpretate ca nişte abateri elementare şi introduse în procesul de analiză liniară a preciziei. Dificultatea problemei constă în determinarea orientării jocului din fiecare cuplă. Există, în acest sens, două teorii care se sprijină pe anumite ipoteze legate de funcţionarea mecanismului. Dacă regimul de lucru permite o apreciere bună a distribuţiei de forţe şi aceasta are un caracter pronunţat periodic, atunci orientarea jocurilor este aceeaşi cu orientarea reacţiunilor din cuplele cinematice. Se înţelege că, în acest caz, analiza preciziei trebuie asociată cu analiza cinetostatică. Dacă regimul de funcţionare este aleator, orientarea jocurilor are acelaşi caracter şi se impune o tratare probabilistică a problemei.

2.3.3. Metoda probabilistică

Aşa cum am arătat, fiecare abatere elementară este introdusă, în calcul, sub forma unei mulţimi de valori, caracterizate printr-o lege de distribuţie şi care se încadrează într-un câmp de toleranţă determinat. Caracterul legii de distribuţie depinde de tipul abaterilor elementare, în conformitate cu următoarele recomandări:

• Pentru abaterile elementare dimensionale, legea de distribuție normală (Gauss):

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}},$$

în care x este variabila funcției reprezentată în cazul nostru de abaterile elementare f(x) - probabilitatea apariției abaterii elementare x.

• Pentru jocuri, legea exponențială

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda x}, \text{pentru } x > 0 \\ 0 \quad\quad\quad, \text{pentru } x \le 0 \end{cases}$$

în care λ este un parametru al legii exponențiale, determinat pe bază experimentală.

În faza următoare se execută o combinare aleatorie a valorilor care reprezintă fiecare abatere elementară, obținând o mulțime de seturi de numere. Fiecare set caracterizează precizia unui mecanism, care se analizează printr-o metodă deterministă, calculând abaterile funcționale care interesează. Mulțimea de valori obținute pentru fiecare abatere funcțională se prelucrează statistic prin trasarea unor curbe de distribuție şi prin determinarea unor parametri ca valoarea medie, abaterea medie pătratică, etc. Acest procedeu de calcul simulează un proces de fabricație în serie a unui mecanism care aparține unei maşini. Dacă rezultatele nu satisfac, din punct de vedere a preciziei de funcționare, se poate interveni asupra abaterilor inițiale, modificând câmpurile de toleranță.

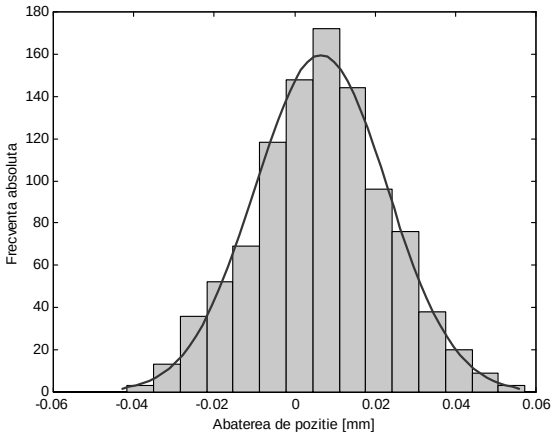


Fig. 2.72

$l_1 = 100$ [mm]; $l_2 = 200$ [mm]; $l_4 = 0$; $\varphi_1 = 50^0$

Toleranțele la lungimile l_1 şi l_2: 0,07 şi 0,09.

În Fig.2.72 se reprezintă curba de distribuție a abaterii de deplasare a pistonului pentru un mecanism manivelă – piston, considerând repartiția Gauss pentru abaterile la lungimile l_1 şi l_2.

2.4. SINTEZA DIMENSIONALĂ

2.4.1. Consideraţii generale

Sinteza dimensională constă în determinarea parametrilor constructivi ai mecanismului pornind de la condiţiile funcţionale pe care acesta trebuie să le realizeze. Problematica sintezei dimensionale este largă şi variată fiind determinată de rolul funcţional pe care trebuie să-l îndeplinească diverse mecanisme în maşinile din care fac parte. Condiţiile funcţionale pot fi de natură cinematică (poziţii, viteze, acceleraţii) sau dinamică (transmiterea forţelor). Modelul matematic se constitue din sisteme de ecuaţii şi/sau inecuaţii, în general, neliniare, rezolvabile prin metode numerice. Problemele de sinteză sunt, de regulă, nedeterminate. Pentru a restrânge domeniul soluţiilor se folosesc diverse procedee. Astfel, o parte dintre necunoscute se adoptă arbitrar sau din considerente independente de problema de sinteză, ajungând la o problemă determinată. De multe ori, în procesul de proiectare al unui mecanism, se asociază mai multe probleme de sinteză, reducând astfel domeniul soluţiilor. Un procedeu care conduce la o soluţie unică este acela de a formula problema de sinteză ca una de optimizare. Adoptarea funcţiei obiectiv depinde de criteriul de optimizare ales. Acest criteriu poate fi legat, de exemplu, de precizia soluţiilor sau de calitatea transmiterii forţelor. Uneori criteriul de optimizare este de natură economică, dar atunci problema de sinteză dimensională se asociază cu proiectarea organologică a mecanismului.

Un aspect interesant care intervine în sinteza dimensională este cel al mecanismelor asemenea. Dacă dimensiunile constructive a două mecanisme cu aceeaşi structură sunt proporţionale, cele două mecanisme formează figuri asemenea. În această situaţie sunt mecanismele patrulatere ABCD şi AB'C'D' din Fig.2.73, având lungimile elementelor proporţionale,

$$\frac{l_1}{l'_1} = \frac{l_2}{l'_2} = \frac{l_3}{l'_3} = \frac{l_4}{l'_4} \tag{2.146}$$

Funcţiile de transmitere adimensionale (ale unghiurilor, vitezelor unghiulare şi acceleraţiilor unghiulare) sunt identice pentru cele două mecanisme, iar funcţiile de transmitere ale deplasărilor, vitezelor şi acceleraţiilor liniare sunt proporţionale. Astfel, poziţiile unghiulare ale elementelor 2 şi 3 sunt aceleaşi pentru o valoare dată a unghiului φ_1. Traiectoriile descrise de puncte asemenea, aparţinând bielei, sunt curbe asemenea. Dacă într-o problemă de sinteză condiţiile iniţiale sunt formulate în funcţie de parametri unghiulari, ele sunt îndeplinite de o infinitate de mecanisme asemenea având rapoartele lungimilor constante

$$\frac{l_2}{l_1} = k_{21},\ \frac{l_3}{l_1} = k_{31},\ \frac{l_4}{l_1} = k_{41}$$

În această situație necunoscutele problemei sunt k_{21}, k_{31} şi k_{41} în loc de l_1, l_2, l_3, l_4. Se observă că, astfel, numărul de necunoscute se reduce cu o unitate. Practic, se atribuie unuia dintre parametrii l_1, l_2, l_3, l_4 o valoare arbitrară, iar ceilalți se determină prin rezolvarea problemei de sinteză. Implicit, rezultă rapoartele k_{21}, k_{31}, k_{41} care sunt caracteristici pentru întreaga clasă de mecanisme asemenea.

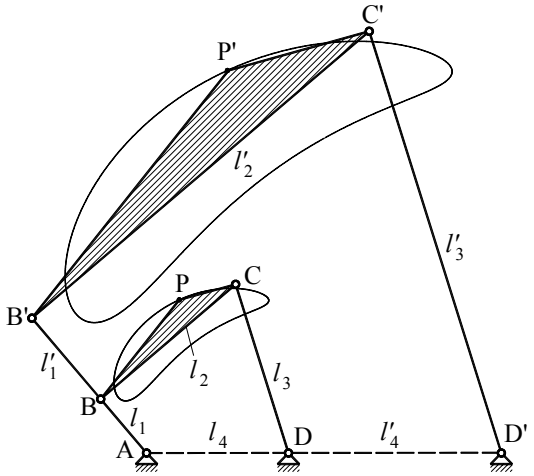


Fig. 2.73

Din multitudinea de probleme de sinteză dimensională se pot grupa câteva, de importanță practică deosebită, care intervin aproape întotdeauna în procesul de proiectare al unui mecanism cu cuple inferioare şi care formează **sinteza elementară**. Celelalte probleme de sinteză intervin relativ rar în practica de proiectare şi sunt mai dificile, din punct de vedere al rezolvărilor numerice, în raport cu problemele de sinteză elementară. Pornind de la aceste considerente, în cele ce urmează, sinteza elementară este prezentată detaliat, iar alte probleme de sinteză sunt tratate cu titlu introductiv.

2.4.2. Sinteza elementară

2.4.2.1. Problematica sintezei elementare

Sinteza elementară cuprinde patru probleme care vor fi definite şi caracterizate în continuare.

■ **Problema rotabilităţii**. În cadrul acestei probleme se stabilesc condiţiile care trebuie satisfăcute de parametri constructivi astfel încât, anumite elemente să poată avea mişcare de rotaţie completă (**manivele**) sau de oscilaţie (**balansiere**). Această problemă intervine, în special, la elementele conducătoare, care, pentru a putea fi acţionate cu motoare rotative, trebuie să aibă rol de manivele. Condiţiile de rotabilitate, pentru un anumit element, se deduc din condiţiile de a obţine soluţii reale în problema poziţiilor pentru toate grupele mecanismului şi pentru o rotaţie completă a elementului respectiv, considerat element conducător. Problema rotabilităţii este legată de poziţiile critice ale mecanismului care intervin când condiţiile de rotabilitate, care sunt nişte inegalităţi, sunt îndeplinite la limită.

■ **Sinteza pentru asigurarea calităţii transmiterii forţelor**. Aşa cum am arătat (par. 2.2.3.3.) calitatea transmiterii forţelor este determinată de limitarea parametrilor de configuraţie astfel încât să se evite apropierea de configuraţiile critice la grupele structurale componente ale mecanismului. La majoritatea mecanismelor plane cu patru elemente parametrul în cauză este unghiul de presiune α (Tab.2.5) care trebuie să satisfacă condiţia $\alpha \le \alpha_a$. Face excepţie mecanismul cu culisă oscilantă, la care intervine un parametru cu dimensiune de lungime, l_0 (Tab.2.5) limitat inferior, $l_0 \ge l_{0a}$. Este important de precizat următoarea observaţie: condiţiile care asigură transmiterea favorabilă a forţelor sunt mai restrictive decât condiţiile de rotabilitate a elementului conducător. Din această cauză, prin rezolvarea problemei de sinteză în discuţie se rezolvă, implicit, şi problema rotabilităţii.

■ **Sinteza în funcţie de poziţiile extreme ale elementului condus**. Problema intervine la mecanismele care au un element condus cu mişcare de oscilaţie (translaţie sau rotaţie) între două poziţii extreme. Parametrul de intrare esenţial este cursa - distanţa (h) sau unghiul (ψ) dintre cele două poziţii extreme. Modelul matematic este constituit, de regulă, din două ecuaţii neliniare.

■ **Sinteza după coeficientul de productivitate**. Problema apare, ca şi cea precedentă, la mecanismele cu elemente conduse în mişcare de oscilaţie, caracterizate printr-o cursă activă şi una pasivă. Raportul vitezelor medii în cele două curse ω_{ma} şi ω_{mp} sau v_{ma} şi v_{mp} se numeşte coeficient de productivitate k_p,

$$k_p = \frac{\omega_{ma}}{\omega_{mp}} = \frac{v_{ma}}{v_{mp}} \le 1^{*)} \qquad (2.147)$$

Vitezele medii sunt diferite deoarece unghiurile parcurse de elementul conducător, în timpul celor două curse, φ_a şi φ_p (Fig.2.74) pot fi diferite. Astfel, viteza medie a cursei active se exprimă cu relația

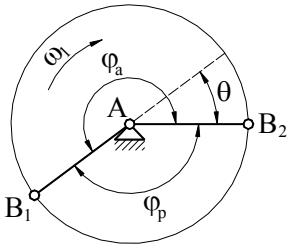


Fig. 2.74

$$\omega_{ma} = \frac{\psi}{t_a} = \frac{\psi}{\frac{\varphi_a}{\omega_1}} = \frac{\psi \cdot \omega_1}{\varphi_a},$$

în care ψ este cursa unghiulară, t_a - timpul cursei active, iar ω_1 - viteza unghiulară constantă a elementului conducător. În mod similar,

$$\omega_{mp} = \frac{\psi \cdot \omega_1}{\varphi_p}.$$

Introducând aceste expresii în formula coeficientului de productivitate se obține

$$k_p = \frac{\varphi_p}{\varphi_a} = \frac{\pi - \theta}{\pi + \theta}, \qquad (2.148)$$

în care θ (Fig.2.74) este unghiul ascuțit format între direcțiile manivelei conducătoare, când balansierul condus trece prin pozițiile extreme. Din relația (2.148) se calculează θ în funcție de k_p,

$$\theta = \pi \cdot \frac{1 - k_p}{1 + k_p}. \qquad (2.149)$$

Prin operația de sinteză se urmăreşte obținerea unui mecanism care să aibă valoarea prestabilită cu ajutorul formulei (2.149), pentru unghiul θ. Modelul matematic este format, în general, din două ecuații neliniare, care se scriu în funcție de tipul mecanismului în discuție.

În cele ce urmează se prezintă aplicarea sintezei elementare pentru mecanismele plane uzuale cu 4 elemente: mecanismul patrulater articulat, mecanismul manivelă - piston, mecanismul cu culisă oscilantă şi mecanismul cu cilindru oscilant.

---

*) *În unele cărți coeficientul* k_p *este definit* $k_p = \frac{\omega_{mp}}{\omega_{ma}}$

2.4.2.2. Mecanismul patrulater articulat plan

- **Problema rotabilității**.

Ne propunem să stabilim condițiile de rotabilitate completă (manivelă) pentru elementul 1 aparținând mecanismului patrulater din Fig.2.75. Dacă presupunem că acest element este conducător, condițiile (2.2) corespunzătoare grupei structurale RRR (2, 3 - BCD) sunt

$$\left| l_2 - l_3 \right| \le l_0 \le l_2 + l_3 \tag{2.150}$$

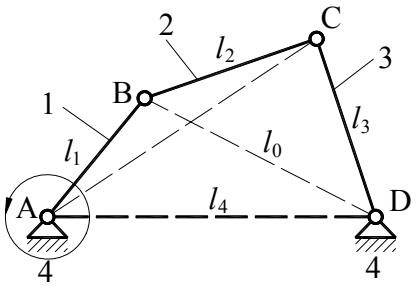


Fig. 2.75

Condițiile (2.150) trebuie respectate pentru orice valoare a lungimii variabile l_0, la o rotație a elementului 1. Această cerință este satisfăcută, dacă relațiile (2.150) sunt verificate pentru valorile extreme: $l_{0\min} = \left| l_1 - l_4 \right|$ și $l_{0\max} = l_1 + l_4$,

$$\begin{aligned} &\left| l_1 - l_4 \right| \ge \left| l_2 - l_3 \right| \\ &l_1 + l_4 \le l_2 + l_3. \end{aligned} \tag{2.151}$$

Relațiile (2.151) reprezintă **condițiile de rotabilitate completă (manivela)** pentru elementul 1. În mod similar se deduc condițiile de rotabilitate completă pentru elementul 3,

$$\begin{aligned} &\left| l_3 - l_4 \right| \ge \left| l_2 - l_1 \right| \\ &l_3 + l_4 \le l_2 + l_1. \end{aligned} \tag{2.152}$$

Dacă sunt verificate ambele seturi de condiții, (2.151) și (2.152), mecanismul este de tip dublă - manivelă. Dacă este respectat numai un set de condiții, (2.151) sau (2.152), mecanismul este de tip manivelă - balansier, iar dacă nu se respectă nici (2.151), nici (2.152), mecanismul este de tip dublu - balansier.

Dacă, dintre cele patru lungimi, se adoptă două (de exemplu l_1 și l_4) se poate determina un domeniu, în sistemul de coordonate l_2 l_3, în care condițiile (2.151) sunt respectate (Fig.2.76).

Condițiile de rotabilitate completă se pot exprima și în altă formulare, mai sugestivă și mai practică, obținută prin analiza celor două moduri în care se pot scrie expresiile $\left| l_1 - l_4 \right|$ și $\left| l_2 - l_3 \right|$. Din această analiză, prezentată în Tab.2.6 rezultă următoarea formulare a condițiilor de rotabilitate pentru elementul 1

1) Elementul cel mai scurt trebuie să fie elementul 1 sau baza 4

$\mathbf{l_1 = l_{min}}$ **sau** $\mathbf{l_4 = l_{min}}$ **.**

2) Condiția lui Grashof: suma formată din lungimea minimă și lungimea maximă trebuie să fie mai mică sau egală decât suma formată din lungimile celorlate două elemente. Această condiție se mai poate formula și astfel,

$$l_{min} + l_{max} \le \frac{p}{2},$$

în care p este perimetrul patrulaterului, $p = l_1 + l_2 + l_3 + l_4$.

Desigur, pentru rotabilitatea elementului 3, condiția 1) se modifică astfel: $l_3 = l_{min}$ sau $l_4 = l_{min}$, iar condiția 2) (Grashof) rămâne nes-chimbată.

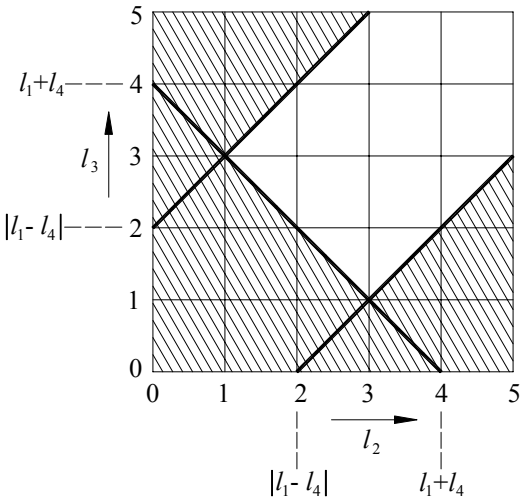
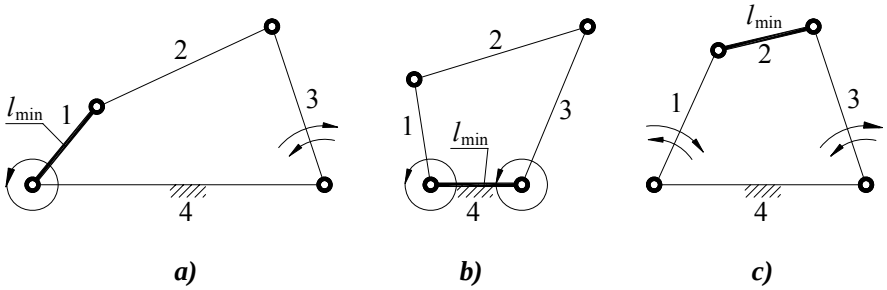


Fig. 2.76
$l_1 = 1,\ l_4 = 3$

Din condiția 1) rezultă că, atunci când se respectă condiția lui Grashof, tipul mecanismului patrulater este determinat de poziția elementului cel mai scurt.

Astfel, dacă elementul cel mai scurt este alăturat bazei ($l_1 = l_{min}$) mecanismul este de tip **manivelă - balansier** (Fig.2.77.a), deoarece condiția 1) este respectată numai de elementul 1. Dacă elementul cel mai scurt este baza ($l_4 = l_{min}$), mecanismul este de tip **dublă - manivelă** (Fig.2.77.b), deoarece condiția 1) este respectată de ambele elemente, 1 și 3. În fine, dacă elementul cel mai scurt este opus bazei ($l_2 = l_{min}$), mecanismul este de tip dublu - balansier (Fig.2.77.c) pentru că nu este respectată condiția 1), nici de elementul 1, nici de elementul 3.



a) ***b)*** ***c)***

Fig. 2.77

Tabelul 2.6		**Ipoteza 1**	**Ipoteza 2**	**Ipoteza 3**	**Ipoteza 4**
Relațiile de ipoteză	(1)	$l_1 \le l_4$	$l_1 \le l_4$	$l_4 \le l_1$	$l_4 \le l_1$
	(2)	$l_2 \le l_3$	$l_3 \le l_2$	$l_2 \le l_3$	$l_3 \le l_2$
Condițiile (2.151)	(3)	$l_4 - l_1 \ge l_3 - l_2$	$l_4 - l_1 \ge l_2 - l_3$	$l_1 - l_4 \ge l_3 - l_2$	$l_1 - l_4 \ge l_2 - l_3$
	(4)	$l_1 + l_4 \le l_2 + l_3$	$l_1 + l_4 \le l_2 + l_3$	$l_1 + l_4 \le l_2 + l_3$	$l_1 + l_4 \le l_2 + l_3$
Din (3) şi (4) $\Rightarrow$	(5)	$l_1 \le l_2$	$l_1 \le l_3$	$l_4 \le l_2$	$l_4 \le l_3$
Din (1), (2) şi (5) $\Rightarrow$	(6)	$\boxed{l_1 = l_{min}}$ $l_3 = l_{max}$ sau $l_4 = l_{max}$	$\boxed{l_1 = l_{min}}$ $l_2 = l_{max}$ sau $l_4 = l_{max}$	$\boxed{l_4 = l_{min}}$ $l_3 = l_{max}$ sau $l_1 = l_{max}$	$\boxed{l_4 = l_{min}}$ $l_2 = l_{max}$ sau $l_1 = l_{max}$
		Ipoteza 1.1	**Ipoteza 2.1**	**Ipoteza 3.1**	**Ipoteza 4.1**
Relația de ipoteză	(7)	$l_3 = l_{max}$	$l_2 = l_{max}$	$l_3 = l_{max}$	$l_2 = l_{max}$
Relațiile (6) şi (7)verifică (4)	(4)	$l_3 - l_1 = l_{max} - l_{min} \ge l_4 - l_2$	$l_2 - l_1 = l_{max} - l_{min} \ge l_4 - l_3$	$l_3 - l_4 = l_{max} - l_{min} \ge l_1 - l_2$	$l_2 - l_4 = l_{max} - l_{min} \ge l_1 - l_3$
Condiția (3) care trebuie verificată	(3)	$\boxed{l_1 + l_3 = l_{min} + l_{max} \le l_4 + l_2}$	$\boxed{l_1 + l_2 = l_{min} + l_{max} \le l_3 + l_4}$	$\boxed{l_4 + l_3 = l_{min} + l_{max} \le l_1 + l_2}$	$\boxed{l_4 + l_2 = l_{min} + l_{max} \le l_1 + l_3}$
		Ipoteza 1.2	**Ipoteza 2.2**	**Ipoteza 3.2**	**Ipoteza 4.2**
Relația de ipoteză	(8)	$l_4 = l_{max}$	$l_4 = l_{max}$	$l_1 = l_{max}$	$l_1 = l_{max}$
Relațiile (6) şi (8) verifică (3)	(3)	$l_4 - l_1 = l_{max} - l_{min} \ge l_3 - l_2$	$l_4 - l_1 = l_{max} - l_{min} \ge l_2 - l_3$	$l_1 - l_4 = l_{max} - l_{min} \ge l_3 - l_2$	$l_1 - l_4 = l_{max} - l_{min} \ge l_2 - l_3$
Condiția (4) care trebuie verificată	(4)	$\boxed{l_1 + l_4 = l_{min} + l_{max} \le l_2 + l_3}$	$\boxed{l_1 + l_4 = l_{min} + l_{max} \le l_2 + l_3}$	$\boxed{l_4 + l_1 = l_{min} + l_{max} \le l_2 + l_3}$	$\boxed{l_4 + l_1 = l_{min} + l_{max} \le l_2 + l_3}$

Problema rotabilității este legată de problema pozițiilor critice. Acestea intervin atunci când grupa structurală RRR (2, 3 - BCD) înregistrează configurații critice, adică atunci când se verifică cel puțin una dintre egalitățile

$$l_0 = |l_2 - l_3|$$

$$l_0 = l_2 + l_3,$$

iar punctele B, C, D sunt coliniare. Pozițiile critice se pot grupa în două categorii în funcție de comportarea funcțională a mecanismului.

1) Poziții critice care pot fi traversate fără ca elementul conducător să-şi schimbe sensul de rotație. Aceste poziții se înregistrează când condițiile (2.151), scrise pentru elementul conducător, sunt respectate, iar cel puțin una dintre ele este verificată la limită, cu semnul egal. În acest caz condiția lui Grasohf se verifică, de asemenea, cu semnul egal, iar punctele din diagrama $l_3(l_2)$ (Fig.2.76) se găsesc la limita domeniului admisibil. La trecerea printr-o astfel de poziție critică se produce o nedeterminare - grupa BCD poate ocupa oricare dintre cele două poziții posibile. Pentru exemplificare, se consideră mecanismul din Fig.2.78 având următoarele relații între lungimile elementelor

$$|l_1 - l_4| > |l_2 - l_3|$$

$$l_1 + l_4 = l_2 + l_3$$

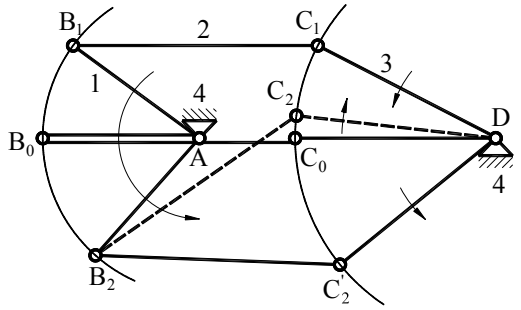


Fig. 2.78

Ca urmare se înregistrează poziția critică AB_0C_0D. Să presupunem că elementul conducător 1 se roteşte în sens trigonometric, astfel încât, mecanismul se deplasează din poziția AB_1C_1D, trecând prin poziția critică AB_0C_0D, până când elementul 1 ajunge în poziția AB_2. Imediat ce depăşeşte poziția critică, grupa RRR poate ocupa fie poziția B_2C_2D, fie $B_2C'_2D$. În felul acesta, odată cu trecerea prin poziția critică, sensul de rotație al elementului 3 se poate păstra (soluția $\mathbf{B_2C'_2}D$) sau se poate schimba (soluția B_2C_2D). În aplicațiile practice interesează, de obicei, păstrarea sensului de rotație pentru elementul condus. Pentru a determina o astfel de funcționare, se pot folosi mai multe procedee. Astfel, dacă elementul 3 are un moment de inerție corespunzător, el îşi păstrează sensul de rotație datorită efectului inerțial. Un alt

procedeu constă în utilizarea unor limitatori de dirijare a mişcării (Fig.2.79). În cazul mecanismului paralelogram, care are $l_1 = l_3$ şi $l_2 = l_4$, rezultând

$$|l_1 - l_4| = |l_2 - l_3|$$

$$l_1 + l_4 = l_2 + l_3,$$

se foloseşte cuplarea a două mecanisme (Fig.2.80) astfel încât, acestea să treacă prin poziţii critice în momente diferite.

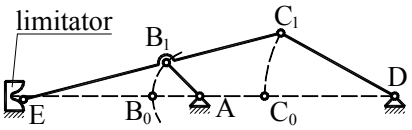


Fig. 2.79

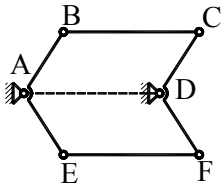


Fig. 2.80

2) Poziţii critice care conduc la blocarea mecanismului dacă elementul conducător tinde să-şi păstreze sensul de rotaţie când ajunge în aceste poziţii. Ele se înregistrează când condiţiile (2.151), scrise pentru elementul conducător, nu sunt respectate (una sau ambele). În acest caz elementul conducător este balansier, iar poziţiile critice limitează mişcarea sa de rotaţie, aşa cum se observă la mecanismul din Fig.2.81.

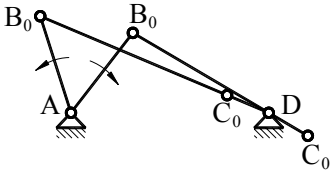


Fig. 2.81

■ Sinteza după unghiul de presiune

Unghiul de presiune al unui mecanism patrulater (Fig.2.82) cu elementul 1 conducător se defineşte (par. 2.2.3.3. - Tab.2.5) ca fiind unghiul ascuţit format între elementul 2 (biela BC) şi perpendiculara pe elementul 3 (CD) şi se exprimă prin formula

$$\alpha = \left| \frac{\pi}{2} - \sphericalangle BCD \right|. \tag{2.153}$$

Unghiul $\sphericalangle$ BCD se calculează din triunghiul BCD,

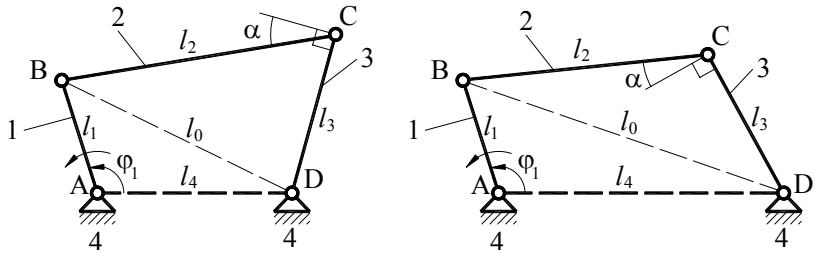
$$\sphericalangle BCD = \arccos \frac{l_2^2 + l_3^2 - l_0^2}{2 l_2 l_3}, \tag{2.154}$$

iar l_0 se determină din triunghiul ABC,

$$l_0 = l_1^2 + l_4^2 - 2l_1 l_4 \cos\varphi_1 . \qquad (2.155)$$

Condiția care asigură calitatea transmiterii forțelor, $\alpha \le \alpha_a$, se exprimă, ținând seama de (2.153), sub forma

$$\frac{\pi}{2} - \alpha \le \sphericalangle BCD \le \frac{\pi}{2} + \alpha_a . \qquad (2.156)$$



a) ***b)***

Fig. 2.82

Condițiile (2.156) sunt respectate pentru toate pozițiile mecanismului atunci când unghiul φ_1 variază într-un interval dat, dacă sunt verificate pentru valorile extreme $\sphericalangle BCD_{min}$ şi $\sphericalangle BCD_{max}$,

$$\sphericalangle BCD_{min} \ge \frac{\pi}{2} - \alpha_a$$

$$\sphericalangle BCD_{max} \le \frac{\pi}{2} + \alpha_a .$$

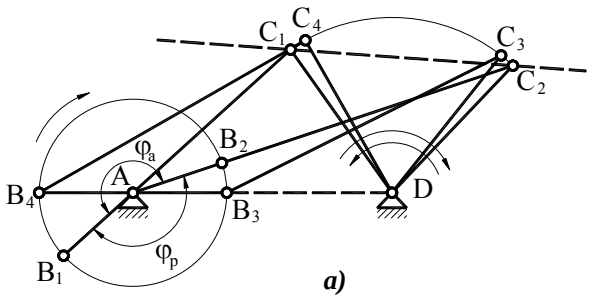
În ipoteza cea mai uzuală, când mecanismul este de tip manivelă - balansier, pentru studiul problemei, interesează patru poziții caracteristice ale mecanismului (reprezentate în Fig.2.83), care conduc la patru valori ale unghiului de presiune $\sphericalangle BCD$,

$$\sphericalangle B_1C_1D = \arccos\frac{(l_2 - l_1)^2 + l_3^2 - l_4^2}{2(l_2 - l_1)\cdot l_3}$$

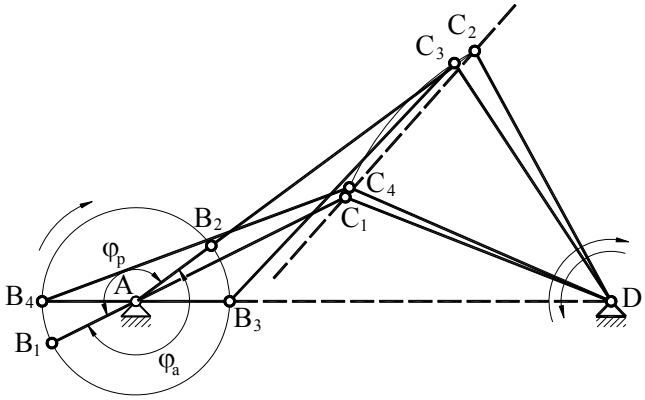
$$\sphericalangle B_2C_2D = \arccos\frac{(l_1 + l_2)^2 + l_3^2 - l_4^2}{2(l_1 + l_2)\cdot l_3}$$

$$\sphericalangle B_3C_3D = \arccos\frac{l_2^2 + l_3^2 - (l_4 - l_1)^2}{2\cdot l_2 \cdot l_3}$$

$$\sphericalangle B_4C_4D = \arccos\frac{l_2^2 + l_3^2 - (l_1 + l_4)^2}{2 \cdot l_2 \cdot l_3}.$$



a)



b)

Fig. 2.83

Dacă intervalul în care trebuie respectată condiția $\alpha \le \alpha_a$, este o rotație completă a elementului conducător, valorile extreme ale unghiului $\sphericalangle BCD$ sunt $\sphericalangle BCD_{min} = \sphericalangle B_3C_3D$ şi $\sphericalangle BCD_{max} = \sphericalangle B_4C_4D$, iar condițiile de sinteză sunt

$$\begin{cases} \sphericalangle B_3C_3D \ge \dfrac{\pi}{2} - \alpha_a \\ \sphericalangle B_4C_4D \le \dfrac{\pi}{2} + \alpha_a \end{cases} \tag{2.157}$$

Dacă interesează respectarea condiției $\alpha \le \alpha_a$ numai pentru cursa activă, sau dacă, pentru cele două curse se impun valori diferite pentru α_a (α_{aa} şi α_{ap}), trebuie să facem distincție între două tipuri de patrulatere

(Fig.2.83). În cazul mecanismului din Fig.2.83.a punctele fixe A şi D sunt de aceeaşi parte a dreptei C_1C_2, iar cursa activă a balansierului ($\varphi_1 \in [\varphi_a]$) se execută în acelaşi sens cu rotaţia manivelei. La acest mecanism poziţia AB_4C_4D este în cursa activă, iar AB_3C_3D în cursa pasivă. Ca urmare, valorile exterme ale unghiului $\sphericalangle BCD$, pentru cursa activă sunt $\sphericalangle B_2C_2D$ şi $\sphericalangle B_4C_4D$, iar pentru cursa pasivă $\sphericalangle B_3C_3D$ şi $\sphericalangle B_1C_1D$. Condiţiile de sinteză, scrise separat pentru cele două curse, se formulează astfel:

$$\begin{cases} \sphericalangle B_2C_2D \geq \dfrac{\pi}{2} - \alpha_{aa} \\ \sphericalangle B_4C_4D \leq \dfrac{\pi}{2} + \alpha_{aa} \end{cases} \qquad \begin{cases} \sphericalangle B_3C_3D \geq \dfrac{\pi}{2} - \alpha_{ap} \\ \sphericalangle B_1C_1D \leq \dfrac{\pi}{2} + \alpha_{ap} \end{cases}$$

În cazul mecanismului din Fig.2.83.b dreapta C_1C_2 trece printre punctele fixe A şi D, iar cursa activă ($\varphi_1 \in [\varphi_a]$) se execută în sens opus în raport cu rotaţia manivelei. La acest mecanism poziţia AB_3C_3D este în cursa activă, iar AB_4C_4D în cursa pasivă. Condiţiile de sinteză, pentru cele două curse sunt:

$$\begin{cases} \sphericalangle B_3C_3D \geq \dfrac{\pi}{2} - \alpha_{aa} \\ \sphericalangle B_1C_1D \leq \dfrac{\pi}{2} + \alpha_{aa} \end{cases} \qquad \begin{cases} \sphericalangle B_2C_2D \geq \dfrac{\pi}{2} - \alpha_{ap} \\ \sphericalangle B_4C_4D \leq \dfrac{\pi}{2} + \alpha_{ap} \end{cases}$$

Condiţiile (2.157) se pot scrie, ţinând seama de expresiile unghiurilor $\sphericalangle B_3C_3D$ şi $\sphericalangle B_4C_4D$, în felul următor:

$$\begin{aligned} &|l_1 - l_4| \geq \sqrt{l_2^2 + l_3^2 - 2l_2l_3 \sin\alpha_a} \\ &l_1 + l_4 \leq \sqrt{l_2^2 + l_3^2 + 2l_2l_3 \sin\alpha_a} \end{aligned} \tag{2.158}$$

Ca şi la problema rotabilităţii, se poate determina un domeniu, în planul de coordonate (l_2l_3), în care relaţiile (2.158) sunt îndeplinite (Fig.2.84), admiţând că l_1 şi l_4 se cunosc. Punctele situate pe conturul domeniului corespund unor mecanisme la care unghiul de presiune maxim este $\alpha_{max} = \alpha_a$. Comparând condiţiile (2.158) şi (2.151) se observă că primele (2.158) sunt mai restrictive. Deci, dacă sunt respectate condiţiile (2.158) sunt respectate şi condiţiile (2.151). Această concluzie reiese şi din Fig.2.84 unde sunt trasate domeniile pentru ambele seturi de condiţii. Se observă că domeniul corespunzător condiţiilor (2.158) este inclus în cel corespunzător condiţiilor (2.151). Aceasta înseamnă că sinteza după unghiul de presiune rezolvă, implicit, şi problema rotabilităţii elementului conducător.

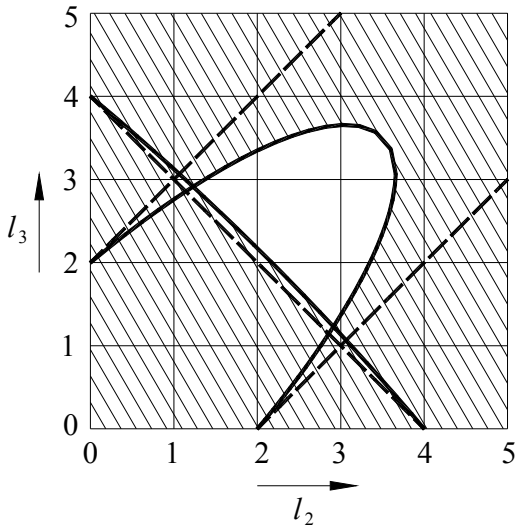


Fig. 2.84

$l_1 = 1,\ l_4 = 3,\ \alpha_a = 60^0$

■ Sinteza în funcție de pozițiile extreme ale balansierului

Pozițiile extreme ale balansierului 3, aparținând unui mecanism de tip manivelă - balansier (Fig.2.75), se înregistrează când unghiul $\sphericalangle ADC$ şi segmentul AC trec prin valori extreme. În Fig.2.85 sunt reprezentate pozițiile mecanismului, AB_1C_1D şi AB_2C_2D corespunzătoare pozițiilor extreme ale balansierului, în care $AC_1 = AC_{min} = l_2 - l_1$ şi $AC_2 = AC_{max} = l_2 + l_1$. Evident, în aceste poziții manivela 1 şi biela 2 sunt coliniare - suprapuse (AB_1C_1) sau în prelungire (AB_2C_2).

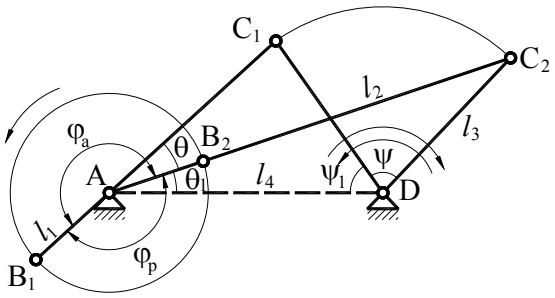


Fig. 2.85

Aplicând teorma lui Pitagora generalizată în triunghiurile AC_1D şi AC_2D, se obțin condițiile de sinteză

$$\begin{aligned} AC_1^2 &= (l_2 - l_1)^2 = l_3^2 + l_4^2 - 2l_3l_4\cos\psi_1 \\ AC_2^2 &= (l_2 + l_1)^2 = l_3^2 + l_4^2 - 2l_3l_4\cos(\psi_1 + \psi). \end{aligned} \tag{2.159}$$

În aceste relații ψ este cursa unghiulară a balansierului, care reprezintă parametrul de intrare al problemei. În sistemul de ecuații (2.159) intervin 5 parametri (l_1, l_2, l_3, l_4 şi ψ_1), dintre care trei se adoptă, iar ceilalți doi se calculează. Un caz întâlnit frecvent este acela în care necunoscutele sunt l_1 şi l_2, parametrii l_3, l_4 şi ψ_1 fiind cunoscuți. Din (2.159) rezultă imediat:

$$l_1 = \frac{AC_2 - AC_1}{2}$$

$$l_2 = \frac{AC_1 + AC_2}{2},$$

în care AC_1 şi AC_2 au expresiile

$$AC_1 = \sqrt{l_3^2 + l_4^2 - 2l_3l_4\cos\psi_1}$$

$$AC_2 = \sqrt{l_3^2 + l_4^2 - 2l_3l_4\cos(\psi_1 + \psi)}.$$

■ Sinteza în funcție de coeficientul de productivitate

După cum am arătat (par. 2.4.2.1.) coeficientul de productivitate k_p este în corespondență cu unghiul ascuțit format între AB_1 şi AB_2 (Fig.2.85) notat θ,

$$\theta = \pi\frac{1 - k_p}{1 + k_p}.$$

Se observă că, la mecanismul patrulater, $\theta = \sphericalangle C_1AC_2$. Aplicând teorema lui Pitagora generalizată în triunghiurile AC_1D şi AC_2D se obțin condițiile de sinteză,

$$\begin{aligned} l_3^2 &= (l_2 - l_1)^2 + l_4^2 - 2(l_2 - l_1)\cdot l_4\cos(\theta + \theta_1) \\ l_3^2 &= (l_1 + l_2)^2 + l_4^2 - 2(l_1 + l_2)\cdot l_4\cos\theta_1. \end{aligned} \tag{2.160}$$

Având în vedere că θ este cunoscut, avem două ecuații în care intervin 5 parametri (l_1, l_2, l_3, l_4 şi θ_1), astfel încât, trei dintre aceştia trebuie adoptați, iar ceilalți doi se calculează. Această problemă nu intervine, însă,

niciodată separat ci împreună cu celelalte probleme de sinteză elementară aşa cum se prezintă în continuare.

■ Sinteza elementară combinată

Sinteza combinată reuneşte cele trei probleme de sinteză prezentate anterior: în funcție de unghiul de presiune, în funcție de pozițiile extreme ale balansierului şi în funcție de coeficientul de productivitate. Aşa cum am arătat, problema rotabilității elementului conducător este rezolvată implicit prin sinteza după unghiul de presiune.

Condițiile sintezei combinate sunt formate din 4 ecuații, (2.159) şi (2.160), şi două inecuații (2.158) în care figurează 6 parametri necunoscuți: l_1, l_2, l_3, l_4, ψ_1 şi θ_1.

Rezolvarea problemei se poate face strict numeric sau prin procedee interactive, utilizând facilitățile grafice ale programelor utilitare. Pentru aplicarea procedeului numeric inecuațiile (2.158) se ridică la pătrat şi, apoi, toate relațiile (2.158), (2.159) şi (2.160) se împart la pătratul uneia dintre lungimile l_1, l_2, l_3, l_4, de exemplu l_3. În felul acesta numărul de necunoscute se reduce la 5: $l_1^* = \frac{l_1}{l_3}$, $l_2^* = \frac{l_2}{l_3}$, $l_4^* = \frac{l_4}{l_3}$, ψ_1 şi θ_1. Se apelează, apoi, la o strategie de căutare atribuind unui parametru un şir de valori, într-un domeniu determinat. Este preferabil să se aleagă parametrul $\psi_1 = \left[0, \pi - \frac{\psi}{2}\right]$. Pentru fiecare valoare a lui ψ_1 se rezolvă numeric sistemul (2.159), (2.160), determinând toți parametri necunoscuți şi se testează condițiile (2.158). Procesul se opreşte când aceste condiții csunt verificate. Problema poate fi interpretată şi ca una de optimizare. Restricțiile sunt egalitățile (2.159), (2.160) iar funcția obiectiv este valoarea maximă a unghiului de presiune $\alpha_{max}(l_1^*, l_2^*, l_4^*)$, care trebuie minimizată. Funcția α_{max} are expresia

$$\alpha_{max} = \max\left(\left|\frac{\pi}{2} - \sphericalangle B_3C_3D\right|, \left|\frac{\pi}{2} - \sphericalangle B_4C_4D\right|\right) \tag{2.161}$$

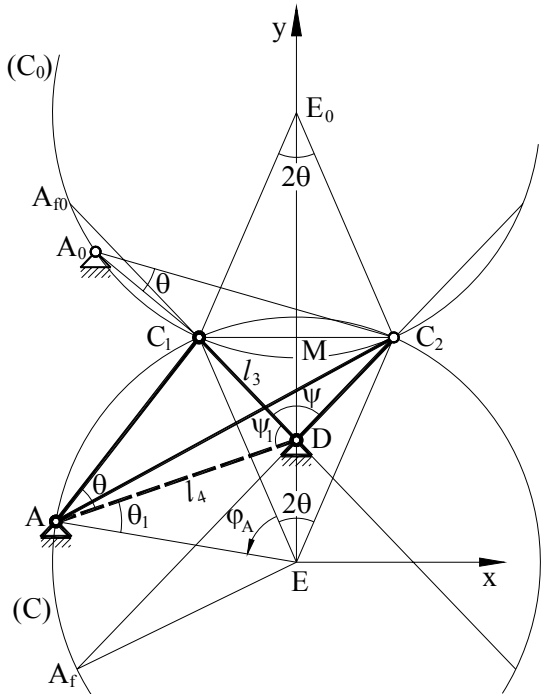


Fig. 2.86

În continuare se prezintă un procedeu fundamentat pe transpunerea analitică a unei construcţii grafice (Fig.2.86). Se reprezintă poziţiile extreme ale elementului 3, DC_1 şi DC_2, cu unghiul $\sphericalangle C_1DC_2 = \psi$, adoptând pentru l_3 o valoare arbitrară. Se construiesc, apoi, triunghiurile isoscele EC_1C_2 şi $E_0C_1C_2$, de o parte şi de cealaltă a dreptei C_1C_2, cu unghiurile din E şi din E_0 egale cu 2θ. Se trasează cercurile cu centrele în E şi E_0, trecând prin C_1 şi C_2, notate (C) şi (C_0). Dacă centrul de rotaţie al manivelei se adoptă pe cercul (C), într-un punct arbitrar A, unghiul $\sphericalangle C_1AC_2$ rezultă egal cu θ. Prin adoptarea punctului A, se determină, implicit, $l_4 = AD$ şi $\psi_1 = \sphericalangle C_1AD$. Cunoscând, prin determinare grafică, segmentele AC_1 şi AC_2, se calculează l_1 şi l_2 în modul arătat la sinteza după poziţiile extreme ale balansierului. Mecanismul patrulater este, astfel, complet determinat şi se poate calcula unghiul de presiune maxim, α_{max} (2.161). Dacă se verifică relaţia $\alpha_{max} \le \alpha_a$, mecanismul satisface toate condiţiile de sinteză, iar dacă nu se verifică, se testează altă poziţie pentru punctul A. Trebuie remarcat că punctul A se poate adopta numai pe arcul $\widehat{C_1A_f}$, adică în afara domeniului unghiular format de dreptele DC_1 şi DC_2, între care se măsoară unghiul ψ. Dacă nu se respectă acestă regulă se inregistrează situaţia descrisă în Fig.2.87 unde se vede că balansierul mecanismului obţinut prin sinteză nu oscilează cu unghiul prescris $\psi = \sphericalangle C_1DC_2$ ci cu unghiul $\psi' = \sphericalangle C_1DC'_2$. Se observă că mecanismele patrulatere obţinute cu punctul A pe cercul (C) au ambele puncte fixe situate în aceeaşi parte a dreptei C_1C_2. În mod similar, centrul de rotaţie al manivelei se poate adopta într-un punct A_0, pe arcul $\widehat{C_1A_{f_0}}$ aparţinând cercului (C_0). Sinteza mecanismului se efectuează în acelaşi fel ca în cazul punctului A.

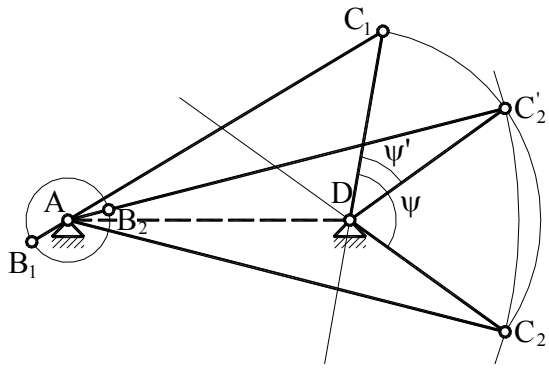


Fig. 2.87

Mecanismul obținut se caracterizează prin aceea că punctele fixe A_0 şi D sunt separate de dreapta C_1C_2. Se poate demonstra că mecanismele cu $A \in (C)$ sunt superioare, din punct de vedere al valorii unghiului de presiune în raport cu mecanismele cu $A_0 \in (C_0)$. Din această cauză, varianta analitică se va dezvolta numai pentru mecanismele cu centrul de rotație al manivelei situat pe cercul (C). Considerând o valoare arbitrară pentru l_3 şi un punct $A \in (\widehat{C_1A_f})$, determinat de unghiul $\varphi_A = \sphericalangle C_1EA$, se calculează lungimile l_1, l_2, l_4 precum şi unghiul de presiune $\alpha_{max}(l_1, l_2, l_3, l_4)$. Pentru aceasta se adoptă un sistem de coordonate Exy (Fig.2.86) şi se calculează, succesiv, următorii parametri:

- $r = AE = \dfrac{l_3 \sin\frac{\psi}{2}}{\sin\theta}$
- $x_{C_1} = -l_3 \sin\frac{\psi}{2}; x_{C_2} = l_3 \sin\frac{\psi}{2}$
- $y_{C_1} = y_{C_2} = l_3 \dfrac{\sin\frac{\psi}{2}}{tg\theta}$
- $y_D = -l_3 \cos\frac{\psi}{2} + l_3 \dfrac{\sin\frac{\psi}{2}}{tg\theta}; x_D = 0$
- $x_A = r\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta + \varphi_A\right); y_A = r\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta + \varphi_A\right)$
- $l_4 = \sqrt{x_A^2 + (y_A - y_D)^2}$
- $AC_1 = \sqrt{(x_A - x_{C_1})^2 + (y_A - y_{C_1})^2}; \quad AC_2 = \sqrt{(x_A - x_{C_2})^2 + (y_A - y_{C_2})^2}$
- $l_1 = \dfrac{AC_2 - AC_1}{2}; l_2 = \dfrac{AC_1 + AC_2}{2}$

• $\alpha_{max} = \max\left(\left|\frac{\pi}{2} - \sphericalangle B_3C_3D\right|, \left|\frac{\pi}{2} - \sphericalangle B_4C_4D\right|\right)$

Aplicând repetat procedeul indicat se determină, prin valori discrete, funcțiile $l_1(\varphi_A)$, $l_2(\varphi_A)$, $l_4(\varphi_A)$, $\alpha_{max}(\varphi_A)$ care se prezintă ca în Fig.2.88, în care sunt trasate şi dreptele $l_3 = \text{ct.}$ şi $\alpha_a = \text{ct.}$.

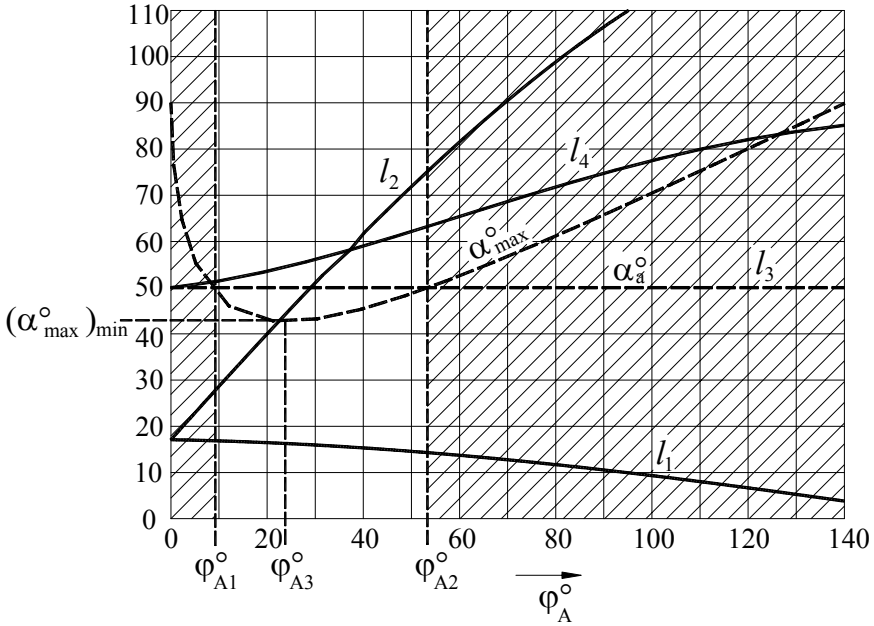


Fig. 2.88

$l_3 = 50,\ \alpha_a = 50^0,\ \psi = 40^0,\ k_p = 0{,}85$

Din analiza diagramei rezultă că, pentru a avea $\alpha_{max} \le \alpha_a$, $\varphi_A \in [\varphi_{A_1}, \varphi_{A_2}]$. Soluția optimă, după criteriul unghiului de presiune minim, se obține pentru $\varphi_A = \varphi_{A_3}$, care conduce la $\alpha_{max}(\varphi_A) \to \min$. Desigur, φ_{A_1}, φ_{A_2} şi φ_{A_3} se pot calcula prin metode numerice. Adoptând φ_A se calculează l_1, l_2 şi l_4 care, împreună cu l_3, determină complet mecanismul. Trebuie precizat că toate mecanismele asemenea cu cel determinat au aceleaşi valori pentru ψ, k_p şi α_{max}, deci satisfac condițiile de sinteză. Prin urmare putem adopta orice mecanism având lungimile proporționale cu cele determinate, aşa încât lungimea arbitrară luată inițial pentru l_3 nu influențează soluția constructivă finală.

Procedeul descris nu se poate aplica în cazul particular $k_p = 1$, $\theta = 0$, pentru că intervin singularități (împărțiri prin zero) în procesul de calcul. Deoarece $\theta = 0$, centrul de rotație al manivelei se găseşte pe dreapta C_1C_2 (Fig.2.89). Din reprezentarea mecanismului în pozițiile AB_1C_1D şi AB_2C_2D (Fig.2.89) rezultă lungimile l_1, l_2 şi l_4 în funcție de l_3 şi ψ_1,

- $l_1 = \dfrac{AC_2 - AC_1}{2} = \dfrac{C_1C_2}{2} = l_3 \sin\dfrac{\psi}{2}$
- $l_2 = \dfrac{AC_1 + AC_2}{2} = AM = l_3 \cos\dfrac{\psi}{2}\, tg\left(\dfrac{\psi}{2} + \psi_1\right)$
- $l_4 = \dfrac{l_3 \cos\dfrac{\psi}{2}}{\cos\left(\dfrac{\psi}{2} + \psi_1\right)}$

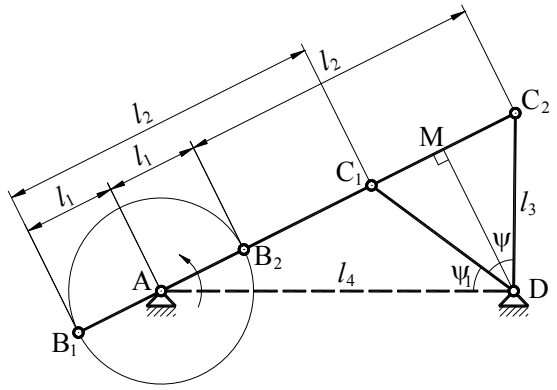


Fig. 2.89

În Fig.2.90 sunt reprezentate diagramele $l_1(\psi_1)$, $l_2(\psi_1)$, $l_4(\psi_1)$, $\alpha_{max}(\psi_1)$ precum şi dreptele $\alpha_a = ct.$ şi $l_3 = ct.$, din care se poate adopta convenabil ψ_1, care, la rândul său, determină complet mecanismul.

Parametrii de intrare caracteristici unei probleme de sinteză elementară complexă, ψ, k_p şi α_a, nu sunt întotdeauna compatibili. Din diagrama reprezentată în Fig.2.88 rezultă că pentru ψ şi $k_p(\theta)$ date, se obține o mulțime de mecanisme având $\alpha_{max} \geq (\alpha_{max})_{min}$. Pentru ca problema să aibă soluții trebuie respectată condiția $\alpha_a \geq (\alpha_{max})_{min}$. Pentru a permite formularea corectă a problemei de sinteză, în Fig.2.91 se indică valorile pentru $(\alpha_{max})_{min}$ în funcție de ψ şi k_p.

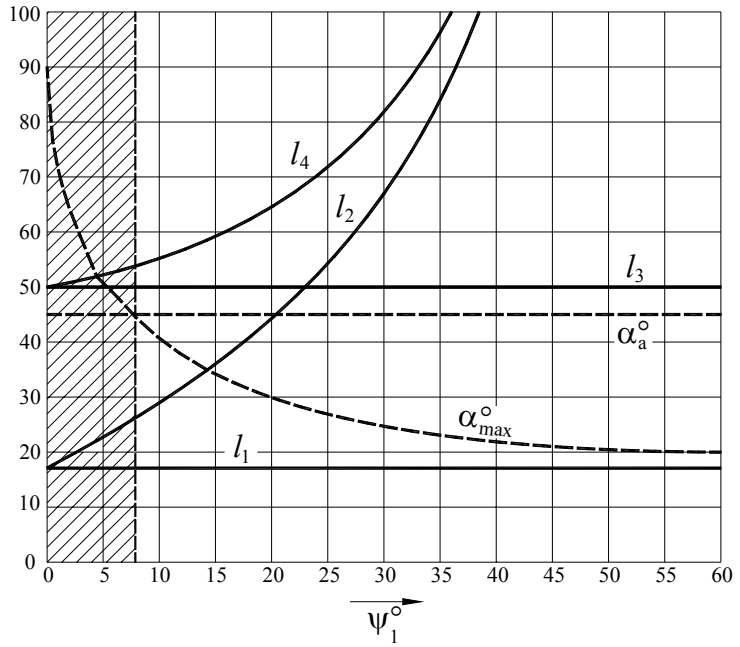


Fig. 2.90

$l_3 = 50,\ \alpha_a = 45^0,\ \psi = 40^0,\ k_p = 1$

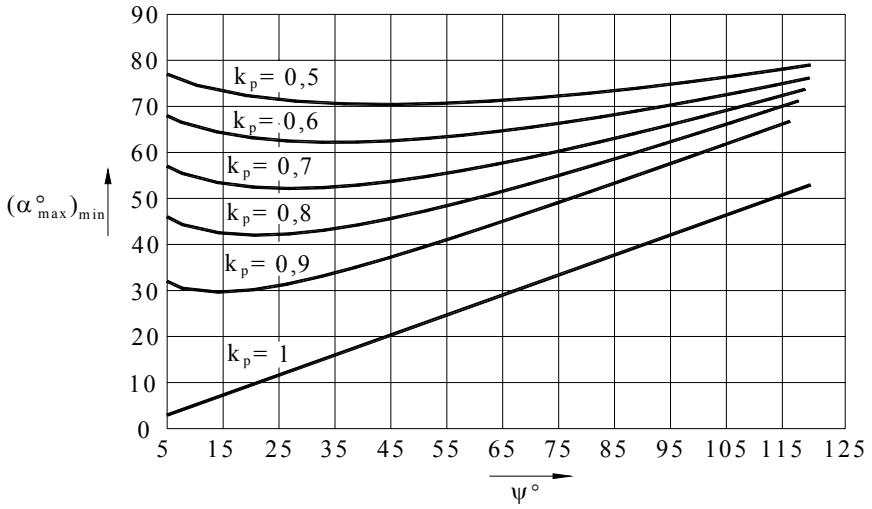


Fig. 2.91

2.4.2.3. Mecanismul manivelă - piston

- **Problema rotabilității**

Condiția de rotabilitate pentru elementul conducător 1 (Fig.2.92) se stabileşte aplicând condiția (2.5) în cazul grupei RRT (2, 3 - BC)

$$l_2 \geq l_0 .$$

La o rotație completă a elementului 1, $l_{0\max} = l_1 + l_4$ ceea ce conduce la condiția

$$l_1 + l_4 \leq l_2 . \qquad (2.162)$$

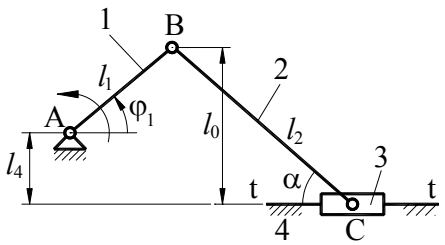


Fig. 2.92

Dacă mecanismul are $l_1 + l_4 = l_2$, se înregistrează o poziție critică (BC⊥ tt).

Mecanismul manivelă - piston utilizat în construcția motoarelor cu ardere internă, când pistonul este element conducător, are două poziții moarte (critice) când manivela şi biela sunt coliniare (grupa RRR - 1, 2 - ABC). Trecerea prin aceste poziții fără schimbarea sensului de rotație al manivelei este determinată de efectul inerțial şi de faptul că motorul are mai multe mecanisme paralele (cilindri) care trec prin pozițile moarte în momente diferite.

- **Sinteza după unghiul de presiune**

Unghiul de presiune al mecanismului manivelă - piston se defineşte (par. 2.2.3.3. - Tab.2.5) ca fiind unghiul format între biela BC şi axa de translație tt (Fig.2.92) şi are expresia

$$\sin\alpha = \frac{l_0}{l_2} = \frac{l_1 \sin\varphi_1 + l_4}{l_2} ,$$

iar valoarea maximă, $\alpha_{\max}$, este

$$\sin\alpha_{\max} = \frac{l_1 + l_4}{l_2} . \qquad (2.163)$$

Condiția $\alpha \leq \alpha_a$, care se asigură când $\alpha_{\max} \leq \alpha_a$, se scrie

$$l_1 + l_4 \leq l_2 \sin\alpha_a . \qquad (2.164)$$

Condiția (2.164) este mai restrictivă decât condiția (2.162) ceea ce înseamnă că sinteza în funcție de unghiul de presiune asigură şi rotabilitatea elementului conducător, aşa cum se întâmplă şi la mecanismul patrulater.

■ Sinteza în funcție de pozițiile extreme ale patinei

Pozițiile extreme ale patinei se înregistrează când distanța AC trece prin valori extreme $AC_1 = AC_{min} = l_2 - l_1$ şi $AC_2 = AC_{max} = l_1 + l_2$. Desigur, în aceste poziții manivela şi biela sunt coliniare (Fig.2.93). Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiurile dreptunghice AC_1D şi AC_2D se obțin condițiile de sinteză

$$\begin{aligned} AC_1^2 &= (l_2 - l_1)^2 = l_4^2 + h_1^2 \\ AC_2^2 &= (l_1 + l_2)^2 = l_4^2 + (h + h_1)^2. \end{aligned} \tag{2.165}$$

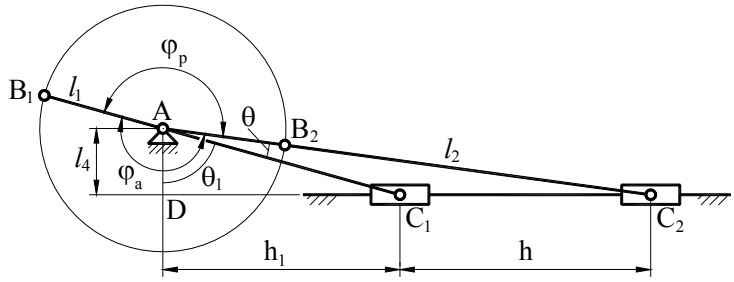


Fig. 2.93

În aceste ecuații h este cursa patinei şi constituie parametrul de intrare al problemei, iar l_1, l_2, l_4 şi h_1 sunt necunoscute. Desigur, pentru rezolvare, doi dintre cei 4 parametri se adoptă, iar ceilalți doi se calculează. De obicei l_4 şi h_1 se adoptă, iar l_1 şi l_2 se calculează cu uşurință din (2.165).

■ Sinteza în funcție de coeficientul de productivitate

Ca şi la mecanismul patrulater, unghiul $\theta(k_p) = \sphericalangle C_1AC_2$. Condițiile de sinteză rezultă din triunghiurile dreptunghice AC_1D şi AC_2D,

$$\begin{aligned} l_4 &= (l_2 - l_1)\cos\theta_1 \\ l_4 &= (l_1 + l_2)\cos(\theta + \theta_1). \end{aligned} \tag{2.166}$$

În sistemul (2.166) θ este parametrul de intrare, rezultând patru parametri necunoscuți (l_1, l_2, l_4 şi θ_1), astfel că, pentru rezolvare, doi parametri se adoptă. Această problemă intervine, practic, întotdeauna în combinație cu celelalte probleme de sinteză elementară.

■ Sinteza elementară combinată

Ca şi la mecanismul patrulater, sinteza combinată reuneşte cele trei probleme precedente. Modelul matematic este constituit din ecuațiile (2.165) şi (2.166) şi din inecuația (2.164), în care intervin parametrii de intrare h, $\theta(k_p)$ şi α_a, iar parametrii care trebuie determinați sunt l_1, l_2, l_4, h_1 şi θ_1. Printr-o strategie de căutare se atribuie unui parametru (de exemplu h_1) un şir de valori într-un domeniu adoptat convenabil. Pentru fiecare valoare a lui h_1 se rezolvă numeric sistemul (2.165), (2.166) şi se verifică, apoi, condiția (2.164). Desigur, problema poate fi formulată ca una de optimizare în care funcția obiectiv este $\alpha_{max}(l_1, l_2, l_4)$ (2.163), iar restricțiile sunt condițiile (2.165) şi (2.166). Trebuie menționat că la modificarea parametrului de intrare h (păstrând $k_p(\theta)$ constant) soluțiile pentru l_1, l_2, l_4 şi h_1 se modifică proporțional cu raportul $\frac{h}{h'}$ în care h şi h' reprezintă valoarea inițială şi cea modificată a cursei. Aceasta înseamnă că soluțiile obținute pentru un h arbitrar pot fi adoptate cu uşurință pentru orice valoare a cursei.

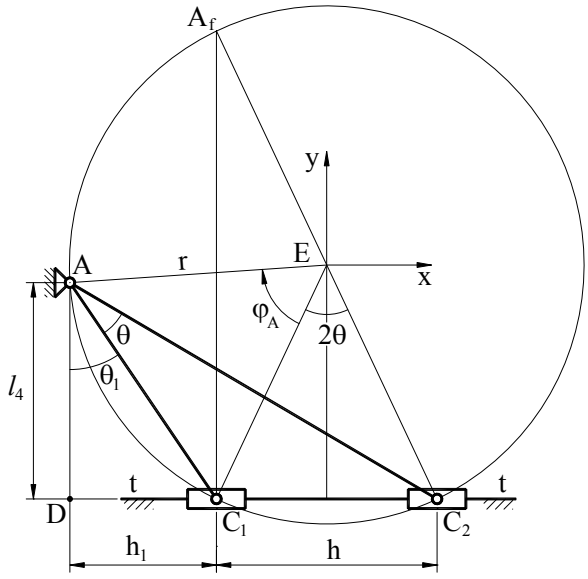


Fig. 2.94

În continuare se prezintă un procedeu de rezolvare grafic şi transpunerea sa analitică. Se trasează axa de translație tt şi se pune în evidență segmentul $C_1C_2 = h$ (Fig.2.94). Se construieşte, apoi, triunghiul isoscel EC_1C_2 cu unghiul $\sphericalangle C_1EC_2 = 2\theta$. Cu centrul în E, se trasează un cerc care

trece prin C_1 şi C_2. Centrul de rotaţie al manivelei, A, se adoptă pe acest cerc, deoarece, în acest caz, $\sphericalangle C_1AC_2 = \theta$. Lungimea $l_4 = AD$ rezultă implicit, iar l_1 şi l_2 se calculează în modul arătat la sinteza după poziţiile extreme ale patinei, în funcţie de AC_1 şi AC_2 evaluate grafic. Pentru determinările analitice se consideră sistemul de coordonate Exy şi se adoptă variabila independentă $\varphi_A = \sphericalangle C_1EA$. Se calculează, succesiv, următorii parametri:

- $r = AE = \dfrac{h}{2\sin\theta}$
- $x_{C_1} = -\dfrac{h}{2}; x_{C_2} = \dfrac{h}{2}; y_{C_1} = y_{C_2} = -\dfrac{h}{2tg\theta}$
- $x_A = r\cos\left(\dfrac{3\pi}{2} - \theta - \varphi_A\right); y_A = r\sin\left(\dfrac{3\pi}{2} - \theta - \varphi_A\right)$
- $AC_1 = \sqrt{(x_A - x_{C_1})^2 + (y_A - y_{C_1})^2}; AC_2 = \sqrt{(x_A - x_{C_2})^2 + (y_A - y_{C_2})^2}$
- $l_1 = \dfrac{AC_2 - AC_1}{2}; l_2 = \dfrac{AC_1 + AC_2}{2}; l_4 = y_A - y_{C_1}$
- $\alpha_{max} = \arcsin\dfrac{l_1 + l_4}{l_2}$.

Astfel, se obţin funcţiile $l_1(\varphi_A)$, $l_2(\varphi_A)$, $l_4(\varphi_A)$, $\alpha_{max}(\varphi_A)$ exprimate prin valori discrete. În Fig.2.95 sunt reprezentate aceste funcţii împreună cu dreptele $h = ct$ şi $\alpha_a = ct$. Mecanismul se adoptă în domeniul $\varphi_A \in [\varphi_{A_1}, \varphi_{A_2}]$, unde $\alpha_{max} \le \alpha_a$, iar pentru optimizarea soluţiei, $\varphi_A = \varphi_{A_3}$, când $\alpha_{max} \to \min$. Valoarea iniţială pentru h se poate lua arbitrar, deoarece, aşa cum am arătat, la schimbarea acestei valori rezultă mecanisme asemenea, având laturile proporţionale cu cele determinate şi aceleaşi valori pentru θ şi α_{max}. De altfel curba $\alpha_{max}(\varphi_A)$, precum şi minimul acestei curbe $(\alpha_{max})_{min}$ sunt determinate numai de valoarea parametrului k_p. În Fig.2.96 este reprezentată funcţia $(\alpha_{max})_{min}(k_p)$ necesară pentru formularea problemei de sinteză care trebuie să respecte condiţia $\alpha_a \ge (\alpha_{max})_{min}$.

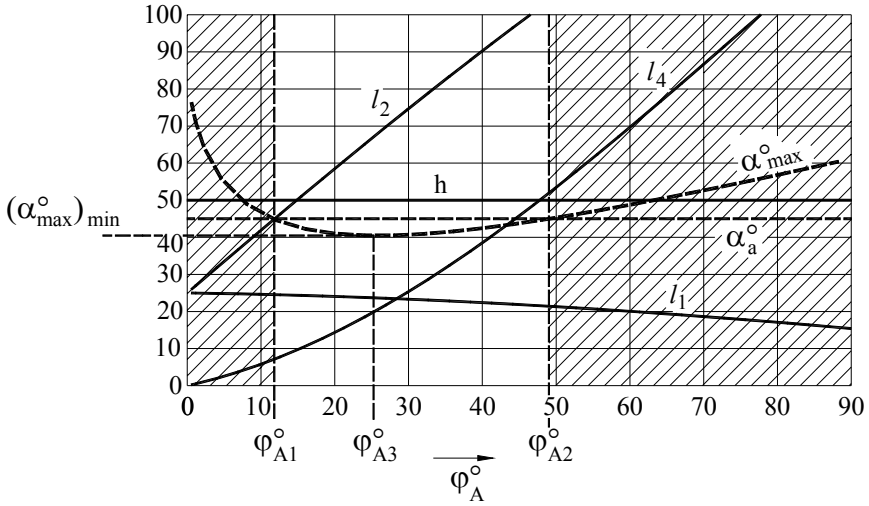


Fig. 2.95

$h = 50,\ \alpha = 45^0,\ k_p = 0{,}85$

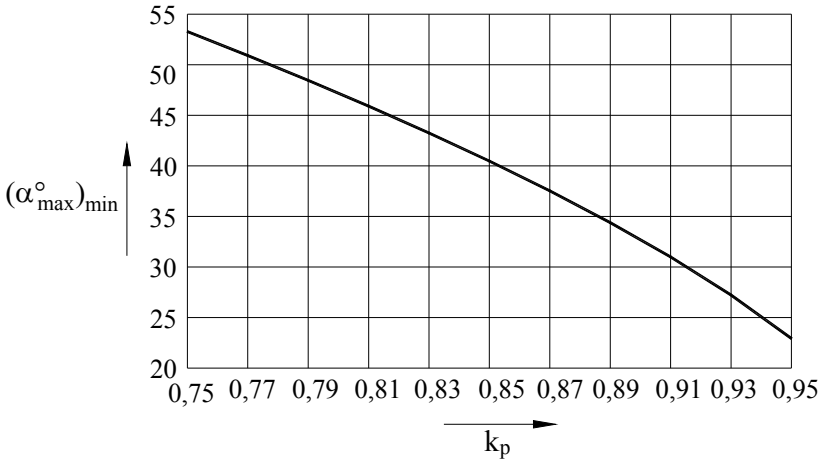


Fig. 2.96

2.4.2.4. Mecanismul cu culisă de rotație

- **Problema rotabilității**

Considerând elementul 1 - conducător (Fig.2.97) se scrie condiția (2.7) caracteristică grupei RTR (2, 3 - BC)

$$l_0 \geq 0 . \qquad (2.167)$$

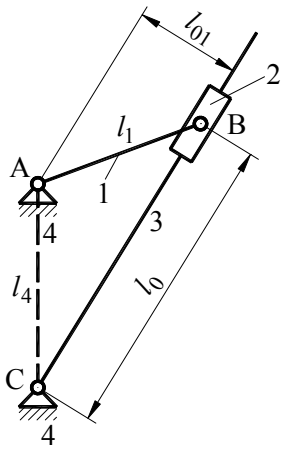


Fig. 2.97

Deoarece $l_0 < 0$ nu are semnificație fizică, condiția (2.167) este satisfăcută pentru toate pozițiile elementului 1 şi pentru orice valori ale parametrilor constructivi l_1 şi l_4. Ca urmare elementul 1 este întotdeauna manivelă. Dacă $l_0 = 0$ ($B \equiv C$) se înregistrează o poziție critică la mecanismul cu $l_1 = l_4$.

Se consideră, în mod similar, elementul 3 - conducător şi se scrie condiția (2.5) pentru grupa structurală RRT (1, 2 - AB)

$$l_1 \geq |l_{01}| .$$

La o rotație completă a elementului 3, $|l_{01}|_{max} = l_4$, astfel încât, condiția de rotabilitate a elementului 3 este $l_1 \geq l_4$.

Prin urmare, dacă $l_1 \geq l_4$ mecanismul este de tip dublă - manivelă (cu culisă rotitoare), iar dacă $l_1 < l_4$ mecanismul este de tip manivelă - balansier (cu culisă oscilantă). În aplicațiile practice se foloseşte, de regulă, mecanismul cu culisă oscilantă cu elementul 1 - conducător, având

$$l_4 > l_1 . \qquad (2.168)$$

- **Sinteza în funcție de calitatea transmiterii forțelor**

Condiția pentru transmiterea forțelor (par. 2.2.3.3. - Tab.2.5) este

$$l_0 \geq l_{0a} ,$$

iar $l_{0\,min} = l_4 - l_1$, de unde rezultă

$$l_4 - l_1 \geq l_{0a} . \qquad (2.169)$$

Dacă se împarte relația (2.169) la l_1 se obține

$$\frac{l_4}{l_1} - 1 \geq \frac{l_{0a}}{l_1} = \varepsilon_a , \qquad (2.170)$$

în care ε_a este o lungime relativă admisibilă care se poate recomanda indiferent de lungimea absolută l_1.

- **Sinteza elementară combinată**

Poziţiile extreme ale culisei se obţin atunci când unghiul $\sphericalangle ACB$ are valori maxime, simetrice fată de dreapta AC. Aceste poziţii se înregistrează când manivela AB este perpendiculară pe culisa BC (Fig.2.98). Condiţia de sinteză în funcţie de poziţiile extreme ale culisei rezultă din triunghiul dreptunghic AB_1C (sau AB_2C)

$$\sin\frac{\psi}{2} = \frac{l_1}{l_4} . \qquad (2.171)$$

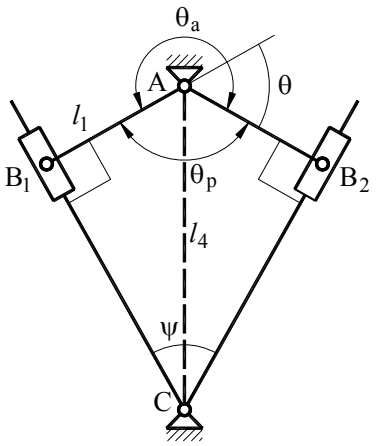


Fig. 2.98

Din Fig.2.98 se observă că unghiurile ψ şi θ sunt egale. Aceasta înseamnă că pentru parametrii k_p şi ψ nu se pot impune valori independente atunci când se formulează problema de sinteză.

Din relaţiile (2.170) şi (2.171) se obţine

$$\sin\frac{\theta}{2} = \sin\frac{\psi}{2} \leq \frac{1}{1+\varepsilon_a} ,$$

care arată că ψ şi, implicit, k_p, au valori limitate în funcţie de valoarea admisibilă ε_a.

2.4.2.5. Mecanismul cu cilindru oscilant

În cazul acestui mecanism, care este acţionat printr-o cuplă de translaţie, problemele rotabilităţii şi a coeficientului de productivitate nu intervin. În consecinţă, interesează sinteza după unghiul de presiune şi cea în funcţie de poziţiile extreme ale elementului condus, care sunt, aşa cum se va vedea, strâns legate.

Unghiul de presiune se defineşte (par. 2.2.3.3. - Tab.2.5) ca unghiul ascuţit format între dreapta AC şi perpendiculara pe elementul CD (Fig.2.99) şi se calculează cu relaţia

$$\alpha = \left| \frac{\pi}{2} - \sphericalangle ACD \right|, \tag{2.172}$$

în care unghiul $\sphericalangle ACD$ rezultă din triunghiul ACD

$$\sphericalangle ACD = \arccos\left(\frac{l_{21}^2 + l_3^2 - l_4^2}{2 l_{21} l_3} \right). \tag{2.173}$$

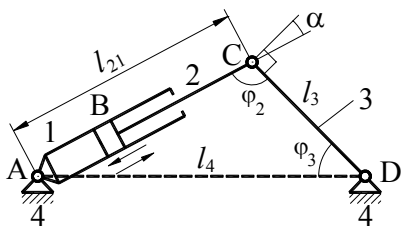


Fig. 2.99

O problemă esenţială în proiectarea acestui mecanism este legată de poziţionarea unghiului de oscilaţie a elementului 3 astfel încât, să înregistrăm unghiuri de presiune cât mai mici. Pentru a rezolva această problemă se exprimă unghiul de presiune în funcţie de unghiul de poziţie al elementului 3, φ_3. Din triunghiul ACD se obţine

$$l_{21} = \sqrt{l_3^2 + l_4^2 - 2 l_3 l_4 \cos\varphi_3}\ , \tag{2.174}$$

care se poate introduce în formula (2.173). În felul acesta se obţine funcţia $\alpha = f(\varphi_3)$ având graficul reprezentat în Fig.2.100. Punctul φ_{30}, în care $\alpha = 0$, corespunde poziţiei în care $AC \perp CD$. Desigur, intervalul util al acestei diagrame, având mărimea egală cu cursa unghiulară ψ, este definit de unghiurile φ_{31} şi φ_{32} care determină poziţiile extreme ale elementului 3. Valoarea maximă a unghiului de presiune, în acest interval, este una dintre valorile α_1 sau α_2,

$$\alpha_{max} = \max(\alpha_1, \alpha_2)\ .$$

Valoarea minimă a unghiului α_{max} în intervalul $\varphi_{31} \in [0, \pi - \psi]$, $(\alpha_{max})_{min}$ se obţine când $\alpha_1 = \alpha_2$ (Fig.2.101). Într-adevăr, pentru orice altă poziţie a intervalului $[\varphi_{31}, \varphi_{32}]$, α_1 sau α_2 sunt mai mari decât $(\alpha_{max})_{min}$. Poziţiile mecanismului pentru care $\alpha_1 = \alpha_2$, notate AC_1D şi AC_2D (Fig.2.102), se caracterizează prin aceea că punctele A, C_1 şi C_2 sunt coliniare. Din Fig.2.102 se observă imediat că

$$\alpha_1 = \alpha_2 = (\alpha_{max})_{min} = \frac{\psi}{2}\ .$$

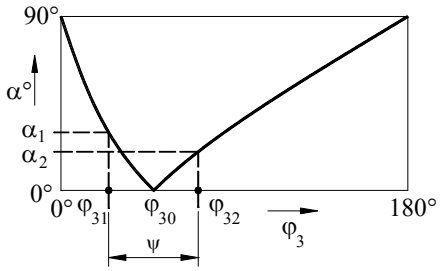


Fig. 2.100

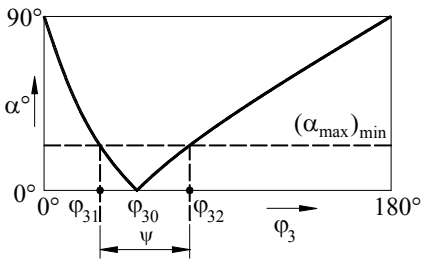


Fig. 2.101

Din condiția $\alpha \le \alpha_a$, rezultă $\psi \le 2\alpha_a$ ceea ce arată că în cazul acestui mecanism cursa unghiulară este limitată de valoarea unghiului de presiune admisibil. Cu aceste observații, fazele procesului de sinteză se desfăşoară în modul următor. Lungimea l_3 se adoptă, de regulă, din considerente legate de destinația mecanismului. Se calculează, apoi, cursa pistonului

$$h_p = C_1C_2 = l_3 \sin\frac{\psi}{2},$$

în funcție de care se alege motorul hidraulic, care are o construcție tipizată. Distanțele $AC_1 = l_{21\min}$ şi $AC_2 = l_{21\max}$ se înscriu între parametrii tehnici ai acestui motor. În fine, se calculează l_4 din triunghiul dreptunghic AMD,

$$l_4 = \sqrt{\left(\frac{AC_1 + AC_2}{2}\right)^2 + l_3^2}\ .$$

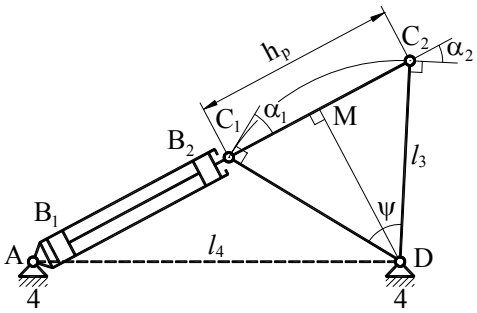


Fig. 2.102

2.4.3. Sinteza mecanismelor pentru generarea curbelor

În cadrul acestei probleme se cere să se construiască un mecanism, de structură cunoscută, astfel încât, un punct al acestuia să descrie o curbă dată. Problema are numeroase aplicații tehnice legate, în special, de conducerea unei scule sau a unui element de execuție după o curbă determinată de condițiile tehnologice. Curba impusă poate fi dată printr-o ecuație (în plan) sau prin puncte. În primul caz, problema admite o soluție exactă numai în cazuri excepționale, când ecuația traiectoriei se poate aduce, prin diverse particularizări, la aceeaşi formă cu ecuația curbei date. Altfel, curba este generată aproximativ cu o abatere care trebuie menținută sub o valoare admisibilă, iar rezolvarea este fundamentată pe noțiuni de teoria aproximării funcțiilor. În cazul al doilea se indică un număr finit de puncte, date prin coordonatele lor, prin care trebuie să treacă traiectoria unui punct al mecanismului. În cele ce urmează se prezintă o aplicație pentru un mecanism patrulater articulat, unde curba este dată prin puncte, cu observația că abordarea altor mecanisme se face în mod similar. Un aspect aparte al acestei probleme, cu implicații practice deosebite, este sinteza pentru generarea de traiectorii rectilinii şi circulare.

2.4.3.1. Aplicație la mecanismul patrulater articulat plan

Curba dată este definită prin punctele $P_i(x_i, y_i)$ $(i = 1, p)$, în raport cu un sistem de referință fix. Ne propunem să construim un mecanism patrulater (Fig.2.103), astfel încât un punct al bielei să descrie o traiectorie care să treacă prin punctele date. Necunoscutele problemei, în număr de 9 sunt: lungimile elementelor: (l_1, l_2, l_3, l_4), parametrii de poziție ai bazei (x_A, y_A, φ_4) şi parametrii de poziție ai punctului generator în raport cu biela $(l_P = l_{BP}, \beta_P)$. Modelul matematic se obține prin scrierea ecuațiilor de analiză a pozițiilor pentru fiecare punct P_i $(i = 1, p)$. Pentru aceasta se pot utiliza diverse metode de analiză cinematică. Aplicând metoda contururilor vectoriale închise se obțin

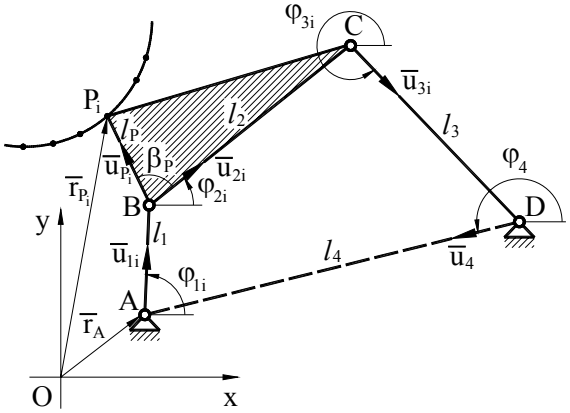


Fig. 2.103

ecuațiile vectoriale

$$\begin{cases} \overline{u}_{1i} l_1 + \overline{u}_{2i} l_2 + \overline{u}_{3i} l_3 + \overline{u}_4 l_4 = 0 \\ \overline{r}_{Pi} = \overline{r}_A + \overline{u}_{1i} l_1 + \overline{u}_{Pi} l_P \end{cases} \quad (i = 1, p)$$

care se proiectează pe axele de coordonate,

$$\begin{cases} l_1 \cos\varphi_{1i} + l_2 \cos\varphi_{2i} + l_3 \cos\varphi_{3i} + l_4 \cos\varphi_4 = 0 \\ l_1 \sin\varphi_{1i} + l_2 \sin\varphi_{2i} + l_3 \sin\varphi_{3i} + l_4 \sin\varphi_4 = 0 \\ x_A + l_1 \cos\varphi_{1i} + l_P \cos(\varphi_{2i} + \beta_P) = x_i \\ y_A + l_1 \sin\varphi_{1i} + l_P \sin(\varphi_{2i} + \beta_P) = y_i \end{cases} \quad (i = 1, p) \qquad (2.175)$$

Odată cu scrierea sisetmului (2.175) se introduc încă 3p necunoscute - unghiurile φ_{1i}, φ_{2i}, φ_{3i} $(i = 1, p)$. Din condiția ca numărul de ecuații (4p) să fie egal cu cel al necunoscutelor $(3p + 9)$ se obține numărul de puncte $p = 9$, rezultând un sistem neliniar cu 36 de ecuații. Desigur, rezolvarea se face prin metode numerice. Pentru o funcționare corespunzătoare, mecanismul trebuie să îndeplinească şi alte condiții cum ar fi cea referitoare la unghiul de presiune sau cele de existență a manivelei. În această situație numărul de puncte trebuie redus. Astfel, dacă $p = 8$, numărul de ecuații este $4p = 32$, numărul de necunoscute este $3p + 9 = 33$, iar problema are o infinitate simplă de soluții. Dintre acestea se adoptă una care să verifice condițiile suplimentare sau, printr-un proces de optimizare, se caută soluția pentru care unghiul de presiune este minim. Trebuie menționat că, pentru a asigura convergența procedeului de calcul numeric, soluția inițială trebuie să fie cât mai apropiată de cea căutată. În acest scop se pot utiliza atlase care conțin curbe de bielă pentru un număr mare de mecanisme.

În cazul mecanismelor cu 6 elemente se pot adopta 15 puncte realizând o definire mai bună a curbei care trebuie generată. Există, însă, dezavantajul unui mecanism mai complicat şi a unei rezolvări numerice dificile fiind vorba de un sistem neliniar format din $6p = 90$ de ecuații.

■ Teorema Roberts - Cebâşev

Curbele de bielă ale mecanismului patrulater, care în cazul general, sunt de gradul 6, au făcut obiectul unor studii foarte aprofundate şi s-au pus în evidență o serie de proprietăți utile pentru procesul de sinteză [8, 23]. Una dintre aceste proprietăți este cunoscută sub denumirea de **teorema Roberts - Cebâşev** şi arată că **aceeaşi curbă de bielă poate fi generată de trei mecanisme patrulatere distincte**.

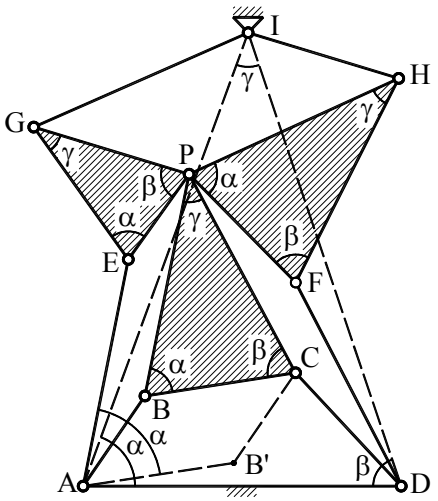


Fig. 2.104

Se consideră patrulaterul ABCD (Fig.2.104) şi punctul P solidar cu biela BC, care se dezvoltă prin legarea succesivă a grupelor structurale AEP, DFP şi GIH, toate de tip RRR. Dimensiunile se adopţă în aşa fel, încât patrulaterele ABPE, DCPF şi GIHP să fie paralelograme, iar triunghiurile EGP şi FHP să fie asemenea cu triunghiul BCP. Se face o construcţie suplimentară trasând prin A o paralelă la BC şi prin C o paralelă la AB. Rezultă paralelogramul $ABCB'$. Pe baza asemănării celor trei triunghiuri, se pot scrie proporţiile

$$\frac{BP}{BC} = \frac{EG}{EP} = \frac{HP}{FP} = k,$$

care conduc la următoarele relaţii

$$AE = BP = BC \cdot k = AB' \cdot k$$

$$EG = EP \cdot k = AB \cdot k = B'C \cdot k$$

$$GI = HP = FP \cdot k = CD \cdot k.$$

Din figură se observă că segmentele AE, EG şi GI sunt rotite faţă de segmentele AB', $B'C$ şi CD cu unghiul α. Aceasta înseamnă că patrulaterele AEGI şi $AB'CD$ sunt asemenea şi primul este rotit faţă de cel de-al doilea cu unghiul α. Prin urmare, unghiul $\sphericalangle DAI$ are tot valoarea α. Printr-un raţionalment similar se demonstrează că $\sphericalangle ADI$ are valoarea β şi, ca urmare, triunghiul ADI este asemenea cu triunghiul BCP. Deoarece triunghiul BCP are dimensiuni invariabile rezultă că triunghiul ADI are aceeaşi proprietate, iar cum latura AD este fixă, înseamnă că şi punctul I este fix, deşi elementele mecanismului sunt mobile. În aceste condiţii în punctul I se poate amplasa o articulaţie fixă fără a modifica funcţionarea mecanismului. Se formează, în felul acesta încă două patrulatere AEGI şi DFHI care se mişcă simultan cu patrulaterul iniţial ABCD, iar punctul lor comun P descrie, evident, o curbă de bielă unică.

Teorema arată că soluţia unei probleme de sinteză pentru generarea unei curbe nu este unică şi că, pornind de la o soluţie determinată, se pot construi cu uşurinţă, alte două mecanisme care descriu aceeaşi traiectorie.

2.4.3.2. Mecanisme generatoare de traiectorii rectilinii şi circulare

Aplicațiile practice reclamă, uneori, utilizarea de mecanisme care să genereze traiectorii rectilinii sau circulare. De-a lungul timpului au fost descoperite, prin metode ştiințifice sau pe cale intuitivă, multe asemenea mecanisme [3, 8]. Mecanismele care generează traiectorii rectilinii exacte se numesc **inversoare** deoarece construcția lor se bazează pe transformarea matematică inversă a unui cerc într-o dreaptă. Pentru exemplificare, în Fig.2.105 este reprezentat **inversorul lui Peaucellier**. Aplicațiile practice ale inversoarelor sunt reduse datorită construcției complexe, cu multe elemente. Mecanismele care generează segmente de traiectorii aproximativ rectilinii se numesc **directoare**. Din multitudinea de mecanisme directoare cunoscute [3], în Fig.2.106 se prezintă câteva, precizându-se dimensiunile relative ale elementelor.

Generarea traiectoriilor circulare se poate face, de asemenea exact (cu ajutorul inversoarelor) sau aproximativ. Ca şi în cazul precedent, interesează, în primul rând, mecanismele care descriu, arce de cerc, cu aproximație. În Fig.2.107 se prezintă două dintre aceste mecanisme.

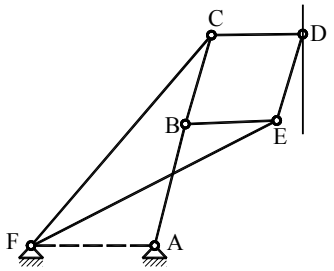
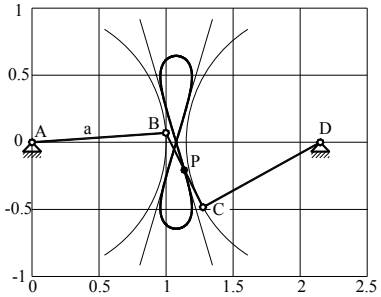
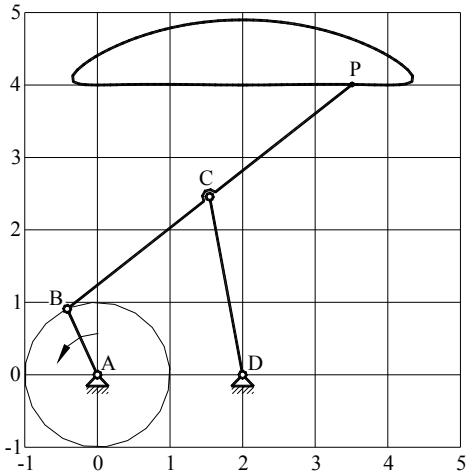


Fig. 2.105
AB = AF;
BC=CD=DE=BE; FC=FE

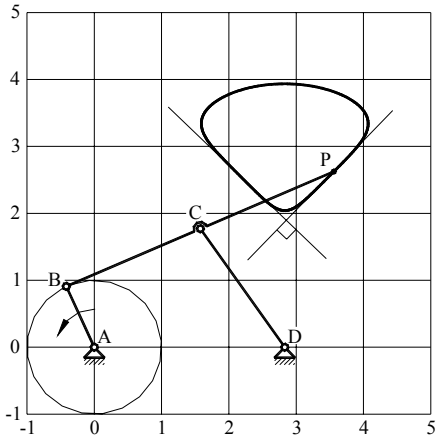


a) *Mecanism patrulater director Watt:* AB = CD = a; BC = 0,62a; AD = 2,15a, BP = PC = 0,31a.

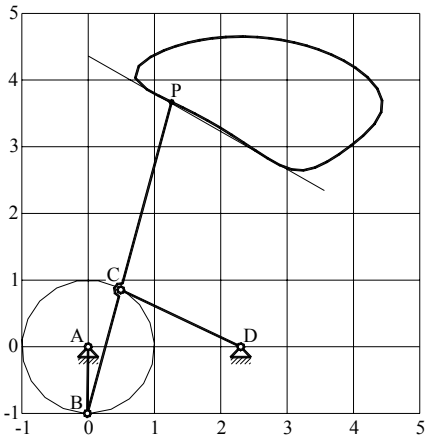


b) *Mecanism patrulater director Cebâşev*
AB = a; BC = CD = CP = 2,5a; AD = 2a

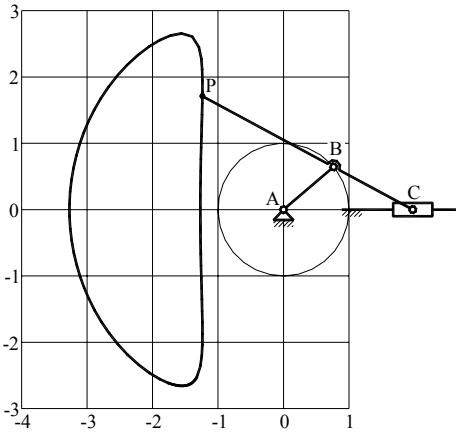
Fig. 2.106



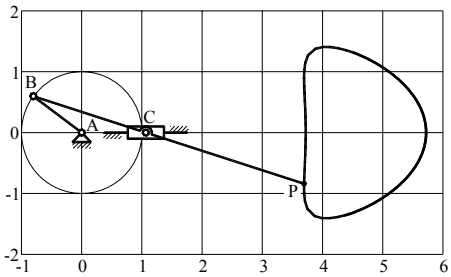
c) *Mecanism patrulater director Cebâşev*
AB = a; BC = CD = CP = 2,17a;
AD = 2,83a



d) *Mecanism patrulater director Evans*
AB = a; BC = 1,92a; CD = 2a;
CP = 2,92a; AD = 2,3a

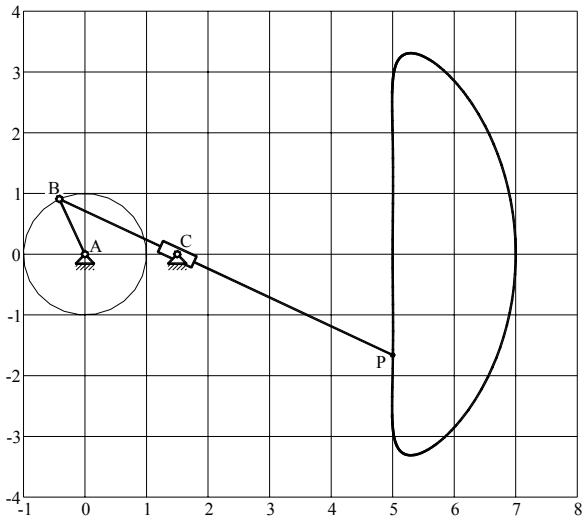


e) *Mecanism director manivelă – piston*
AB = a, BC=1,37a, BP=2,27a



f) *Mecanism director manivelă – piston*
AB = a, BC=1,96a, BP=2,76a

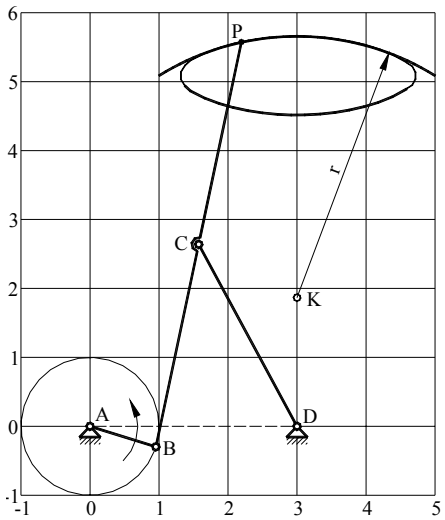
Fig. 2.106



g) *Mecanism director cu culisă oscilantă*

$AB = a$, AC=1,5a, BP=6a

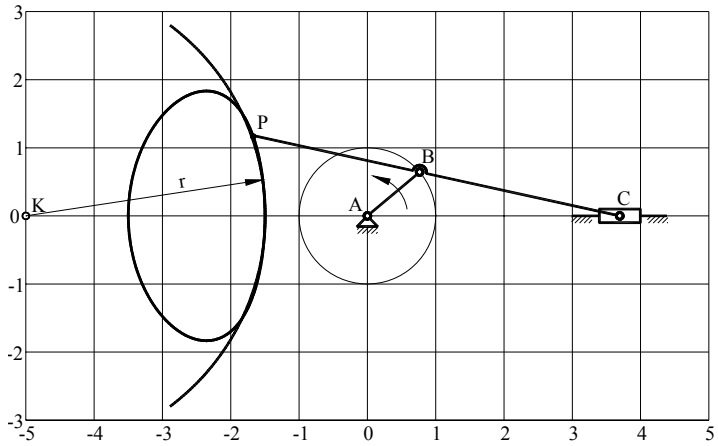
Fig. 2.106



a) *Mecanism patrulater Cebâşev pentru generarea unei traiectorii parţial circulare*

$AB = a$, BC=CD=CP=AD=3a, $x_k = 3a$, $y_k = 1{,}867a$, r=3,79a

Fig. 2.107



b) *Mecanism manivelă piston pentru generarea unei traiectorii parţial circulare*
$AB = a$, BC=3a, BP=2,5a, r=3,5a, $x_k = -5a$

Fig. 2.107

2.4.4. Sinteza mecanismelor pentru ghidarea elementelor

În cadrul acestei probleme de sinteză se impune ca un element al mecanismului să treacă, în timpul mişcării sale, printr-un şir de poziţii date. Cea mai simplă formulare a acestei probleme se referă la sinteza unui mecanism patrulater astfel încât biela să treacă prin două sau trei poziţii impuse. În primul caz se dau poziţiile B_1C_1, B_2C_2 şi, implicit, lungimea l_2 (Fig.2.108). Articulaţiile fixe A şi D se găsesc, evident, pe mediatoarele segmentelor B_1B_2 şi C_1C_2, existând, în acest sens, o infinitate de soluţii. Dacă se dau trei poziţii B_1C_1, B_2C_2 şi B_3C_3 (Fig.2.109), soluţia este unică - articulaţiile A şi D sunt centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor $B_1B_2B_3$ şi $C_1C_2C_3$.

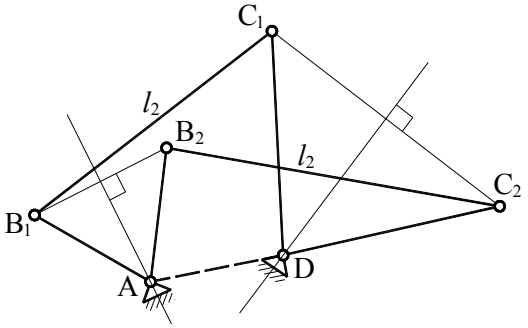


Fig. 2.108

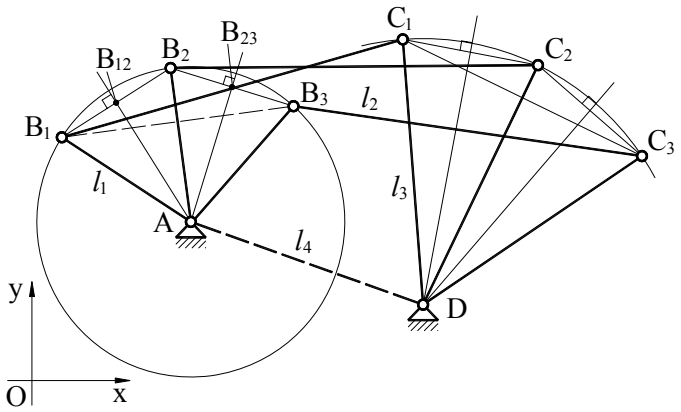


Fig. 2.109

Tratarea analitică a problemei presupune cunoaşterea poziţiilor punctelor B_1, B_2, B_3, C_1, C_2, C_3 prin coordonatele lor, în raport cu un sistem fix. Aceste coordonate trebuie să respecte, desigur, condiţiile

$$l_2 = \sqrt{(x_{B_1} - y_{C_1})^2 + (y_{B_1} - y_{C_1})^2} = \sqrt{(x_{B_2} - y_{C_2})^2 + (y_{B_2} - y_{C_2})^2} =$$
$$= \sqrt{(x_{B_3} - y_{C_3})^2 + (y_{B_3} - y_{C_3})^2}.$$

Se scrie ecuaţia mediatoarei segmentului B_1B_2,

$$y = m_{B_{12}} \cdot x + n_{B_{12}} \tag{2.176}$$

în care,

$$m_{B_{12}} = -\frac{x_{B_2} - x_{B_1}}{y_{B_2} - y_{B_1}},$$

$$n_{B_{12}} = x_{B_{12}} \frac{x_{B_2} - x_{B_1}}{y_{B_2} - y_{B_1}} + y_{B_{12}},$$

iar $x_{B_{12}}$ şi $y_{B_{12}}$ sunt coordonatele punctului B_{12} (Fig.2.109),

$$x_{B_{12}} = \frac{x_{B_1} + x_{B_2}}{2}, \; y_{B_{12}} = \frac{y_{B_1} + y_{B_2}}{2}.$$

În mod similar se scrie ecuaţia mediatoarei segmentului B_2B_3,

$$y = m_{B_{23}} \cdot x + n_{B_{23}}. \tag{2.177}$$

Prin rezolvarea sistemului format din ecuaţiile (2.176) şi (2.177) se determină coordonatele punctului A,

$$x_A = -\frac{n_{B_{12}} - n_{B_{23}}}{m_{B_{12}} - m_{B_{23}}}, \quad y_A = -m_{B_{12}} \frac{n_{B_{12}} - n_{B_{23}}}{m_{B_{12}} - m_{B_{23}}} + n_{B_{12}}.$$

Procedând în mod asemănător se determină poziția punctului D în funcție de punctele C_1, C_2 şi C_3. În final, se calculează lungimile l_1, l_3 şi l_4,

$$l_1 = AB_1 = \sqrt{(x_{B_1} - x_A)^2 + (y_{B_1} - y_A)^2}$$

$$l_3 = DC_1 = \sqrt{(x_{C_1} - x_D)^2 + (y_{C_1} - y_D)^2}$$

$$l_4 = AD = \sqrt{(x_D - x_A)^2 + (y_D - y_A)^2}.$$

Pentru o formulare mai generală, se ataşează elementului care trebuie ghidat un punct P şi o dreaptă orientată Δ. În timpul mişcării, punctul P şi dreapta Δ trebuie să treacă printr-un şir de poziții succesive $P_i(x_i, y_i)$, $\Delta_i(\varphi_i)$, $(i = 1, p)$. Să considerăm, pentru exemplificare, cazul meacnismului patrulater (Fig. 2.110). Necunoscutele problemei, în număr de 10, sunt lungimile elementelor (l_1, l_2, l_3, l_4), parametrii de poziție ai bazei (x_A, y_A, φ_4) şi parametrii de poziție ai punctului P şi a dreptei Δ în raport cu biela ($l_P = BP, \beta_P$ şi β_Δ). Ecuațiile de sinteză sunt la fel cu cele utilizate la sinteza pentru generarea curbelor (2.175), cu observația că unghiul φ_{2i} se exprimă în funcție de φ_i,

$$\varphi_{2i} = \varphi_i - \beta_\Delta, \ (i = 1, p).$$

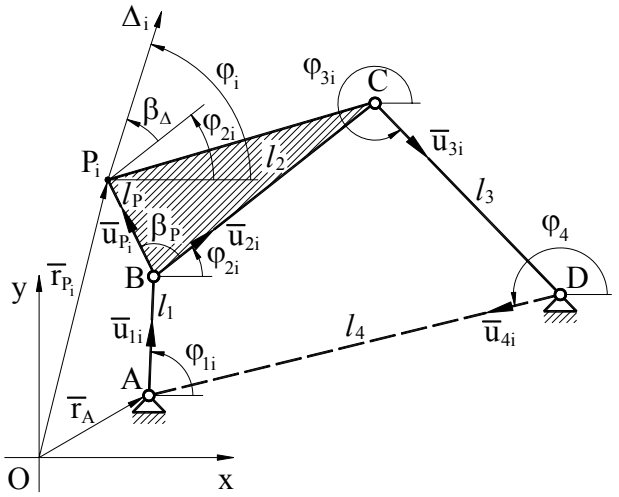


Fig. 2.110

În aceste ecuații intervin necunoscutele suplimentare φ_{1i} şi φ_{3i} $(i = 1, p)$. Egalând numărul de ecuații (4p) cu cel de necunoscute $(2p + 10)$, rezultă numărul de poziții impuse, $p = 5$.

Numărul de ecuații şi de necunoscute este, în acest caz, $4p = 20$. Aceste rezultate nu sunt în contradicție cu ce

am constatat la formularea inițială a problemei când am obținut o soluție determinată pentru $p = 3$. Atunci am considerat $P \equiv B$, şi $\Delta \equiv BC$, ceea ce conduce la $l_{BP} = 0$, $\beta_P = 0$, $\beta_\Delta = 0$ iar l_2 a fost adoptat implicit. În felul acesta numărul de necunoscute este $2p + 6$, rezultând $p = 3$.

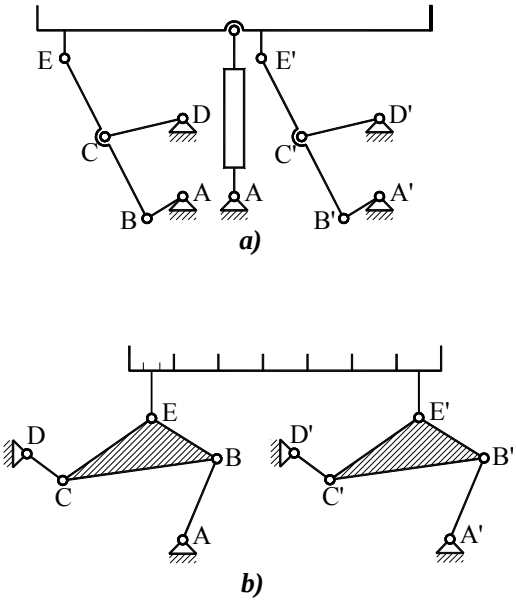


Fig. 2.111

În aplicațiile practice intervine, uneori, problema ghidării unui element în mişcare de translație rectilinie sau curbilinie. Cea mai simplă soluție, pentru rezolvarea acestei probleme, constă în utilizarea a două mecanisme identice care se cuplează prin articulații cu un element comun. Deoarece punctele de articulație au traiectorii identice elementul de cuplare are mişcare de translație. În Fig.2.111 se prezintă două mecanisme de acest fel. Mecanismul de ridicat din Fig.2.111.a conține două patrulatere directoare ABCD şi $A'B'C'D'$ care conduc punctele E şi E' după traiectorii rectilinii. În felul acesta elementul EE' are o mişcare de translație rectilinie pe verticală fiind acționat de un cilindru hidraulic. În Fig.2.111.b este reprezentat un mecanism de transportor format, de asemenea, din două patrulatere cuplate. Elementul de cuplare EE' are o mişcare de translație curbilinie după o traiectorie corespunzătoare cu operația pe care o execută.

2.4.5. Sinteza mecanismelor generatoare de funcții

Se consideră un mecanism care transmite mişcarea de la un element conducător 1 la un element condus n. Se cere să se determine parametrii constructivi ai mecanismului, astfel ca dependența dintre parametrii de poziție p_1 şi p_n să se realizeze printr-o funcție dată $p_n = f(p_1)$. Funcția $f(p_1)$ poate fi dată analitic sau prin valori discrete. Chiar atunci când este cunoscută analitic, poate fi discretizată, astfel încât, vom prezenta modul de rezolvare a problemei

având în vedere numai această formă. Perechile de valori corespondente (p_{1i}, p_{ni}) $(i = 1, p)$, definesc un şir de **poziţii asociate**.

Pentru exemplificare, se consideră mecanismul patrulater (Fig.2.112) la care se impun poziţiile relative $(\varphi_{1i}, \varphi_{3i})$ $(i = 1, p)$. Modelul matematic reprezintă ecuaţia de închidere a conturului vectorial proiectată pe axele de coordonate,

$$\begin{cases} l_1 \cos(\varphi_{1i} + \beta_1) + l_2 \cos\varphi_{2i} + l_3 \cos(\varphi_{3i} + \beta_3) - l_4 = 0 \\ l_1 \sin(\varphi_{1i} + \beta_1) + l_2 \sin\varphi_{2i} + l_3 \sin(\varphi_{3i} + \beta_3) = 0 \end{cases}, (i = 1, p). \quad (2.178)$$

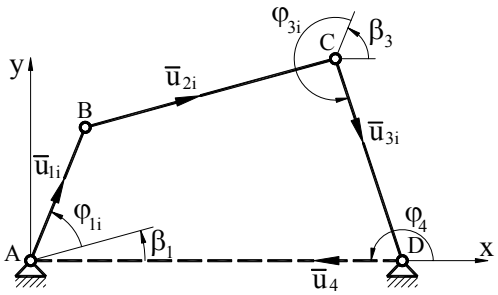


Fig. 2.112

Dacă unghiurile β_1 şi β_3 sunt date, poziţiile corespondente ale elementelor 1 şi 3 se numesc **absolut asociate**, iar dacă β_1 şi β_3 sunt necunoscute, se numesc **relativ asociate**. Se observă că sistemul (2.178) este omogen în raport cu lungimile l_1, l_2, l_3, l_4 şi admite o soluţie banală $l_1 = l_2 = l_3 = l_4 = 0$.

Pentru determinarea unor soluţii diferite de cea banală, se împart ambele ecuaţii cu valoarea l_1. Notând $l_2^* = \frac{l_2}{l_1}$, $l_3^* = \frac{l_3}{l_1}$ şi $l_4^* = \frac{l_4}{l_1}$ se obţine sistemul:

$$\begin{cases} \cos(\varphi_{1i} + \beta_1) + l_2^* \cos\varphi_{2i} + l_3^* \cos(\varphi_{3i} + \beta_3) - l_4^* = 0 \\ \sin(\varphi_{1i} + \beta_1) + l_2^* \sin\varphi_{2i} + l_3^* \sin(\varphi_{3i} + \beta_3) = 0 \end{cases}, (i = 1, p). \quad (2.179)$$

În cazul poziţiilor absolut asociate necunoscutele sunt parametrii l_2^*, l_3^*, l_4^* şi unghiurile φ_{2i} $(i = 1, p)$. Egalând numărul de ecuaţii (2p) cu numărul de necunoscute $(p + 3)$, rezultă $p = 3$.

În cazul poziţiilor relativ asociate numărul de necunoscute se majorează cu două (β_1 şi β_3), rezultând $p = 5$. Cunoscând, prin rezolvarea sistemului (2.179), l_2^*, l_3^* şi l_4^*, una dintre lungimile l_1, l_2, l_3, l_4 se poate adopta arbitrar, iar celelalte trei rezultă. În felul acesta se obţin o infinitate de mecanisme asemenea care respectă condiţiile impuse.

2.4.6. Sinteza mecanismelor cu mişcare intermitentă (cu opriri)

Mişcarea intermitentă se caracterizează prin staționări (opriri) periodice. Mecanismele care conțin elemente cu mişcare intermitentă se utilizează, de regulă, în structura sistemelor automate. Mişcarea intermitentă este de două tipuri - cu păstrarea sensului de mişcare între opriri şi cu schimbarea sensului. Cele două cazuri reclamă soluții constructive diferite şi, de aceea, vor fi tratate separat.

2.4.6.1. Mecanisme cu mişcare intermitentă în acelaşi sens

- **Mecanisme cu clichet**

Diagramele deplasării unghiulare în funcție de timp $\varphi(t)$ şi a vitezei unghiulare $\omega(t)$, caracteristice pentru o mişcare intermitentă în acelaşi sens, sunt reprezentate în Fig.2.113. Parametrii specifici ai acestei mişcări sunt cursa ψ şi raportul k_t dintre timpul de mişcare şi timpul de staționare,

$$k_t = \frac{t_m}{t_s}.$$

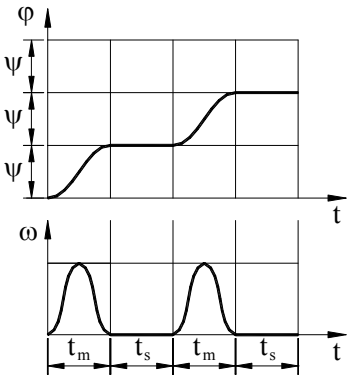


Fig. 2.113

Mecanismele care se utilizează în acest scop se grupează în două categorii - cu clichet şi cu cruce (disc) de Malta.

În Fig.2.114 este reprezentat un mecanism cu clichet care conține un mecanism patrulater ABCD de tip manivelă - balansier. Balansierul 3 este prevăzut cu clichetul articulat 5 care acționează roata de clichet 6 numai când se roteşte în sens orar. Când balansierul execută cursa în sens invers (antiorar) roata 6 staționează deoarece clichetul 5 se deplasează peste dantura roții. În acelaşi timp, roata este blocată de clichetul 7 articulat la bază. Parametrii prestabiliți ai mişcării intermitente ψ şi k_t se obțin prin sinteza mecanismului patrulater. Astfel, cursa roții de clichet, ψ, este chiar cursa balansierului. Dacă raportul k_t este supraunitar ($k_t > 1$), roata de clichet trebuie montată ca în Fig. 2.114, astfel încât, înclinarea danturii să permită antrenarea atunci când balansierul se roteşte în acelaşi sens cu

manivela. În acest caz coeficientul de productivitate k_p al mecanismului patrulater este inversul raportului k_t: $k_p = \frac{1}{k_t}$. Dacă raportul k_t este subunitar ($k_t < 1$), montarea roții se face invers față de cazul precedent iar $k_p = k_t$.

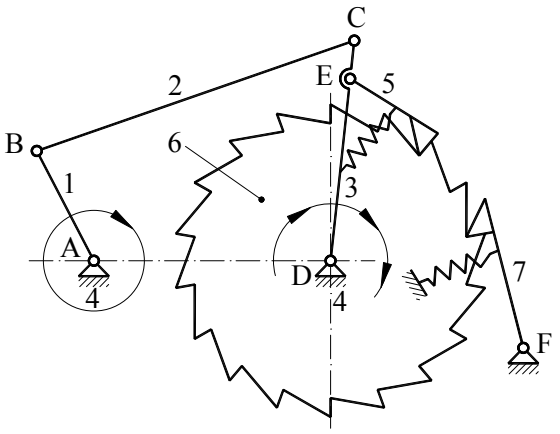


Fig. 2.114

Rezultă că, pentru determinarea constructivă a mecanismului patrulater, trebuie aplicată operația de sinteză elementară combinată.

Cursa unghiulară a balansierului este,de regulă, reglabilă, între anumite limite, prin variația lungimii manivelei. Pentru o funcționare precisă a mecanismului, unghiul ψ trebuie să cuprindă un număr întreg de dinți ai roții de clichet.

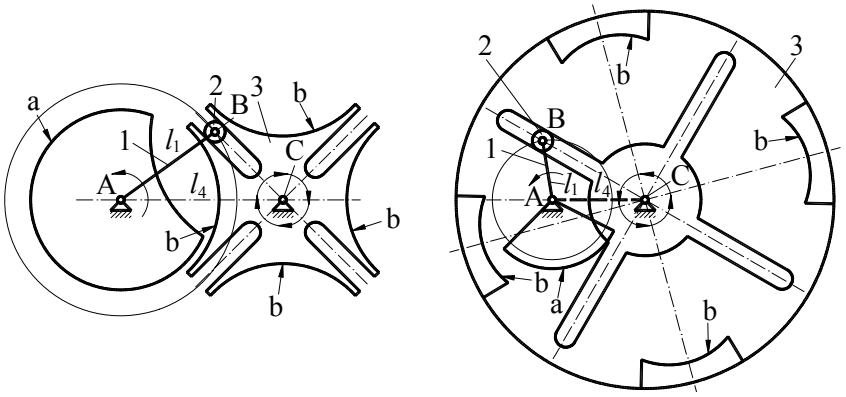
■ Mecanisme cu cruce de Malta

Mecanismele cu cruce de Malta (cu disc maltez, mecanisme de Geneva) se construiesc în diverse variante având caracteristici funcționale diferite. În Fig.2.115 sunt reprezentate două mecanisme cu cruce de Malta cu 4 canale, unul numit **exterior** (Fig.2.115.a), iar celălat **interior** (Fig.2.115.b). Elementul conducător al acestor mecanisme este un braț 1, prevăzut cu o rolă 2, iar elementul condus este discul 3 care are patru canale perpendiculare (crucea de Malta). Brațul 1 se roteşte continuu şi antrenează, periodic, discul 3 numai atunci când rola 2 se află în interiorul unui canal. Când rola nu este în contact cu un canal, discul staționează şi este blocat, pentru a evita o rotație întâmplătoare, de sectorul circular a, solidar cu brațul 1, care pătrunde în cavitățile circulare b, ale discului 3. În faza de mişcare, mecanismul este echivalent cu un mecanism cu culisă oscilantă la care patina 2 (Fig.2.116.a) este înlocuită prin rola 2 (Fig.2.116.b) cu mobilitate locală. Culisa 3 (Fig.2.116.b) este materializată de canalele crucii de Malta (Fig.2.115). În Fig.2.116.b este reprezentat mecanismul cu culisă oscilantă în pozițiile în care brațul AB este perpendicular pe culisa BC. În construcția mecanismului exterior (Fig.2.115.a) se utilizează segmentul de culisă BE (Fig.2.116.b) care determină rotația crucii în sens opus în raport cu rotația brațului, iar în construcția mecanismului interior (Fig.2.115.b) se

foloseşte segmentul BF (Fig.2.116.b) care determină acelaşi sens de rotaţie pentru braţ şi cruce. Pentru ambele mecanisme intrarea şi ieşirea rolei din canal se face în poziţii similare cu cele din Fig.2.116.b - când braţul 1 este perpendicular pe direcţia canalului. Acest lucru este avantajos din punct de vedere dinamic deoarece se asigură continuitatea vitezei crucii în poziţiile care delimitează cele două faze.

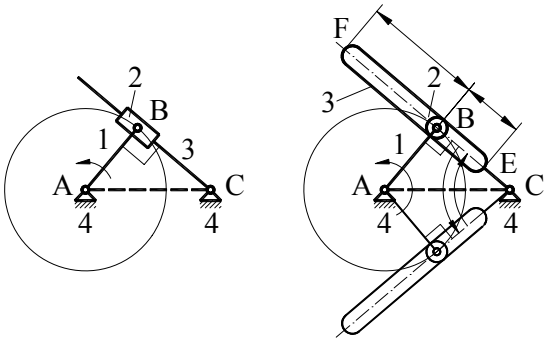
Cursa mecanismului cu cruce de Malta, care este şi cursa mecanismului cu culisă oscilantă, este determinată de numărul de canale z,

$$\psi = \frac{2\pi}{z} = \frac{360^0}{z}.$$



a) ***b)***

Fig. 2.115



a) ***b)***

Fig. 2.116

În cazul nostru $z = 4$, deci $\psi = \frac{\pi}{2} = 90^0$. Raportul k_t este, în cazul mecanismului exterior, egal cu coeficientul de productivitate al mecanismului cu culisă oscilantă ($k_t = k_p$) iar în cazul mecanismului interior este inversul acestuia ($k_t = \frac{1}{k_p}$). Având în vedere că

$$k_p = \frac{\pi - \psi}{\pi + \psi} = \frac{1}{3},$$

rezultă $k_t = \frac{1}{3}$ la mecanismul exterior şi $k_t = 3$ la cel interior.

Lungimile $l_1 = AB$ şi $l_4 = AC$ (Fig.2.115) satisfac relaţia întâlnită la sinteza mecanismului cu culisă oscilantă,

$$\sin\frac{\psi}{2} = \frac{l_1}{l_4},$$

iar pentru cazul $z = 4$ şi $\psi = 90^0$,

$$\frac{l_1}{l_4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

2.4.6.2. Mecanisme cu mişcare intermitentă însoţită de schimbarea sensului

Acest tip de mişcare se produce dacă într-un ciclu de deplasare alternativă, de rotaţie sau translaţie, se intercalează una sau mai multe staţionări. În aplicaţiile practice interesează, în special, cazul cu o singură staţionare care coincide cu o poziţie extremă. Diagramele acestei mişcări sunt redate în Fig.2.117.

Procedeul de sinteză pentru mecanismele capabile să reproducă o astfel de mişcare porneşte de la un mecanism iniţial care generează o traiectorie parţial circulară sau parţial rectilinie. Să considerăm, în acest sens, mecanismul patrulater ABCD (Fig.2.118.a). Punctul E descrie o traiectorie de formă circulară pe segmentul $\widehat{E_1E_2}$, având centrul în K. Mecanismul se dezvoltă cu grupa structurală EFG (RRR), având următoarele lungimi ale elementelor: $EF = r$ - raza arcului de cerc $\widehat{E_1E_2}$, GF - distanţa dintre articulaţia fixă G şi centrul K al arcului de cerc $\widehat{E_1E_2}$. Determinând poziţia articulaţiei F prin

metoda intersecțiilor, rezultă că pentru $E \in \widehat{E_1E_2}$, punctul F coincide cu centrul K, deci este fix. Ca urmare, elementul FG este, de asemenea, imobil.

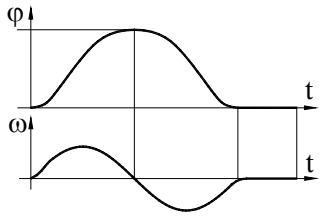
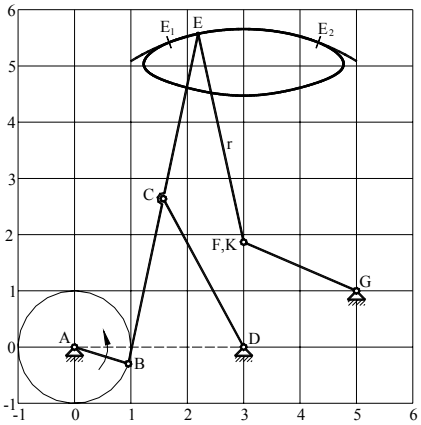


Fig. 2.117

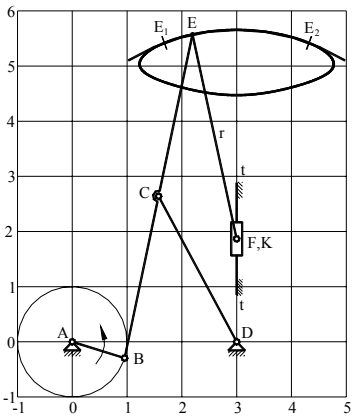
Mecanismul din Fig.2.118.b se obține pornind de la acelaşi mecanism patrulater, prin anexarea unei grupe structurale de tip RRT. Lungimea EF se adoptă egală cu raza r, iar axa de translație fixă tt, astfel încât să treacă prin K. Dacă $E \in \widehat{E_1E_2}$ articulația F coincide cu centrul K şi este fixă ca şi patina mecanismului.

În Fig.118.c este reprezentat un mecanism cu opriri având aceeaşi structură cu cel din Fig.118.a, dar cu dimensiuni relative diferite. Rezultate similare se obțin considerând, inițial, un mecanism manivelă - piston (Fig.118.d) care generează o traiectorie parțial circulară.

Sinteza mecanismelor cu opriri se poate realiza şi pe baza unor mecanisme directoare. În acest caz, la mecanismul inițial, se ataşează o grupă RTR (Fig.2.118.e) obținând o mişcare intermitentă pentru un element în mişcare de rotație. Dacă se ataşează o grupă RTT (Fig.2.118.f) se obține o mişcare de translație intermitentă.



a)

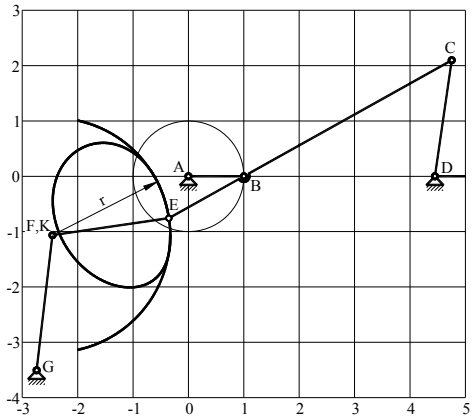


b)

$AB = a,\ BC=CD=AD=CE=3a,\ x_k = 3a,$
$y_k = 1{,}867a,\ EF=3{,}79a,\ FG=2{,}18a,$
$x_G = 5a,\ y_G = a$

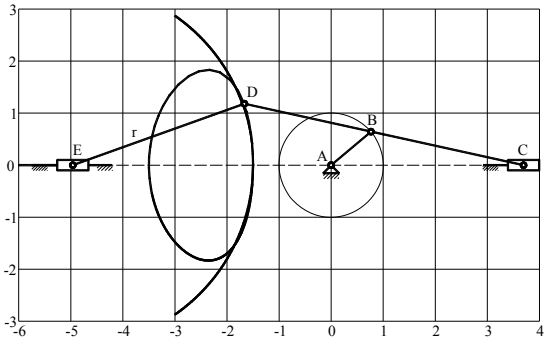
$AB = a,\ BC=CD=AD=CE=3a,$
$x_k = 3a,\ y_k = 1{,}867a,\ EF=3{,}79a$

Fig. 2.118



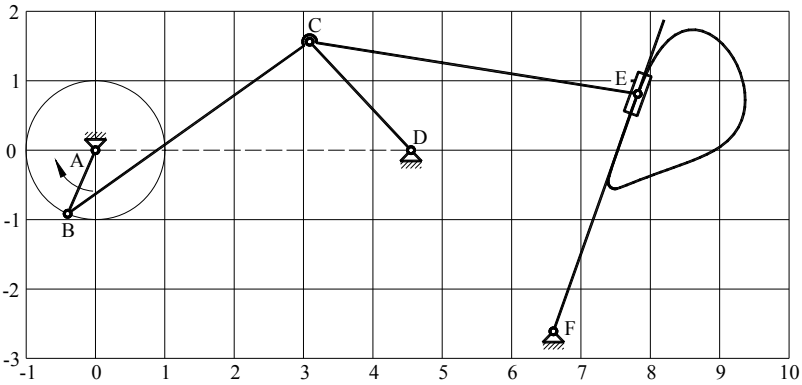
c)

$AB = a$, BC=4,3a, CD=2,12a,
AD=AG=4,45a, CE=5,85a,
DG=8a, $FE = r = 2{,}12a$,
GF=2,46a,
$x_k = -2{,}455a, y_k = -1{,}064a$



d)

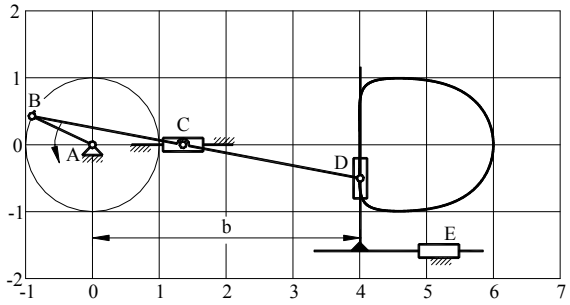
$AB = a$, $BC = 3a$,
$BD = 2{,}5a$, $ED = r = 3{,}5a$



e)

$AB = a$, BC=4,28a, CD=2,14a, AD=4,55a,
CE=4,86a, BE=8,44a, AF=7,1a, DF=3,32a

Fig. 2.118



f)

AB = a, BC=2,3a,
BD=5a, b=4a

Fig. 2.118

2.4.7. Sinteza mecanismelor pentru reproducerea curbelor asemenea (pantografe)

Mecanismele pantografe se utilizează pentru gravarea desenelor sau a textelor prin copiere, la scară, după un şablon. Obținerea unei curbe asemenea cu o curbă dată se numeşte **transformare omotetică**. Se consideră curba (C_1) şi un punct P pe această curbă (Fig.2.119). Se uneşte P cu un punct fix O - **centrul de omotetie**, iar pe raza OA se adoptă un al doilea punct Q. Când punctul P se deplasează pe curba (C_1), punctul Q descrie o curbă asemenea (C_2), dacă se respectă condiția

$$\frac{OP}{OQ} = k ,$$

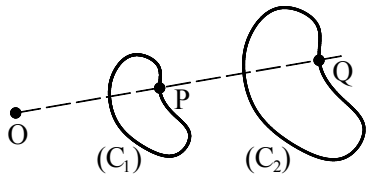


Fig. 2.119

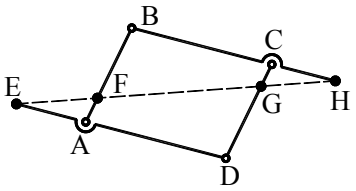


Fig. 2.120

unde k reprezintă raportul de asemănare. Sinteza mecanismelor pantografe se face pe baza unui lanț cinematic articulat, paralelogram ABCD (Fig.2.120). Se trasează o dreaptă care intersectează laturile paralelogramului (sau prelungirile lor) în punctele E, F, G, H. Dacă, în unul dintre aceste puncte, se amplasează o articulație fixă, se obține un mecanism pantograf, în care celelalte trei puncte, considerate invariabile în raport cu elementele pe care se găsesc, descriu curbe

asemenea între ele. Pentru a demonstra acest lucru, să considerăm pantograful care are articulația fixă E (Fig.2.121). Din asemănarea triunghiurilor EAF, EDG şi EIH rezultă proporțiile

$$\frac{EA}{AF} = \frac{ED}{DG} = \frac{EI}{HI}. \tag{2.180}$$

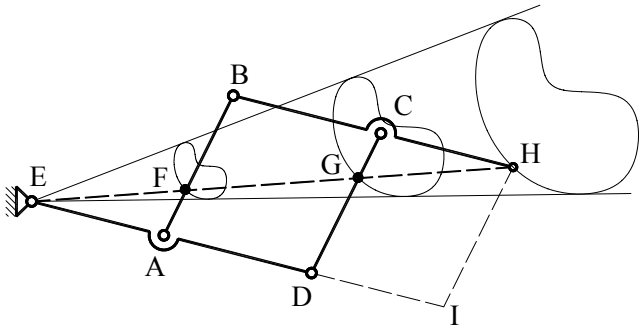


Fig. 1.121

Dacă paralelogramul ABCD se deformează, dar punctele E, F, G rămân invariabile în raport cu elementele AB, CD şi BC, cele trei triunghiuri se mențin asemenea, deoarece proporțiile (2.180), în care intervin numai lungimi constante se păstrează, iar laturile AF, DG şi HI sunt permanent paralele. Ca urmare, punctele E, F, G, H rămân coliniare. În acelaşi timp, din asemănarea triunghiurilor menționate, rezultă

$$\begin{aligned} \frac{EF}{EG} &= \frac{EA}{ED} = k_1 \\ \frac{EF}{EH} &= \frac{EA}{ED + CH} = k_2 \\ \frac{EG}{EH} &= \frac{ED}{ED + CH} = k_3. \end{aligned} \tag{2.181}$$

Astfel, sunt îndeplinite condițiile transformării prin omotetie pentru curbele descrise de punctele E, F şi G. Prin reglarea corespunzătoare a lungimilor care intervin în relațiile (2.181) se pot obține valori convenabile pentru scările k_1, k_2 şi k_3.

Capitolul 3

MECANISME CU CAME

3.1. CLASIFICARE, TRANSFORMĂRI

3.1.1. Clasificare

Un mecanism cu camă este constituit dintr-un element conducător profilat, numit camă, care transmite mişcarea, prin intermediul unei cuple superioare, unui element condus, numit tachet.

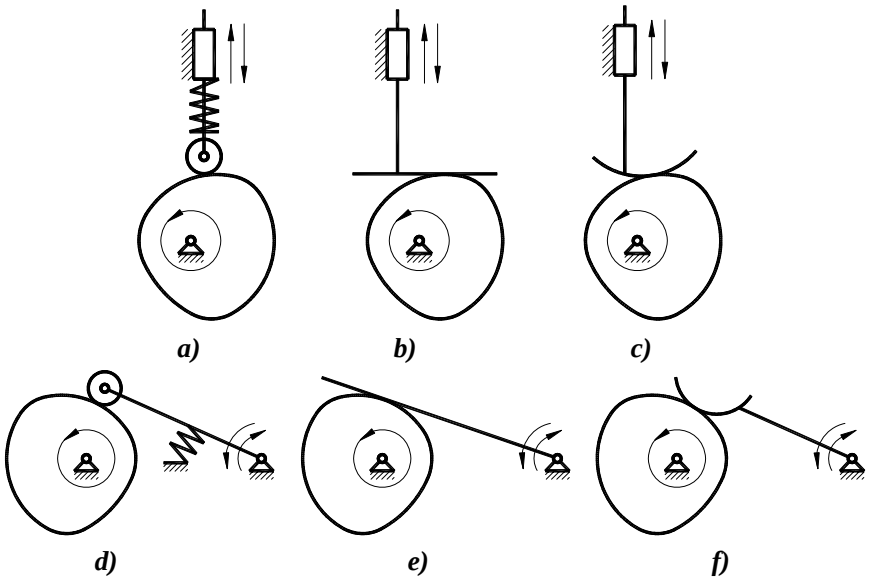
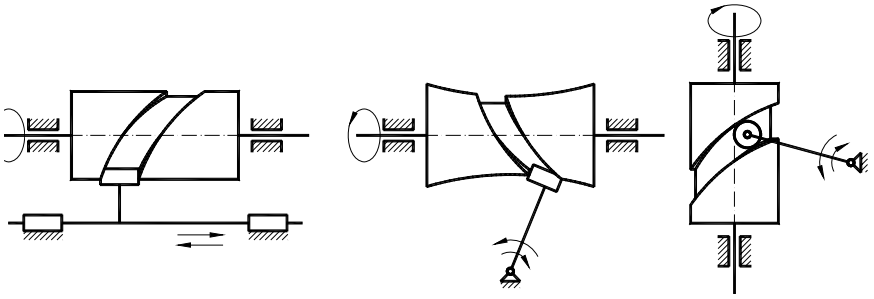


Fig. 3.1

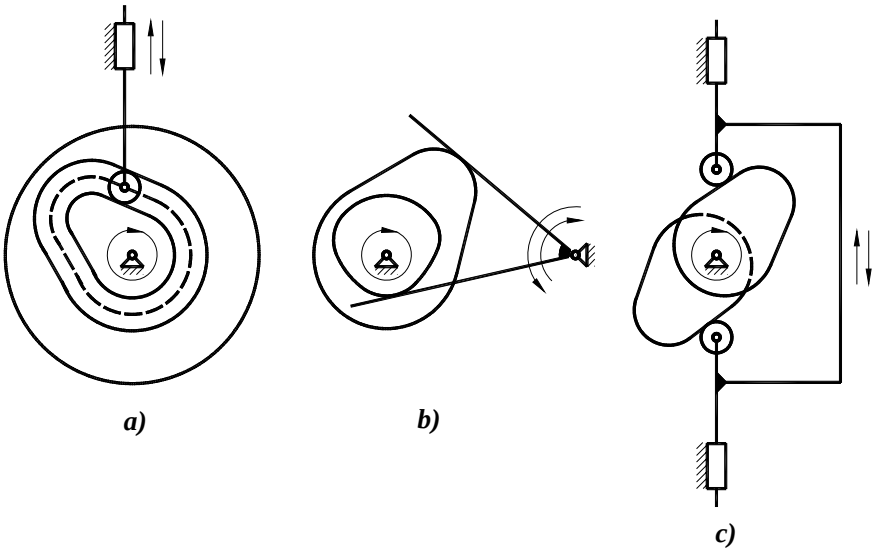
În majoritatea cazurilor **cama are o mişcare de rotaţie continuă**, iar **tachetul - o mişcare de translaţie** (Fig.3.1.a,b,c) **sau de rotaţie** (Fig.3.1.d,e,f).

Contactul camă - tachet se poate face prin intermediul unei **role articulate** (Fig.3.1.a, d, Fig.3.2., Fig.3.3.a) sau în mod direct. În cazul contactului direct suprafața activă a tachetului poate fi **plană** (**tachet plat sau cu talpă plană** - Fig.3.1.b, e, Fig.3.3.b) sau **sferică** (**tachet bombat** - Fig.3.1.c, f).



a) ***b)*** ***c)***

Fig. 3.2



a) ***b)*** ***c)***

Fig. 3.3

Din punct de vedere teoretic interesează şi cazul în care suprafața activă a tachetului se reduce la un **punct** (**tachet cu vârf**). Mecanismele cu came pot fi **plane** (Fig.3.1) sau **spațiale** (Fig.3.2). În primul caz cama are forma unui **disc plan** prevăzut cu o suprafață activă **cilindrică** (în accepțiunea generală). Intersecția suprafeței active cu un plan frontal (perpendicular pe axa de rotație) constituie **profilul** camei. La mecanismele spațiale cama are forma unei suprafețe de revoluție: **cilindru** (Fig.3.2.a, c), **globoid** (Fig.3.2.b), **con**, **hiperboloid de rotație**, **sferă**, iar profilul este o curbă pe această suprafață.

Cupla superioară camă - rolă sau camă - tachet se poate concepe sub formă **deschisă** (**unilaterală**) (Fig.3.1) sau **închisă** (**bilaterală**) (Fig.3.2, Fig.3.3). Închiderea cuplei superioare se poate face în două moduri: prin practicarea unui canal în corpul camei, în care pătrunde rola (Fig.3.2, Fig.3.3.a) sau prin utilizarea unui tachet cu două suprafețe active (role) antrenat de două came cuplate rigid (Fig.3.3.b, c). În cazul cuplei deschise, menținerea contactului se realizează cu ajutorul unei forțe generată de un arc (Fig.3.1.a, d). Uneori acest rol este preluat de forța de greutate sau de forța tehnologică.

Mecanismele cu came au o răspândire foarte largă în aproape toate domeniile construcției de mașini, cum ar fi: mașinile textile, mașinile unelte, mecanica fină și construcția de aparate, motoarele termice, industria alimentară, mașinile și sistemele automate. Avantajul principal al utilizării lor constă în faptul că permit obținerea, cu mare precizie, a unei mișcări prestabilite pentru tachet.

Dintre tipurile de mecanisme prezentate, cea mai largă utilizare o au cele prevăzute cu rolă datorită avantajelor oferite de contactul de rostogolire. Tachetul cu talpă și cel bombat se folosesc în regimuri de funcționare ușoară și reclamă o lubrifiere foarte bună.

3.1.2. Transformări

Studiul mecanismelor cu came apelează, uneori, la transformări fictive utilizate ca metode de lucru. Prin aceste transformări se urmărește obținerea unor mecanisme echivalente cu cele inițiale, dar care permit rezolvări mai simple ale unor probleme de analiză și de sinteză. Echivalența mecanismului transformat cu cel inițial este concepută după criteriul cinematic - menținerea mișcărilor relative dintre elemente.

3.1.2.1. Transformarea prin schimbarea bazei (procedeul inversării mișcărilor)

Această transformare constă în schimbarea bazei mecanismului, acest rol fiind preluat de camă. La rândul său, elementul care, inițial, este bază devine mobil, având funcția de element conducător. Pentru a menține mișcările relative dintre elemente, este necesar ca mișcarea relativă dintre camă și bază să rămână neschimbată. Astfel, după transformare, viteza unghiulară a elementului 3, inițial bază (Fig.3.4) este

$$\omega_3 = \omega_{31} = -\omega_{13} = -\omega_1 ,$$

în care ω_1 este viteza unghiulară a camei în mecanismul real. Cum se vede, cele două viteze sunt egale şi de sensuri contrare, ceea ce justifică denumirea procedeului. Transformarea permite reprezentarea comodă a mecanismului în mai multe poziţii succesive folosind un desen unic pentru profilul camei, aşa cum rezultă din Fig.3.4.

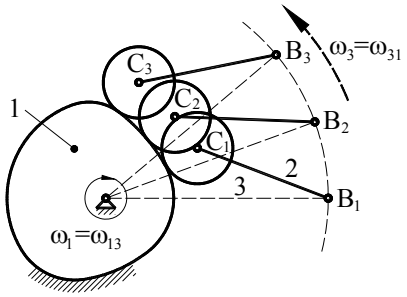
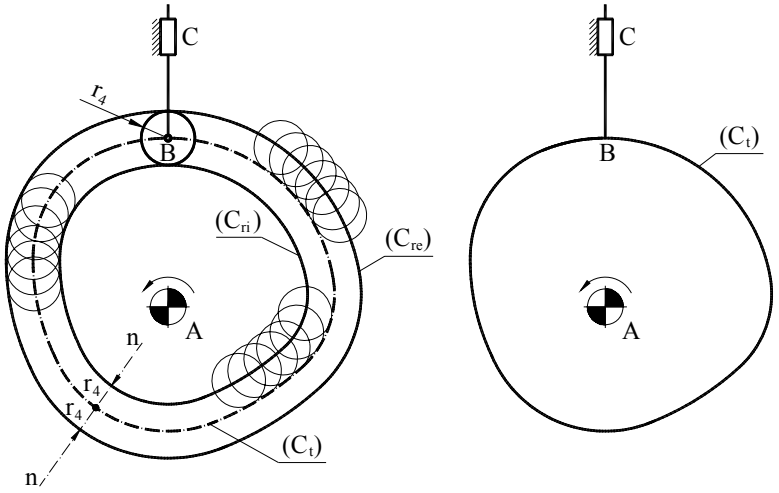


Fig. 3.4

3.1.2.2. Transformarea prin eliminarea rolei

Se consideră un mecanism prevăzut cu tachet cu rolă (Fig.3.5.a). Centrul rolei descrie, în raport cu planul camei, o traiectorie numită **profil teoretic** (C_t) spre deosebire de **profilul real interior** (C_{ri}) şi de cel **exterior** (C_{re}).



a) ***b)***

Fig. 3.5

Este evident că, adoptând un tachet cu vârf şi înlocuind profilele reale cu cel teoretic, se obține un mecanism echivalent cu cel inițial (Fig. 3.5.b). Profilul teoretic se obține ca înfăşurătoarea unor familii de cercuri cu centrele pe profilul real interior sau pe cel exterior şi de rază egală cu raza rolei r_4. Cele trei profile sunt curbe **echidistante** şi au următoarele proprietăți:

1) Normala la un profil este şi normală la celelalte două.

2) Distanța dintre profilul teoretic şi profilele reale, măsurată pe o normală comună, este constantă în orice punct şi egală cu raza rolei r_4.

3) Punctele aflate pe o normală comună au acelaşi centru de curbură, astfel încât, între razele de curbură ale profilelor teoretic R_{ct}, real exterior R_{cre} şi real interior R_{cri} există relațiile

$$R_{ct} = R_{cre} - r_4 = R_{cri} + r_4 .$$

Dacă se cunoaşte profilul teoretic, profilele reale se obțin prin înfăşurarea unor familii de cercuri cu centrele pe profilul teoretic, având razele egale cu raza rolei.

3.1.2.3. Transformarea mecanismelor spațiale în mecanisme plane

Această transformare se practică în cazul mecanismelor spațiale care au came cilindrice sau conice. Prin desfăşurarea plană a suprafeței camei, însoțită de transformarea mişcării de rotație în una de translație, mecanismul spațial se transformă în unul plan fără a modifica mişcarea tachetului. În Fig.3.6 se exemplifică procedeul în cazul unui mecanism cu camă cilindrică şi tachet de rotație. Se observă că cilindrul desfăşurat are raza r_1 care corespunde cu adâncimea medie a canalului profilat, iar viteza de translație a camei plane este

$$v_1 = \omega_1 \cdot r_1 ,$$

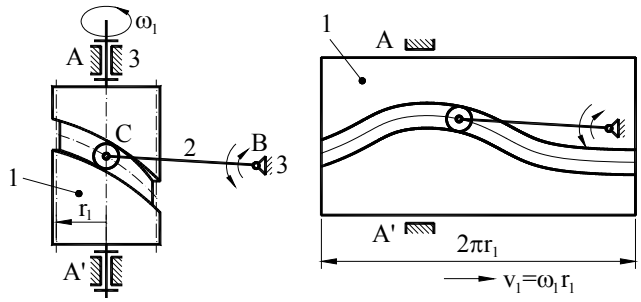


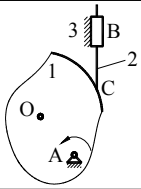
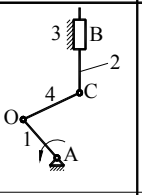
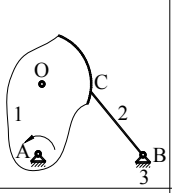
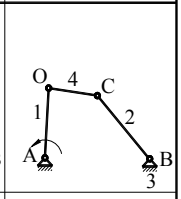
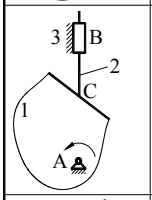
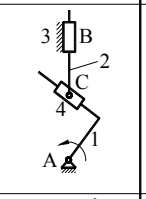
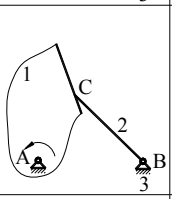
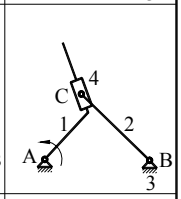
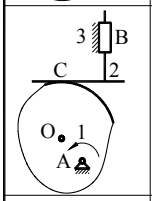
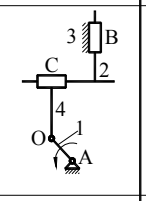
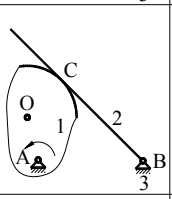
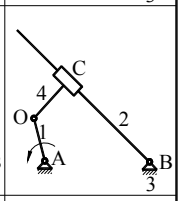
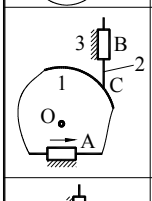
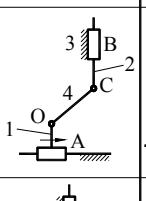
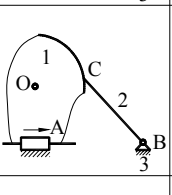
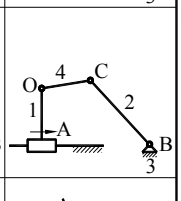
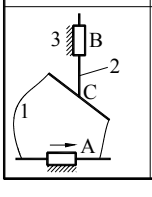
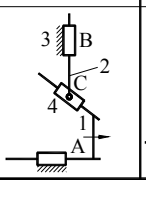
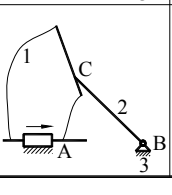
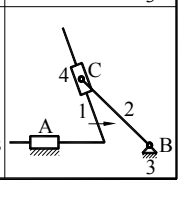
Fig. 3.6

în care ω_1 este viteza unghiulară a camei în mecanismul spațial.

3.1.2.4. Transformarea mecanismelor cu came în mecanisme cu cuple inferioare

Această transformare se efectuează prin înlocuirea cuplei superioare camă - tachet (rolă) printr-un lanț cinematic cu cupe inferioare. Aşa cum am arătat (par. 1.3.1.) lanțul cinematic înlocuitor este format dintr-un element şi

Tabelul 3.1

Mecanismul cu cam\	Mecanismul înlocuitor	Mecanismul cu cam\	Mecanismul înlocuitor
			
			
			
			
			

două articulații amplasate în centrele de curbură aparținând profilului camei şi curbei active a tachetului.

În cazul tachetului cu rolă se obține acelaşi rezultat dacă se consideră mecanismul transformat prin eliminarea rolei, când curba activă se reduce la un punct (vârful tachetului) care este şi centrul de curbură. În cazul tachetului plat, articulația corespunzătoare se transformă într-o cuplă de translație cu axa pe linia tălpii. O situație asemănătoare apare când profilul conține un segment de dreaptă. În Tab.3.1 se prezintă mecanismele înlocuitoare pentru principalele tipuri de mecanisme cu came, luând în considerare şi cazurile în care profilul conține segmente de dreaptă. În cazul mecanismelor cu tachet cu rolă s-au tratat mecanismele echivalente cu tachet cu vârf, iar mecanismele spațiale cu camă cilindrică s-au transformat în mecanisme plane. Pentru a urmări cu uşurință corespondența dintre cele două mecanisme, elementele şi cuplele sunt notate la fel, centrul de curbură al profilului este notat cu O, iar elementul suplimentar, care rezultă prin operația de înlocuire, cu 4. Trebuie menționat că echivalența dintre cele două mecanisme are caracter instantaneu, deoarece odată cu schimbarea poziției, se deplasează punctul de contact pe profil, iar raza de curbură şi, deci, lungimea elementului suplimentar se modifică de asemenea.

3.2. ANALIZA CINEMATICĂ

Operația de analiză cinematică urmăreşte determinarea legii de mişcare a tachetului cunoscând construcția mecanismului, inclusiv forma profilului camei. Această operație are o însemnătate redusă în procesul de proiectare a mecanismului deoarece mişcarea tachetului este complet prestabilită în cazul operației de sinteză. Intervin, totuşi, unele situații în care mecanismul este cunoscut fizic şi este necesară analiza funcționării sale. În aceste cazuri se recomandă aplicare metodei funcțiilor de transmitere (par. 2.1.6.). Funcția de transmitere de ordinul zero se stabileşte prin măsurători efectuate pe mecanism sau pe desen. Primul procedeu presupune utilizarea unor instrumente, de precizie corespunzătoare, pentru măsurarea deplasărilor unghiulare şi/sau liniare ale camei şi tachetului. În felul acesta se obțin funcțiile $s(\varphi)$ sau $\psi(\varphi)$, în care φ este unghiul de poziție al camei, s - parametrul liniar de poziție al tachetului de translație, ψ - unghiul de poziție al tachetului oscilant de rotație. Cel de-al doilea procedeu constă în reprezentarea mecanismului într-un şir de poziții succesive şi măsurarea, pe desen, a parametrilor de poziție. Pentru aceasta se foloseşte inversarea mişcărilor care permite reprezentarea profilului o singură dată. În Fig.3.7 se prezintă acest procedeu pentru un mecanism plan cu tachet de translație şi rolă. Într-o primă fază se aplică operația de transformare prin eliminarea rolei. În Fig.3.7 este reprezentat direct mecanismul transformat. Pornind de la o poziție arbitrară AB_0C_0 se reprezintă mecanismul într-o poziție

obținută prin rotația camei cu unghiul φ. Pentru aceasta se trasează un cerc oarecare (C) care intersectează axa tachetului B_0C_0 în punctul E_0. De la raza AE_0 se măsoară unghiul φ în sens opus vitezei unghiulare a camei, conform cu procedeul inversării mişcărilor. În felul acesta se obține punctul E ($\sphericalangle E_0AE = \varphi$) prin care se trasează axa tachetului tangentă la un cerc de rază e (excentricitatea) şi se obține noua poziție a mecanismului ABC. Parametrul de poziție al tachetului s se măsoară de la punctul C la un punct fix situat pe axa de translație.

De obicei se consideră, în acest scop, punctul situat la extremitatea inferioară a cursei C_1. Acest punct este situat pe cercul de rază minimă a profilului teoretic ($C_{t\,min}$). Atribuind unghiului φ un şir de valori şi repetând acestă construcție, se determină funcția de transmitere $s(\varphi)$, prin valori discrete. În mod asemănător se procedează în cazul mecanismului cu tachet de rotație oscilant şi rolă (Fig.3.8), determinând funcția de transmitere $\psi(\varphi)$.

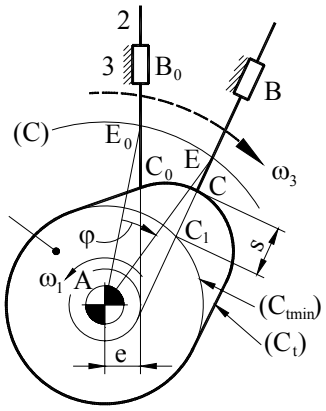


Fig. 3.7

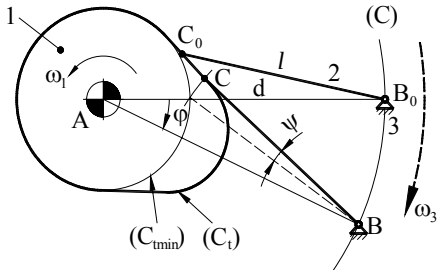


Fig.3.8

Dacă profilul este constituit din arce de cerc şi segmente de dreaptă se recomandă aplicarea transformării mecanismului cu camă într-un mecanism cu cuple inferioare. Acest mod de a proceda este avantajos deoarece poziția centrelor de curbură, pentru fiecare segment de profil, este cunoscută şi invariabilă. Procedeul este ilustrat în Fig.3.9 pentru un mecanism cu tachet de translație şi rolă. Profilul real (C_{ri}) este format din două arce de cerc şi două segmente de dreaptă. Aplicând transformarea prin eliminarea rolei se obține un profil teoretic (C_t) format în acelaşi fel. Pentru fiecare segment de profil se obține câte un mecanism cu cuple inferioare diferit, aşa cum se arată în

Fig.3.9.b, c, d, care se analizează folosind metode specifice acestor mecanisme (par. 2.1.).

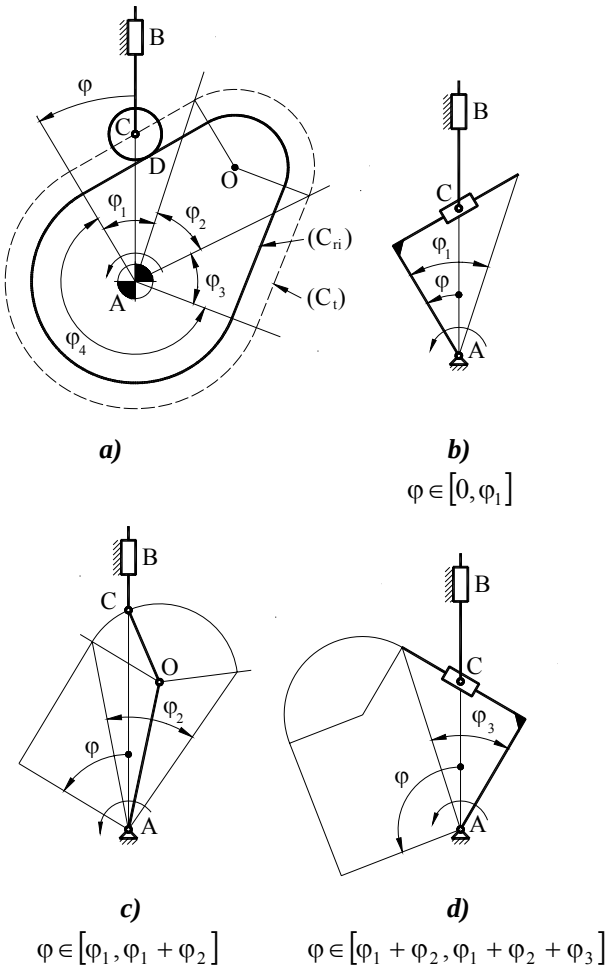


Fig. 3.9

3.3. LEGILE DE MIŞCARE

3.3.1. Ciclul de funcționare

Ciclul de funcționare al unui mecanism cu camă cuprinde o succesiune de faze în care tachetul se deplasează într-un sens, în sens opus sau staționează. Cazul cel mai reprezentativ presupune existența a patru faze, după cum urmează.

- **Faza de ridicare** sau **cursa ascendentă** (R) în care tachetul se deplasează din **poziția extremă inferioară** (cea mai apropiată de centrul camei) în **poziția extremă superioară** (cea mai depărtată de centrul camei);
- **Faza de staționare superioară** (S) în care tachetul este imobil în poziția extremă superioară;
- **Faza de coborâre** sau **cursa descendentă** (C) în care tachetul se deplasează din poziția extremă superioară în poziția extremă inferioară;
- **Faza de staționare inferioară** (S) în care tachetul este imobil în poziția extremă inferioară.

Ciclul cu patru faze (R, S, C, S) este ilustrat cu ajutorul diagramelor $s(\varphi)$ sau $\psi(\varphi)$ - Fig.3.10. Deplasarea tachetului între cele două poziții extreme este **cursa** (**h**, $\boldsymbol{\psi_h}$), iar unghiurile de rotație ale camei, pentru fiecare fază, se numesc **unghiuri de fază** şi sunt notate, în ordinea fazelor, φ_r, φ_s, φ_c, φ_i. Fazele de staționare pot lipsi, amândouă sau numai una dintre ele, obținând ciclurile funcționare de tip RC, RSC sau RCS.

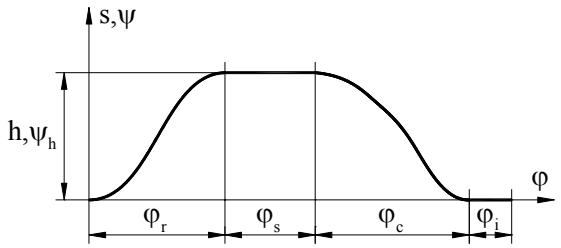


Fig. 3.10

Cinematica mecanismului cu camă este descrisă analitic de funcțiile de transmitere $s(\varphi)$, $s'(\varphi)=\frac{ds}{d\varphi}$, $s''(\varphi)=\frac{d^2s}{d\varphi^2}$, $s'''(\varphi)=\frac{d^3s}{d\varphi^3}$ pentru tachetul de translație şi $\psi(\varphi)$, $\psi'(\varphi)=\frac{d\psi}{d\varphi}$, $\psi''(\varphi)=\frac{d^2\psi}{d\varphi^2}$, $\psi'''(\varphi)=\frac{d^3\psi}{d\varphi^3}$ - pentru tachetul de rotație. Mişcarea camei se consideră uniformă, având viteza unghiulară

$\omega_1 = \dot{\varphi} = ct$. Această ipoteză este valabilă (sau poate fi admisă aproximativ) în marea majoritate a aplicațiilor practice. Ca urmare, între funcțiile de transmitere ale mecanismului cu tachet de translație $s(\varphi)$, $s'(\varphi) = \frac{ds}{d\varphi}$, $s''(\varphi) = \frac{d^2s}{d\varphi^2}$, $s'''(\varphi) = \frac{d^3s}{d\varphi^3}$, pe de o parte, şi parametrii cinematici ai tachetului v(viteza), a(accelerația), p(pulsul - accelerația de ordinul doi), pe de altă parte, există relațiile

$$s'(\varphi) = \frac{v}{\omega_1},\ s''(\varphi) = \frac{a}{\omega_1^2},\ s'''(\varphi) = \frac{p}{\omega_1^3} \tag{3.1}$$

În cazul tachetului de rotație, parametrul de poziție natural este unghiul φ_2 măsurat în sens antiorar de la semiaxa pozitivă Ax_3 (Fig.3.11), dar, în mod obişnuit, se foloseşte unghiul ψ măsurat în sens invers. Între cele două unghiuri există relația $\psi_0 + \psi + \varphi_2 = \pi$, în care ψ_0 este un unghi constant (Fig.3.11). Această situație conduce la următoarele relații între funcțiile de transmitere $\psi(\varphi)$, $\psi'(\varphi)$, $\psi''(\varphi)$, $\psi'''(\varphi)$ şi parametrii mişcării tachetului ω_2, ε_2, $\dot{\varepsilon}_2$,

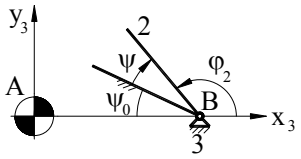


Fig.3.11

$$\begin{aligned}
\psi(\varphi) &= \pi - \psi_0 - \varphi_2(\varphi) \\
\psi'(\varphi) &= -\varphi'_2(\varphi) = -\frac{\omega_2}{\omega_1} \\
\psi''(\varphi) &= -\varphi''_2(\varphi) = -\frac{\varepsilon_2}{\omega_1^2} \\
\psi'''(\varphi) &= -\varphi'''_2(\varphi) = -\frac{\dot{\varepsilon}_2}{\omega_1^3}
\end{aligned} \tag{3.2}$$

3.3.2. Adoptarea legii de mişcare

Pentru adoptarea legii de mişcare a tachetului se utilizează mai multe criterii:

- criteriul funcțional;
- criteriul dinamic;
- criteriul tehnologic.

- **Criteriul funcțional**

Legea de mişcare trebuie să îndeplinească anumite condiții cinematice specifice operației tehnologice executate fie direct de tachet, fie prin intermediul

unui mecanism de transmitere. În majoritatea cazurilor acest criteriu nu reclamă o lege de mişcare bine definită, ci numai anumite caracteristici ale acesteia, cum sunt unghiurile de fază, cursa sau tipul ciclului de funcționare.

- **Criteriul dinamic**

Conform acestui criteriu, legea de mişcare trebuie să asigure o funcționare "liniştită" - fără şocuri şi vibrații şi cu solicitări ale elementelor cât mai reduse. Comportarea dinamică este determinată, desigur, de variația accelerației tachetului.

Cel mai nefavorabil fenomen dinamic este **şocul dur** care se înregistrează când există **discontinuități în variația vitezei**, iar accelerația tinde, teoretic, la infinit. Acest fenomen este similar cu o ciocnire şi este însoțit de o suprasolicitare foarte mare a mecanismului.

Când **accelerația are discontinuități finite**, iar pulsul (supraaccelerația) tinde la infinit, se produc **şocuri moi**, care constituie o sursă de vibrații. Pentru a asigura continuitatea vitezei şi accelerației acestea trebuie să fie egale cu zero la începutul şi la sfârşitul fazelor R sau C dacă acestea se învecinează cu faze de staționare (S).

Valoarea maximă a accelerației absolute constituie, de asemenea, un element de apreciere a dinamicii mecanismului.

Trebuie remarcat că forțele de inerție, ca şi suprasolicitările cauzate de şocuri şi vibrații sunt proporționale cu pătratul vitezei unghiulare a camei (viteza de funcționare). De aceea când se discută oportunitatea alegerii unei legi de mişcare trebuie avută în vedere şi viteza de funcționare. De exemplu, legile de mişcare cu discontinuități la viteze (şocuri dure) nu se recomandă a fi utilizate. Totuşi, la viteze de funcționare foarte lente (sub 1 rad/s) pot fi acceptate fără consecințe dinamice majore. În mod similar, legile de mişcare cu discontinuități la accelerații (şocuri moi) pot fi utilizate la viteze mici şi medii.

- **Criteriul tehnologic**

Acest criteriu caracterizează legile de mişcare din punct de vedere al posibilităților de prelucrare a profilului în condiții cât mai economice. Relația precizie de prelucrare - precizie cinematică este diferită pentru diverse legi de mişcare, astfel încât, unele sunt mai tehnologice, iar altele mai puțin.

*

În cele ce urmează se prezintă cele mai uzuale legi de mişcare, se indică proprietățile lor dinamice (accelerația maximă, existența discontinuităților la vietze şi la accelerații) şi tehnologice precum şi recomandări de utilizare.

Pentru scrierea comodă şi generală a ecuațiilor, se utilizează variabilele adimensionale

$$S = \frac{s}{h}, \ \phi = \frac{\varphi}{\varphi_f}, \tag{3.3}$$

în care φ_f unghiul de fază. Între derivatele funcției $s(\varphi)$ şi derivatele funcției $S(\phi)$ există relațiile

$$S' = \frac{\varphi_f}{h} s', \; S'' = \frac{\varphi_f^2}{h} s'', \; S''' = \frac{\varphi_f^3}{h} s''' \tag{3.4}$$

Domeniul de variație al variabilelor S şi ϕ pentru o fază este, aşa cum rezultă din (3.3), [0, 1]. Revenirea la variabilele s şi φ se face cu uşurință utilizând relațiile (3.3) şi (3.4).

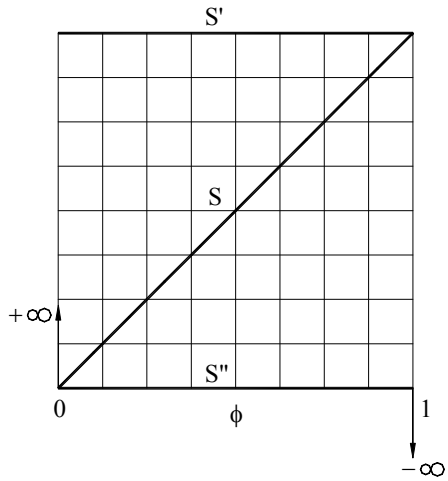
Ecuațiile legilor de mişcare sunt scrise pentru faza de ridicare a tachetului (forma standard). Pentru faza de coborâre, considerând originea de măsură a parametrului ϕ la începutul fazei, ecuațiile se modifică astfel

$$\begin{aligned} S_c(\phi) &= 1 - S_r(\phi) \\ S_c'(\phi) &= -S_r'(\phi) \\ S_c''(\phi) &= -S_r''(\phi) \\ S_c'''(\phi) &= -S_r'''(\phi) \end{aligned} \tag{3.5}$$

3.3.3. Legi de mişcare uzuale

3.3.3.1. Legi de mişcare elementare

■ **Legea de mişcare cu viteză constantă**



$$S = \phi$$
$$S' = 1$$
$$S'' = S''' = 0$$

$$|S''|_{max} \to \infty$$

Se înregistrează discontinuități la viteze (şocuri dure). Se poate folosi numai în condițiile unui regim de funcționare foarte lent.

Fig. 3.12

- **Legea de mişcare cu accelerație constantă (mişcarea uniform accelerată)**

Domeniul $\phi \in [0,1]$ se împarte în două subdomenii $\phi \in [0,q]$ şi $\phi \in [q,1]$ în care $q \in (0,\ 1)$. Ecuațiile au forme diferite pentru fiecare subdomeniu.

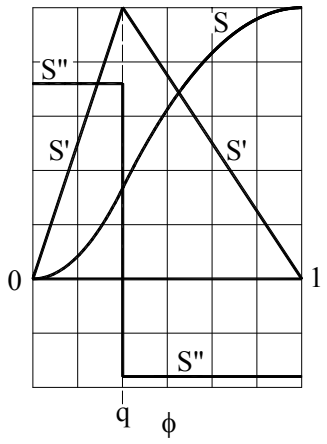


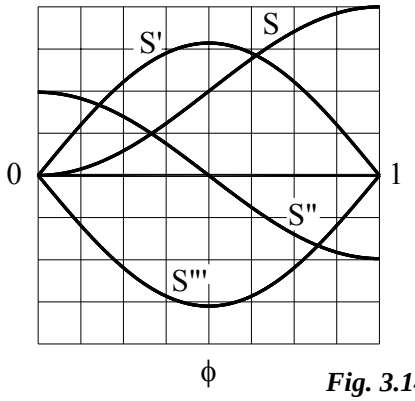
Fig. 3.13

$\phi \in [0,q]$	$\phi \in [q,1]$
$S = \frac{1}{q}\phi^2$	$S = -\frac{1}{1-q}(\phi^2 - 2\phi + q)$
$S' = \frac{2}{q}\phi$	$S' = -\frac{2}{1-q}(\phi - 1)$
$S'' = \frac{2}{q}$	$S'' = -\frac{2}{1-q}$
$S''' = 0$	$S''' = 0$

$$|S''|_{max} = \max\left(\frac{2}{q},\ \frac{2}{1-q}\right)$$

Se înregistrează discontinuități la accelerații (şocuri moi) fapt care recomandă utilizarea acestei legi de mişcare numai la viteze mici şi medii. Valoarea optimă, din punct de vedere dinamic, este $q = \frac{1}{2}$, care conduce la cea mai mică accelerație $|S''|_{max} = 4$.

- **Legea de mişcare cu accelerație cosinusoidală**



$$S = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(\pi\phi)$$

$$S' = \frac{\pi}{2}\sin(\pi\phi)$$

$$S'' = \frac{\pi^2}{2}\cos(\pi\phi)$$

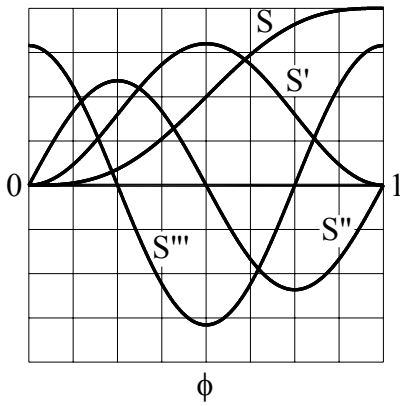
$$S''' = -\frac{\pi^3}{2}\sin(\pi\phi)$$

$$|S''|_{max} = \frac{\pi^2}{2} \simeq 4{,}93$$

Fig. 3.14

Se înregistrează discontinuităţi la accelerații (şocuri moi). Se recomandă utilizarea la viteze mici şi medii. Această lege de mişcare are calităţi dinamice foarte bune (continuitate la accelerații) în cazul particular $\varphi_r = \varphi_c = \pi$, $\varphi_s = \varphi_i = 0$.

- **Legea de mişcare cu accelerație sinusoidală**



$$S = \phi - \frac{1}{2\pi}\sin(2\pi\phi)$$
$$S' = 1 - \cos(2\pi\phi)$$
$$S'' = 2\pi\sin(2\pi\phi)$$
$$S''' = 2\pi^2\cos(2\pi\phi)$$

$$|S''| = 2\pi \simeq 6{,}28$$

Fig. 3.15

Viteza şi accelerația sunt continue ceea ce conferă acestei legi de mişcare calităţi dinamice foarte bune. Prelucrarea profilului reclamă o precizie ridicată.

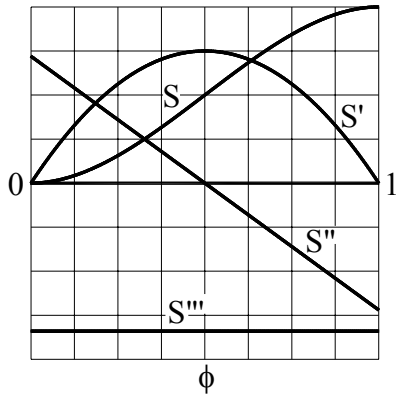
3.3.3.2. Legi de mişcare polinomiale

Funcția $S(\phi)$ se exprimă prin polinoame de forma

$$S(\phi) = C_0 + C_1\phi + ... + C_n\phi^n$$

Datorită numărului nelimitat de constante se pot impune condiții numeroase şi variate pentru funcțiile de transmitere. Astfel, este posibil să se obțină continuitate pentru funcțiile de transmitere de orice ordin (k).

- **Legea de mişcare polinomială 2 -3 (k=1)**



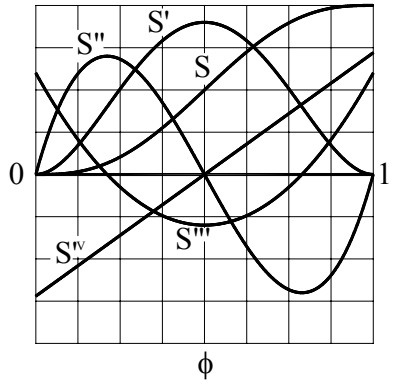
$$S = 3\phi^2 - 2\phi^3$$
$$S' = 6\phi - 6\phi^2$$
$$S'' = 6 - 12\phi$$
$$S''' = -12$$

$$|S''|_{max} = 6$$

Fig. 3.16

Este o lege de mişcare cu discontinuităţi la accelerații care se poate utiliza la viteze mici şi medii.

- **Legea de mişcare polinomială 3 -4 - 5 (k=2)**



$$S = 10\phi^3 - 15\phi^4 + 6\phi^5$$
$$S' = 30\phi^2 - 60\phi^3 + 30\phi^4$$
$$S'' = 60\phi - 180\phi^2 + 120\phi^3$$
$$S''' = 60 - 360\phi + 360\phi^2$$

$$|S''|_{max} = \frac{10}{\sqrt{3}} \cong 5,77$$

Fig. 3.17

Această lege de mişcare are calităţi dinamice foarte bune (continuitate la viteze şi accelerații), fiind comparabilă cu legea de mişcare cu accelerație sinusoidală, dar este mai tehnologică decât aceasta.

- **Legea de mişcare polinomială 4 - 5 - 6 - 7 (k=3)**

$$S = 35\phi^4 - 84\phi^5 + 70\phi^6 - 20\phi^7$$
$$S' = 140\phi^3 - 420\phi^4 + 420\phi^5 - 140\phi^6$$
$$S'' = 420\phi^2 - 1680\phi^3 + 2100\phi^4 - 840\phi^5$$
$$S''' = 840\phi - 5040\phi^2 + 8400\phi^3 - 4200\phi^4$$

$$\left| S'' \right|_{max} = \frac{84}{5\sqrt{5}} \cong 7,52$$

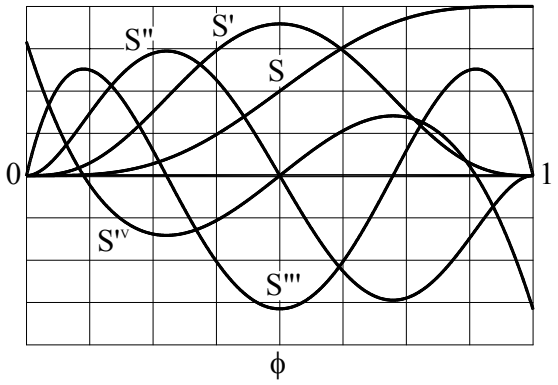


Fig. 3.18

- **Legea de mişcare polinomială 3 - 4 - 5 - 6 (k=2)**

$$S = 8\phi^3 - 12\phi^4 + 6\phi^5 - \phi^6$$
$$S' = 24\phi^2 - 48\phi^3 + 30\phi^4 - 6\phi^5$$
$$S'' = 48\phi - 144\phi^2 + 120\phi^3 - 30\phi^4$$
$$S''' = 48 - 288\phi + 360\phi^2 - 120\phi^3$$

$$\left| S'' \right|_{max} = 6$$

Această lege de mişcare se foloseşte pentru un ciclu de funcționare de tip RCS cu $\varphi_r = \varphi_c$. În aceste condiții are calități dinamice foarte bune asigurând continuitatea la viteze şi la accelerații. Ecuațiile sunt unice pentru ambele faze - de ridicare şi de coborâre: $\phi \in [0, 2]$.

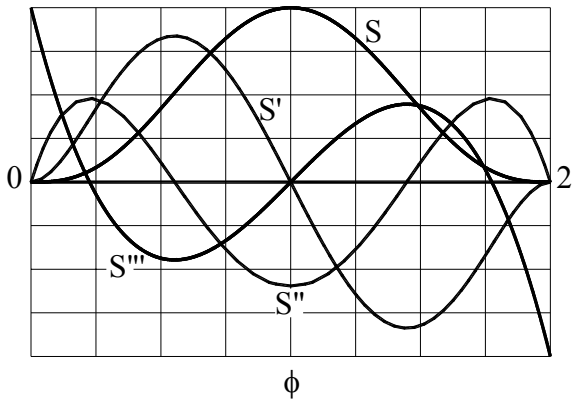


Fig. 3.19

3.3.3.3. Legi de mişcare combinate

Unghiul de fază este împărţit în mai multe sectoare (intervale), iar pentru fiecare interval funcţiile de transmitere au expresii diferite. Scopul utilizării lor este de a pune de acord criteriul dinamic cu cel determinat de rolul funcţional sau pentru a obţine calităţi dinamice foarte bune.

- **Legea de mişcare cu viteză trapezoidală**

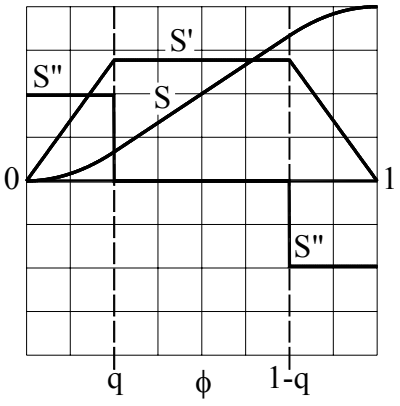


Fig. 3.20

Se prevăd trei sectoare: unul central, $\phi \in [q, 1-q]$ şi cu v =ct şi două laterale, $\phi \in [0, q]$ şi $\phi \in [1-q, 1]$ cu a =ct. Se utilizează pentru a elimina şocurile dure când criteriul rolului funcţional pretinde o mişcare uniformă. Problema esenţială este alegerea parametrului q, care determină mărimea sectoarelor laterale, de racordare. O valoare prea mare pentru q are consecinţe defavorabile în ceea ce priveşte rolul funcţional, iar o valoare prea mică înrăutăţeşte condiţiile dinamice şi tehnologice. De mare importanţă, pentru adoptarea unei soluţii, este testarea sau utilizarea experienţei în

exploatarea unor mecanisme similare. O valoare cu caracter de recomandare este $q = \frac{1}{8}$.

$\phi \in [0, q]$	$\phi \in [q, 1-q]$	$\phi \in [1-q, 1]$
$S = \frac{1}{2q(1-q)}\phi^2$	$S = \frac{1}{1-q}\phi - \frac{q}{2(1-q)}$	$S = -\frac{1}{2q(1-q)}(\phi^2 - 2\phi + 1) + 1$
$S' = \frac{1}{q(1-q)}\phi$	$S' = \frac{1}{1-q}$	$S' = -\frac{1}{q(1-q)}(\phi - 1)$
$S'' = \frac{1}{q(1-q)}$	$S'' = 0$	$S'' = -\frac{1}{q(1-q)}$
$S''' = 0$		$S''' = 0$

$|S''|_{max} = \frac{1}{q(1-q)}$. Pentru $q = \frac{1}{8}$, $|S''|_{max} \cong 9{,}142$. Se înregistrează discontinuități la accelerații (şocuri moi).

- **Legea de mişcare cu viteză trapezoidală modificată sinusoidal**

Această lege de mişcare este concepută similar cu cea precedentă cu deosebirea că în sectoarele de racordare accelerația este sinusoidală. În felul acesta se elimină discontinuitățile de la accelerații, ceea ce permite o viteză de funcționare mai mare, dar trebuie acordată o atenție sporită tehnologiei de prelucrare a camei.

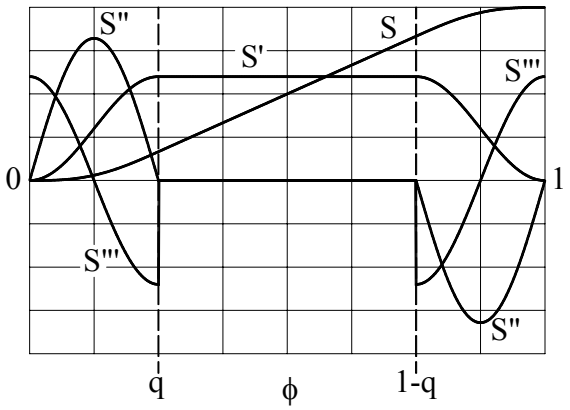


Fig. 3.21

$\underline{\phi \in [0,q]}$

$$S = \frac{1}{2(1-q)}\phi - \frac{q}{2\pi(1-q)}\sin(\frac{\pi}{q}\phi)$$

$$S' = \frac{1}{2(1-q)}\left(1-\cos(\frac{\pi}{q}\phi)\right)$$

$$S'' = \frac{\pi}{2q(1-q)}\sin(\frac{\pi}{q}\phi)$$

$$S''' = \frac{\pi^2}{2q^2(1-q)}\cos(\frac{\pi}{q}\phi)$$

$\underline{\phi \in [q,1-q]}$

$$S = \frac{1}{1-q}\phi - \frac{q}{2(1-q)}$$

$$S' = \frac{1}{1-q}$$

$$S'' = 0$$

$\underline{\phi \in [1-q,1]}$

$$S = \frac{1}{2(1-q)}\phi + \frac{q}{2\pi(1-q)}\sin(\frac{\pi}{q}(\phi+q-1)) - \frac{1}{2(1-q)} + 1$$

$$S' = -\frac{1}{2(1-q)}\left(1+\cos(\frac{\pi}{q}(\phi+q-1))\right)$$

$$S'' = -\frac{\pi}{2q(1-q)}\sin(\frac{\pi}{q}(\phi+q-1))$$

$$S''' = \frac{\pi^2}{2q^2(1-q)}\cos(\frac{\pi}{q}(\phi+q-1))$$

$|S''|_{max} = \frac{\pi}{2q(1-q)}$. Pentru $q = \frac{1}{8}$, $|S''|_{max} \cong 14,361$.

■ Legea de mişcare cu accelerație trapezoidală

Pentru a obține o funcție de transmitere de ordinul doi de formă trapezoidală (Fig.3.22) sunt necesare cinci sectoare.

$\phi \in [0,q]$	$\phi \in [q,\frac{1}{2}-q]$
$S=\frac{1}{6}A\frac{\phi^3}{q}$	$S=\frac{1}{2}A(\phi-q)^2+B_1(\phi-q)+B_2$
$S'=\frac{1}{2}A\frac{\phi^2}{q}$	$S'=A(\phi-q)+B_1$
$S''=A\frac{\phi}{q}$	$S''=A$
$S'''=\frac{A}{q}$	$S'''=0$

$\phi \in [\frac{1}{2}-q,\frac{1}{2}+q]$

$$S=-\frac{1}{6q}A(\phi+q-\frac{1}{2})^3+\frac{1}{2}A(\phi+q-\frac{1}{2})^2+C_1(\phi+q-\frac{1}{2})+C_2$$

$$S'=-\frac{1}{2q}A(\phi+q-\frac{1}{2})^2+A(\phi+q-\frac{1}{2})+C_1$$

$$S''=-\frac{A}{q}(\phi+q-\frac{1}{2})+A$$

$$S'''=-\frac{A}{q}$$

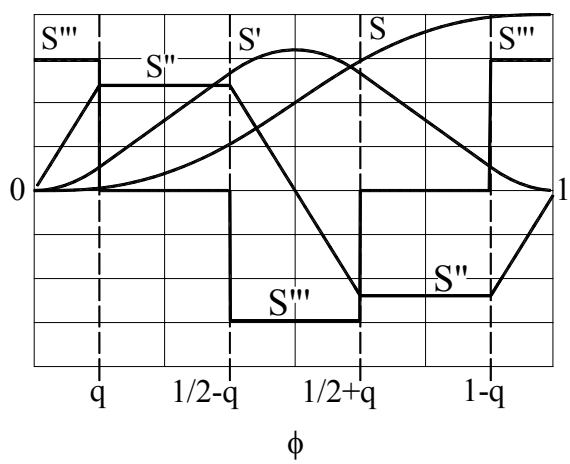


Fig. 3.22

Pentru sectoarele 4 cu $\phi \in [\frac{1}{2}+q,\ \frac{1}{2}-q]$ şi 5 cu $\phi \in [1-q,\ 1]$, funcțiile de transmitere se calculează, prin simetrie, pe baza relațiilor

$$S(\phi) = 1 - S(1-\phi)$$
$$S'(\phi) = S'(1-\phi)$$
$$S''(\phi) = -S''(1-\phi)$$
$$S'''(\phi) = S'''(1-\phi)$$

Constantele care intervin în ecuații au următoarele valori

$$A = \frac{4}{1-2q},\ B_1 = \frac{1}{2}Aq,\ B_2 = \frac{1}{6}Aq^2$$

$$C_1 = A\frac{1-3q}{2},\ C_2 = A\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-2q\right)^2 + \frac{1}{2}q\left(\frac{1}{2}-2q\right) + \frac{1}{6}q^2\right)$$

$|S''|_{max} = \frac{4}{1-2q}$. Pentru $q = \frac{1}{8}$, $|S''|_{max} \cong 5,33$.

Această lege de mişcare asigură continuitatea la viteze şi la accelerații având calități dinamice foarte bune în orice regim de viteze. Are, de asemenea, caracteristici tehnologice mai bune decât legea de mişcare cu accelerație sinusoidală cu care poate fi comparată. Pentru valoarearea recomandată $q = \frac{1}{8}$, accelerația maximă este mai redusă decât la legile de mişcare similare - cu accelerație sinusoidală şi polinomială 3 - 4 - 5.

3.4. ELEMENTE DE GEOMETRIE ŞI CINEMATICĂ

3.4.1. Problematica generală

În cadrul acestui capitol se prezintă procedeele de calcul pentru o serie de parametri geometrici şi cinematici. Aceste procedee intervin în operația de sinteză dimensională care va fi tratată într-un capitol următor. Ca date inițiale se consideră legea de mişcare a tachetului şi parametrii geometrici de bază - constante care definesc mecanismul din punct de vedere constructiv. Se tratează, din acest punct de vedere, patru tipuri de mecanisme cu came - trei plane şi unul spațial. Pentru fiecare tip se abordează aceleaşi probleme prezentate pe scurt în continuare.

■ Caracterizarea constructivă a mecanismului

Se adoptă, convenabil, un sistem de axe de coordonate fix (3) - solidar cu batiul şi un sistem (1) solidar cu cama (Fig.3.29, 3.30, 3.31, 3.32).
Unghiul sistemului (1) faţă de sistemul (3) este unghiul de poziţie al camei, φ.

Se definesc parametrii geometrici de bază ai mecanismului şi se calculează dimensiunile da gabarit ale camei (razele extreme ale profilului).

■ Sinteza profilului teoretic

Se stabilesc ecuaţiile parametrice, în coordonate carteziene ale profilului teoretic. Pentru aceasta se determină coordonatele punctului C (centrul rolei) în sistemul fix (3) şi, apoi, se operează o transformare de coordonate în sistemul (1) utilizând relaţiile [A.5]. Parametrul care intervine în ecuaţiile profilului teoretic este unghiul de poziţie al camei, φ.

■ Cinematica cuplei superioare

Se scrie ecuaţia de viteze la nivelul cuplei superioare,

$$\overline{v}_{C2} = \overline{v}_{C1} + \overline{v}_{C21} \tag{3.6}$$

în care C este centrul rolei sau punctul geometric de contact în cazul tachetului plat. Punctele C_1 şi C_2 coincid cu C şi aparţin elementului 1 (cama), respectiv 2 (tachetul). Din această ecuaţie se calculează viteza relativă de alunecare $\overline{v}_{C21}$ care are direcţia tangentei la profilul teoretic sau la profilul real în cazul tachetului plat.

■ Unghiul de presiune

Unghiul de presiune este unghiul ascuţit format între viteza punctului de contact aparţinând tachetului ($\overline{v}_{C2}$) şi normala la profil. În cazul mecanismelor cu rolă, unghiul de presiune se defineşte pe mecanismul echivalent, aplicând transformarea prin eliminarea rolei. Determinarea unghiului de presiune se face pornind de la expresia vectorială a vitezei relative de alunecare, $\overline{v}_{C21}$.

■ Sinteza profilelor reale

Pentru determinarea profilelor reale, interior şi exterior, se stabileşte poziţia punctelor de contact rolă - profile reale, în raport cu sistemul fix (3), utilizând noţiunea de unghi de presiune. Apoi, se aplică transformarea de

coordonate din sistemul (3) în sistemul (1) obținând ecuațiile parametrice ale profilelor reale.

Observație. În ecuațiile profilelor intervine parametrul φ care se consideră scalar cu semn şi se introduce în calcul cu semnul (+) când viteza unghiulară a camei este pozitivă şi cu (-) în caz contrar. Funcțiile $s(\varphi)$, $s'(\varphi)$, $s''(\varphi)$ care intervin, de asemenea, în ecuații se calculează cu formulele standard (prezentate în subcap. 3.3.), dar în cazul în care viteza unghiulară a camei este negativă, derivatele de ordin impar ($s'(\varphi)$, $s'''(\varphi)$) îşi schimbă semnul.

■ Raza de curbură, subtăierea

Raza de curbură, R_C, a profilului unei came disc se calculează cu formula [A.12],

$$R_C = \frac{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}{x'y'' - y'x''} \cdot SGN(xy' - yx'), \tag{3.7}$$

în care x şi y sunt coordonatele punctului pentru care se calculează raza de curbură, iar x', x'', y', y'' sunt derivatele în raport cu parametrul φ, calculate în acelaşi punct. Funcția $SGN(xy' - yx')$ este egală cu ± 1 după cum expresia din paranteză este pozitivă sau negativă.

Formula (3.7) indică şi caracterul profilului cu condiția ca originea sistemului de coordonate să coincidă cu centrul camei (Fig.3.23). Astfel, dacă raza de curbură rezultă pozitivă, profilul este convex, iar dacă rezultă negativă este concav. Precizăm că un profil se consideră convex în P dacă are concavitatea orientată spre centrul camei (Fig.3.23.a) şi concav în caz contrar (Fig.3.23.b).

În cazul camelor cu mişcare de translație paralelă cu axa Ox (Fig.3.24) raza de curbură se calculează cu formula [A.13],

$$R_C = \frac{-(x'^2 + y'^2)^{3/2}}{x'y'' - y'x''} \cdot SGN(x'). \tag{3.8}$$

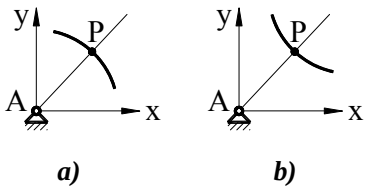


Fig. 3.23

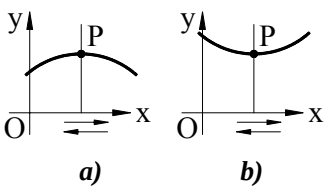


Fig. 3.24

care arată şi caracterul profilului. Prin convenţie, se consideră că profilul este convex în P dacă are convexitatea orientată spre sensul pozitiv al axei Oy (Fig.3.24.a) şi concav în caz contrar (Fig.3.24.b).

În cazul mecanismelor cu rolă formulele (3.7) şi (3.8) servesc pentru calculul razei de curbură a profilului teoretic (R_{Ct}). Razele de curbură ale profilelor reale, interior (R_{Cri}) şi exterior (R_{Cre}), se determină cu formulele

$$R_{Cri} = R_{Ct} - r_4 \tag{3.9}$$

$$R_{Cre} = R_{Ct} + r_4 \tag{3.10}$$

în care r_4 este raza rolei.

Fenomenul de subtăiere este legat de generarea profilelor reale ca înfăşurătoare ale familiei de cercuri de rază egală cu raza rolei şi având centrele pe profilul teoretic. El se produce în zonele în care caracterul (convex sau concav) al profilului real este diferit de cel al profilului teoretic - adică razele de curbură au semne diferite. Analizând formulele (3.9) şi (3.10) din acest punct de vedere se constată următoarele concluzii:

- Subtăierea profilului real interior se produce când $R_{Ct} \in [0,\ r_4]$. deci, condiţiile de evitare a subtăierii sunt

$$R_{Ct} > r_4 \text{ sau } R_{Ct} < 0 \tag{3.11}$$

- Subtăierea profilului real exterior se produce când $R_{Ct} \in [-r_4,\ 0]$, iar condiţiile de evitare a subtăierii sunt

$$R_{Ct} < -r_4 \text{ sau } R_{Ct} > 0 \tag{3.12}$$

Pentru a exemplifica producerea fenomenului de subtăiere, în Fig. 3.25 sunt reprezentate profilele teoretic (C_t), real interior (C_{ri}) şi real exterior (C_{re}) ale unei came, iar în Fig.3.26 este reprezentată diagrama $R_{Ct}(\varphi)$, $\varphi \in [0,\ 2\pi]$.

Se observă că în zona AB nu sunt îndeplinite condiţiile (3.12) şi, deci, se produce subtăierea pe profilul real exterior, iar în zona DC nu sunt îndeplinite condiţiile (3.11) şi, prin urmare, are loc fenomenul de subtăiere pe profilul real interior. Punctele A, B, C şi D, în care razele de curbură reale sunt egale cu zero reprezintă puncte singulare pentru curbele respective. Este evident că subtăierea nu este compatibilă cu realizarea practică a profilelor astfel încât, în procesul de proiectare, este necesară verificarea condiţiilor (3.11) şi (3.12).

Denumirea de **subtăiere** indică faptul că, în ipoteza prelucrării camei, segmentele de profil SABS, respectiv TBCT (Fig. 3.25) se elimină rezultând un profil cu vârfuri ascuţite în S şi T.

În cazul mecanismelor care au tachet plat raza de curbură se calculează cu formula (3.7). Pentru o funcţionare corectă profilul trebuie să fie integral convex, deci trebuie îndeplinită condiţia

$$R_{Ct} > 0 \tag{3.13}$$

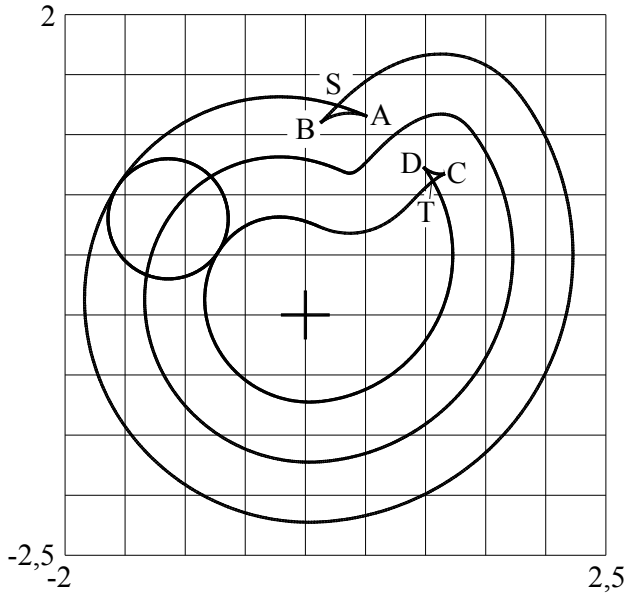


Fig. 3.25

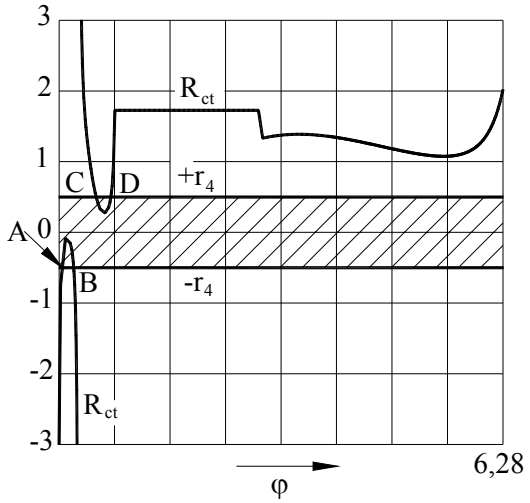
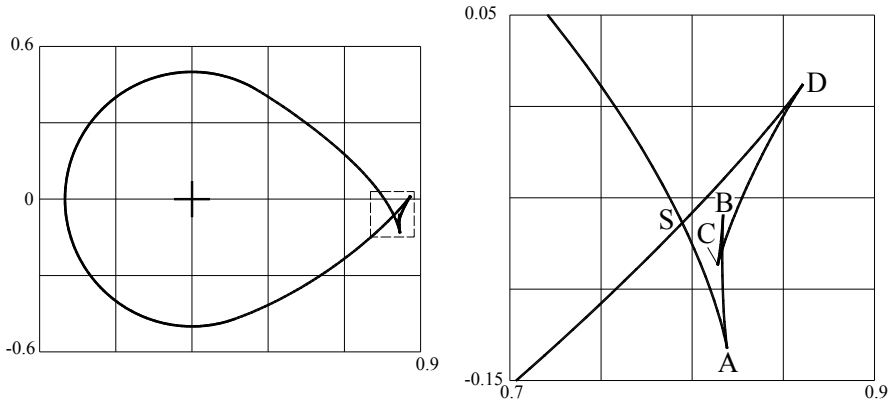


Fig. 3.26

Dacă această condiție nu este respectată, se produce și la aceste mecanisme fenomenul de subtăiere. Pentru exemplificare, în Fig.3.27 este reprezentat profilul unei came, iar în Fig.3.28 - diagrama $R_{Cr}(\varphi)$.

Acest profil are patru puncte singulare A, B, C, D, în care $R_{Ct} = 0$. În aceste puncte se schimbă caracterul profilului (convex → concav sau concav → convex), rezultând imaginea din Fig.3.28.b.



a) ***b)***

Fig. 3.27

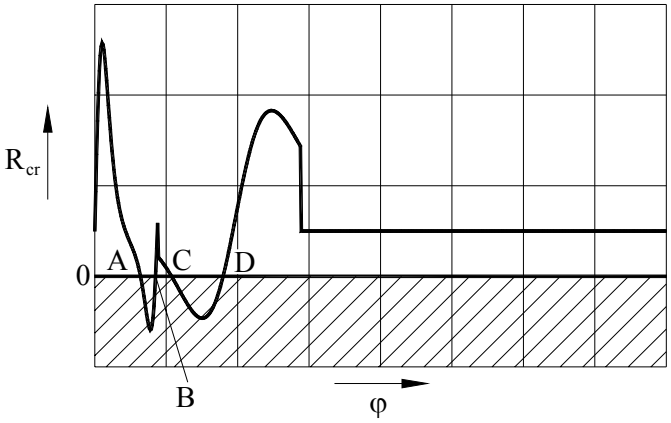


Fig. 3.28

3.4.2. Mecanismul plan cu tachet de translație şi rolă

■ Caracterizarea constructivă

Se adoptă un sistem de axe fix $Ax_3y_3z_3$ (Fig.3.29) cu originea în centrul de rotație al camei, axa Ay_3 paralelă cu axa de translație a tachetului, în sensul de ridicare, şi axa Az_3 perpendiculară pe planul mişcării, orientată spre observator. Se adoptă, de asemenea, un sistem $Ax_1y_1z_1$ solidar cu cama, rotit față de $Ax_3y_3z_3$ cu unghiul de poziție al camei, φ.

Parametrii geometrici de bază ai mecanismului, definiți cu ajutorul schemei din Fig.3.29, sunt:

- e - excentricitatea (scalar cu semn), distanța de la centrul de rotație al camei la axa tachetului;
- s_0 - distanța minimă, măsurată paralel cu axa tachetului, de la centrul rolei (C) la centrul camei (A);
- r_4 - raza rolei.

Razele extreme ale profilului teoretic rezultă, de asemeni, din Fig. 3.29 şi au expresiile

$$r_{t\,min} = \sqrt{e^2 + s_0^2}\,,\ r_{t\,max} = \sqrt{e^2 + (s_0 + h)^2}\ , \tag{3.14}$$

în care h este cursa tachetului.

■ Sinteza profilului teoretic

Vectorul de poziție al punctului C (centrul rolei) (Fig.3.29) $\overline{r}_C = \overline{AC}$ se proiectează pe axele sistemului fix (3)

$$\begin{aligned} x_{3C} &= e \\ y_{3C} &= s_0 + s \end{aligned} \tag{3.15}$$

Printr-o transformare de coordonate, din sistemul (3) în sistemul (1) [A.5] se obțin expresiile coordonatelor punctului C în raport cu sistemul (1) care reprezintă, în acelaşi timp, ecuațiile parametrice ale profilului teoretic,

$$\begin{aligned} x_t &= x_{1C} = e\cos\varphi + (s_0 + s)\sin\varphi \\ y_t &= y_{1C} = -e\sin\varphi + (s_0 + s)\cos\varphi \end{aligned} \tag{3.16}$$

Prin derivare în raport cu parametrul φ rezultă:

$$x'_t = x'_{1C} = (s'-e)\sin\varphi + (s_0+s)\cos\varphi$$
$$y'_t = y'_{1C} = (s'-e)\cos\varphi - (s_0+s)\sin\varphi \qquad (3.17)$$

$$x''_t = x''_{1C} = (2s'-e)\cos\varphi - (s_0+s-s'')\sin\varphi$$
$$y''_t = y''_{1C} = -(2s'-e)\sin\varphi - (s_0+s-s'')\cos\varphi \qquad (3.18)$$

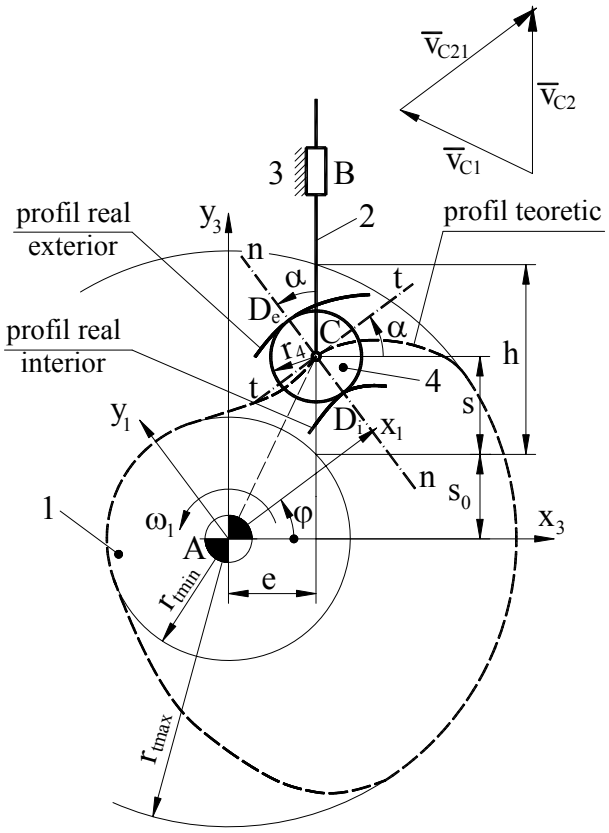


Fig. 3.29

Ecuațiile profilului teoretic, în coordonate polare, se obțin pe baza relațiilor de transformare [A.7],

$$r_t = \sqrt{e^2 + (s_0+s)^2}$$
$$\theta_t = \operatorname{arctg}\frac{-e\sin\varphi + (s_0+s)\cos\varphi}{e\cos\varphi + (s_0+s)\sin\varphi} \qquad (3.19)$$

■ Cinematica cuplei superioare

Din ecuațiile de viteze (3.6) se determină viteza realivă $\overline{v}_{C21}$,

$$\overline{v}_{C21} = \overline{v}_{C21} - \overline{v}_{C1}$$

Vitezele $\overline{v}_{C2}$ şi $\overline{v}_{C1}$ au expresiile analitice

$$\overline{v}_{C2} = \overline{j}_3 v$$

$$\overline{v}_{C1} = \overline{\omega} \times \overline{AC} = \overline{k}_3 \omega \times (\overline{i}_3 e + \overline{j}_3 (s_0 + s)) = -\overline{i}_3 \omega (s_0 + s) + \overline{j}_3 \omega e$$

care conduce la

$$\overline{v}_{C21} = \overline{i}_3 \omega (s_0 + s) + \overline{j}_3 (v - \omega e) \tag{3.20}$$

În aceste relații $v = v_{C2}$ este viteza tachetului, iar $\omega = \omega_1$ - viteza unghiulară a camei.

■ Unghiul de presiune

Particularizând definiția generală (par. 3.4.1.), la acest mecanism unghiul de presiune, α, se formează între axa tachetului (Ay_3) şi normala la profile trasată prin centrul rolei (C). Evident, acelaşi unghi se formează între tangenta la profil şi perpendiculara pe tachet (Ax_3). Deoarece viteza relativă $\overline{v}_{C21}$ are direcția tangentei la profil, se poate scrie

$$tg\alpha = \frac{(\overline{v}_{C21})_{y_3}}{(\overline{v}_{C21})_{x_3}}.$$

Având în vedere expresia (3.20) a vectorului $\overline{v}_{C21}$, rezultă

$$tg\alpha = \frac{\frac{v}{\omega} - e}{s_0 + s} = \frac{s' - e}{s_0 + s} \tag{3.21}$$

Menționăm că unghiul de presiune calculat cu formula (3.21) este un unghi orientat, măsurat de la axa tachetului la normala profilului teoretic şi se exprimă printr-un scalar cu semn.

■ Sinteza profilului real

Razele vectoare ale punctelor de contact rolă - profil real: D_i şi D_e (Fig.3.29) sunt:

$$\overline{r}_{Di} = \overline{AC} + \overline{CD}_i$$
$$\overline{r}_{De} = \overline{AC} + \overline{CD}_e \tag{3.22}$$

Proiectând $\overline{r}_{Di}$ şi $\overline{r}_{De}$ pe axele sistemului (3) se obțin coordonatele punctelor D_i şi D_e,

$$x_{3Di} = x_{3C} + r_4 \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = x_{3C} + r_4 \sin\alpha$$

$$y_{3Di} = y_{3C} + r_4 \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = y_{3C} - r_4 \cos\alpha$$

$$x_{3De} = x_{3C} + r_4 \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = x_{3C} - r_4 \sin\alpha$$

$$y_{3De} = y_{3C} + r_4 \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = y_{3C} + r_4 \cos\alpha$$

Înlocuind x_{3C} şi y_{3C} cu expresiile lor (3.15) se poate scrie

$$x_{3D} = e \pm r_4 \sin\alpha$$
$$y_{3D} = (s_0 + s) \mp r_4 \cos\alpha \tag{3.23}$$

în care semnul de sus corespunde profilului interior, iar cel de jos - profilului exterior.

Aplicând transformarea de coordonate din sistemul (3) în sistemul (1) [A.5], se obțin ecuațiile parametrice ale profilului real,

$$x_r = x_{1D} = (e \pm r_4 \sin\alpha)\cos\varphi + (s_0 + s \mp r_4 \cos\alpha)\sin\varphi$$
$$y_r = y_{1D} = -(e \pm r_4 \sin\alpha)\sin\varphi + (s_0 + s \mp r_4 \cos\alpha)\cos\varphi \tag{3.24}$$

sau

$$x_r = x_{1D} = e\cos\varphi + (s_0 + s)\sin\varphi \pm r_4 \sin(\alpha - \varphi)$$
$$y_r = y_{1D} = -e\sin\varphi + (s_0 + s)\cos\varphi \mp r_4 \cos(\alpha - \varphi) \tag{3.25}$$

■ Raza de curbură

Pentru calculul razei de curbură a profilului teoretic R_{ct}. Se aplică formula (3.7), în care se introduc coordonatele şi derivatele lor date de formulele (3.16), (3.17) şi (3.18).

$$R_{ct} = \frac{\left((s'-e)^2 + (s_0+s)^2\right)^{3/2}}{(s'-e)(2s'-e) + (s_0+s)(s_0+s-s'')} \cdot \mathrm{SGN}\left((s_0+s)^2 - e(s'-e)\right) \tag{3.26}$$

3.4.3. Mecanismul plan cu tachet de rotație şi rolă

■ Caracterizarea constructivă

Se adoptă un sistem de axe fix $Ax_3y_3z_3$ (Fig.3.30) cu originea în centrul de rotație al camei, axa Ax_3 orientată după vectorul $\overline{AB}$, iar axa Ay_3 orientată astfel încât y_{3C} să fie pozitiv.

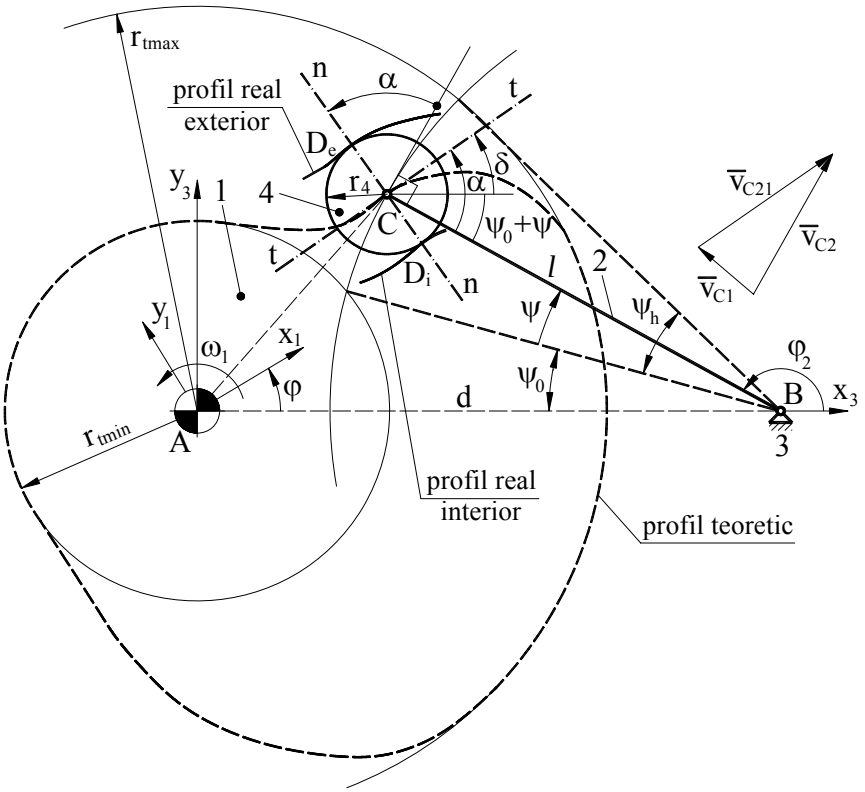


Fig. 3.30

Se recomandă reprezentarea mecanismului astfel încât centrul de rotație al tachetului, B, să fie în dreapta punctului A. În această ipoteză axa Az_3 rezultă orientată spre observator. Se adoptă, de asemenea, sistemul $Ax_1y_1z_1$ solidar cu cama şi rotit cu unghiul φ în raport cu sistemul $Ax_3y_3z_3$.

Parametrii geometrici de bază ai mecanismului sunt:

- d=AB - distanța dintre centrul camei (A) şi centrul de rotație al tachetului (B);
- $\ell = BC$ - lungimea tachetului;
- ψ_0 - unghiul minim format de tachetul BC cu linia centrelor AB;
- r_4 - raza rolei.

Razele extreme ale profilului teoretic rezultă, de asemeni, din Fig.3.29 şi au expresiile

$$r_{t\,min} = \sqrt{d^2 + \ell^2 - 2\ell d\cos\psi_0}\,,\ r_{t\,max} = \sqrt{d^2 + \ell^2 - 2\ell d\cos(\psi_0 + \psi_h)}\,, \quad (3.14)$$

în care ψ_h este cursa unghiulară a tachetului.

■ Sinteza profilului teoretic

Vectorul de poziție al punctului C,

$$\overline{r}_C = \overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$$

se proiectează pe axele triedrului fix (3),

$$x_{3C} = d + \ell\cos\varphi_2$$
$$y_{3C} = \ell\sin\varphi_2$$

Având în vedere că $\varphi_2 = \pi - (\psi_0 + \psi)$, se obține

$$\begin{aligned} x_{3C} &= d - \ell\cos(\psi_0 + \psi) \\ y_{3C} &= \ell\sin(\psi_0 + \psi) \end{aligned} \quad (3.28)$$

Se aplică transformarea de coordonate din sistemul (3) în sistemul (1), obținând ecuațiile parametrice ale profilului teoretic

$$x_t = x_{1C} = (d - \ell\cos(\psi_0 + \psi))\cos\varphi + \ell\sin(\psi_0 + \psi)\sin\varphi$$
$$y_t = y_{1C} = -(d - \ell\cos(\psi_0 + \psi))\sin\varphi + \ell\sin(\psi_0 + \psi)\cos\varphi$$

sau

$$\begin{aligned} x_t &= x_{1C} = d\cos\varphi - \ell\cos(\varphi + \psi_0 + \psi) \\ y_t &= y_{1C} = -d\sin\varphi + \ell\sin(\varphi + \psi_0 + \psi) \end{aligned} \quad (3.29)$$

Prin derivare, în raport cu parametrul φ, se obține

$$\begin{aligned} x'_t &= x'_{1C} = -d\sin\varphi + \ell(1 + \psi')\sin(\varphi + \psi_0 + \psi) \\ y'_t &= y'_{1C} = -d\cos\varphi + \ell(1 + \psi')\cos(\varphi + \psi_0 + \psi) \end{aligned} \quad (3.30)$$

$$x''_t = x''_{1C} = -d\cos\varphi + \ell(1+\psi')^2\cos(\varphi+\psi_0+\psi) + \ell\psi''\sin(\varphi+\psi_0+\psi)$$
$$y''_t = y''_{1C} = d\sin\varphi - \ell(1+\psi')^2\sin(\varphi+\psi_0+\psi) + \ell\psi''\cos(\varphi+\psi_0+\psi) \quad (3.31)$$

■ Cinematica cuplei superioare

Se determină expresiile analitice ale vitezelor $\overline{v}_{C1}$ şi $\overline{v}_{C2}$,

$$\overline{v}_{C1} = \overline{\omega}_1 \times \overline{AC} = \overline{k}_3\omega_1 \times (\overline{i}_3 x_{3C} + \overline{j}_3 y_{3C}) =$$
$$= -\overline{i}_3\omega_1\ell\sin(\psi_0+\psi) + \overline{j}_3\omega_1(d - \ell\cos(\psi_0+\psi))$$
$$\overline{v}_{C2} = \overline{\omega}_2 \times \overline{BC} = \overline{k}_3\omega_2 \times (-\overline{i}_3\ell\cos(\psi_0+\psi) + \overline{j}_3\ell\sin(\psi_0+\psi)) =$$
$$= -\overline{i}_3\omega_2\ell\sin(\psi_0+\psi) - \overline{j}_3\omega_2\ell\cos(\psi_0+\psi)$$

Introducând aceste expresii în ecuațiile de viteze (3.6) se obține viteza relativă $\overline{v}_{C21}$,

$$\overline{v}_{C21} = \overline{i}_3\ell(\overline{\omega}_1 - \overline{\omega}_2)\sin(\psi_0+\psi) + \overline{j}_3(\ell(\overline{\omega}_1 - \overline{\omega}_2)\cos(\psi_0+\psi) - \omega_1 d) \quad (3.32)$$

■ Unghiul de presiune

Prin particularizarea definiției generale (par. 3.4.1.), la acest mecanism, unghiul de presiune, α, se formează între perpendiculara pe tachet şi normala la profile trasată prin centrul rolei (C) sau între tachetul (BC) şi tangenta în (C) la profilul teoretic. Pentru a determina unghiul de presiune se calculează mai întâi, unghiul δ format de tangenta la profilul teoretic în (C) şi linia centrelor ($AB = Ax_3$).

$$tg\delta = \frac{(\overline{v}_{C21})_{y_3}}{(\overline{v}_{C21})_{x_3}}$$

$$tg\delta = \frac{\ell\left(1 - \frac{\omega_2}{\omega_1}\right)\cos(\psi_0+\psi) - d}{\ell\left(1 - \frac{\omega_2}{\omega_1}\right)\sin(\psi_0+\psi)} = \frac{\ell(1+\psi')\cos(\psi_0+\psi) - d}{\ell(1+\psi')\sin(\psi_0+\psi)}$$

Unghiul de presiune este suma formată din unghiurile δ şi $(\psi_0+\psi)$ (Fig.3.30),

$$\alpha = \delta + \psi_0 + \psi,$$

iar

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\mathrm{tg}\delta + \mathrm{tg}(\psi_0 + \psi)}{1 - \mathrm{tg}\delta \cdot \mathrm{tg}(\psi_0 + \psi)}$$

Efectuând transformările corespunzătoare, se obține formula

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\ell\left(1 - \frac{\omega_2}{\omega_1}\right) - d \cdot \cos(\psi_0 + \psi)}{d \cdot \sin(\psi_0 + \psi)} = \frac{\ell(1 + \psi') - d \cdot \cos(\psi_0 + \psi)}{d \cdot \sin(\psi_0 + \psi)} \qquad (3.33)$$

■ Sinteza profilului real

Razele vectoare ale punctelor D_i şi D_e, având aceleaşi expresii (3.22) ca la mecanismul cu tachet de translație, conduc la

$$x_{3Di} = x_{3C} + r_4 \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2} - (\psi_0 + \psi)\right) = x_{3C} + r_4 \sin(\alpha - (\psi_0 + \psi))$$

$$y_{3Di} = y_{3C} + r_4 \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2} - (\psi_0 + \psi)\right) = y_{3C} - r_4 \cos(\alpha - (\psi_0 + \psi))$$

$$x_{3De} = x_{3C} + r_4 \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2} - (\psi_0 + \psi)\right) = x_{3C} - r_4 \sin(\alpha - (\psi_0 + \psi))$$

$$y_{3De} = y_{3C} + r_4 \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2} - (\psi_0 + \psi)\right) = y_{3C} + r_4 \cos(\alpha - (\psi_0 + \psi))$$

Înlocuind expresiile coordonatelor x_{3C} şi y_{3C} (3.28) se obține

$$x_{3D} = d - \ell \cos(\psi_0 + \psi) \pm r_4 \sin(\alpha - (\psi_0 + \psi))$$

$$y_{3D} = \ell \sin(\psi_0 + \psi) \mp r_4 \cos(\alpha - (\psi_0 + \psi))$$

Operând schimbarea de coordonate din sistemul (3) în sistemul (1) se ajunge la ecuațiile parametrice ale celor două profile reale,

$$\begin{aligned} x_r &= x_{1D} = d\cos\varphi - \ell\cos(\psi_0 + \psi + \varphi) \pm r_4 \sin(\alpha - (\psi_0 + \psi + \varphi)) \\ y_r &= y_{1D} = -d\sin\varphi + \ell\sin(\psi_0 + \psi + \varphi) \mp r_4 \cos(\alpha - (\psi_0 + \psi + \varphi)) \end{aligned} \qquad (3.34)$$

■ Raza de curbură

Se aplică formula (3.7) cu expresiile coordonatelor şi ale derivatelor acestora date de formulele (3.29), (3.30) şi (3.31). Se ajunge la următoarea formulă pentru raza de curbură a profilului teoretic R_{ct},

$$R_{ct} = \frac{\left(d^2 + \ell^2(1+\psi')^2 - 2\ell d(1+\psi')\cos(\psi_0+\psi)\right)^{3/2}}{d\ell\psi''\sin(\psi_0+\psi) + d\ell(1+\psi')(2+\psi')\cos(\psi_0+\psi) - d^2 - \ell^2(1+\psi')^3} \cdot \quad (3.35)$$
$$\cdot \mathrm{SGN}\left(-d^2 - \ell^2(1+\psi') + d\ell(2+\psi')\cos(\psi_0+\psi)\right)$$

3.4.4. Mecanismul plan cu tachet de translație şi talpă

- **Caracterizarea constructivă**

Se adoptă un sistem de axe fix $Ax_3y_3z_3$ cu originea în centrul de rotație al camei, axa Ay_3 orientată paralel cu axa de translație, în sensul de ridicare, şi axa Az_3 orientată spre observator (Fig.3.31). Se adoptă, de asemenea, sistemul $Ax_1y_1z_1$, solidar cu cama, formând cu sistemul $Ax_3y_3z_3$ unghiul φ.

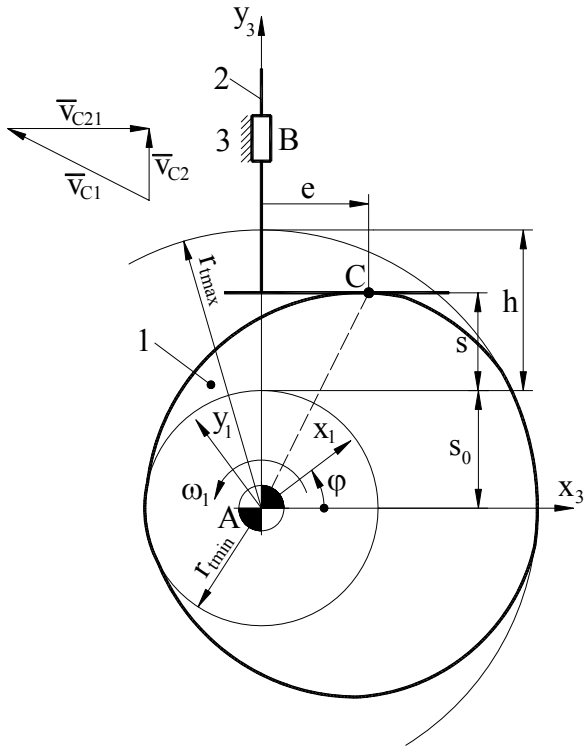


Fig. 3.31

Mecanismul are un parametru de bază unic,

- s_0 - distanța minimă dintre centrul camei (A) şi talpa tachetului.

Razele extreme ale profilului sunt

$$r_{t\min} = s_0,\ r_{t\max} = s_0 + h\ , \tag{3.36}$$

■ Cinematica cuplei superioare

Vectorii din ecuația de viteze (3.6) au expresiile

$$\overline{v}_{C1} = \overline{\omega} \times \overline{AC} = \overline{k}_3\omega \times (\overline{i}_3 e + \overline{j}_3(s_0 + s)) = -\overline{i}_3\omega(s_0 + s) + \overline{j}_3\omega e$$

$$\overline{v}_{C2} = \overline{j}_3 v$$

$$\overline{v}_{C21} = \overline{i}_3 v_{C21}$$

în care e reprezintă excentricitatea variabilă - distanța de la centrul camei la punctul de contact (C) măsurată paralel cu talpa tachetului.

Introducând aceste expresii în ecuația (3.6) se obține

$$v_{C21} = \omega(s_0 + s) \tag{3.41}$$

$$e = s' \tag{3.42}$$

■ Sinteza profilului

Se proiectează vectorul $\overline{r}_C = \overline{AC}$ pe axele sistemului fix (3),

$$\begin{aligned} x_{3C} &= e = s' \\ y_{3C} &= s_0 + s \end{aligned} \tag{3.37}$$

Prin transformarea de coordonate din sistemul (3) în sistemul (1), se obțin ecuațiile parametrice ale profilului

$$\begin{aligned} x_r &= x_{1C} = s'\cos\varphi + (s_0 + s)\sin\varphi \\ y_r &= y_{1C} = -s'\sin\varphi + (s_0 + s)\cos\varphi \end{aligned} \tag{3.38}$$

Se derivează x_r şi y_r în raport cu paarmetrul φ

$$\begin{aligned} x'_r &= x'_{1C} = (s_0 + s + s'')\cos\varphi \\ y'_r &= y'_{1C} = -(s_0 + s + s'')\sin\varphi \end{aligned} \tag{3.39}$$

$$\begin{aligned} x''_r &= x''_{1C} = -(s_0 + s + s'')\sin\varphi + (s' + s''')\cos\varphi \\ y''_r &= y''_{1C} = -(s_0 + s + s'')\cos\varphi - (s' + s''')\sin\varphi \end{aligned} \tag{3.40}$$

- **Raza de curbură**

Aplicând formula (3.7) în care se introduc expresiile (3.38), (3.39) şi (3.40) se ajunge la următoarea expresie simplă pentru raza de curbură a profilului

$$R_{ct} = s_0 + s + s'' \tag{3.43}$$

Menționăm că formula (3.43) indică şi semnul pentru raza de curbură cu semnificația cunoscută (par. 3.4.1.).

3.4.5. Mecanismul spațial cu camă cilindrică şi tachet de translație

- **Caracterizarea constructivă**

Mecanismul spațial se transformă într-un mecanism plan (par. 3.1.2.3.) prin desfăşurarea cilindrului de rază medie r_1 (valoarea medie dintre raza exterioară a cilindrului şi raza fundului canalului) (Fig.3.32). În mecanismul transformat mişcarea camei este una de translație, perpendiculară pe direcția mişcării tachetului.

Se adoptă un sistem de axe fix $O_3x_3y_3$ cu axa O_3y_3 după direcția tachetului în sensul convențional de ridicare.

Se adoptă, de asemenea, un sistem $O_1x_1y_1$, solidar cu cama, paralel cu sistemul $O_3x_3y_3$ şi deplasat față de acesta, pe direcția O_3x_3, cu $s_1 = \varphi \cdot r_1$ (φ - unghiul de poziție al camei cilindrice).

Parametrii geometrici de bază ai mecanismului sunt:

- r_1 - raza medie a camei cilindrice;
- r_4 - raza rolei.

Dimensiunile de gabarit ale camei sunt raza medie r_1 şi cursa h.

- **Sinteza profilului teoretic**

Vectorul de poziție al punctului C, $\overline{r}_C = \overline{O_3C}$ se proiectează pe axele sistemului fix,

$$\begin{aligned} x_{3C} &= 0 \\ y_{3C} &= s \end{aligned} \tag{3.44}$$

şi se aplică transformarea de coordonate [A.6] din sistemul (3) în sistemul (1),

$$x_t = x_{1C} = -s_1 = -r_1\varphi$$
$$y_t = y_{1C} = s \tag{3.45}$$

Se derivează x_t şi y_t în raport cu parametrul φ,

$$x'_t = x'_{1C} = -r_1$$
$$y'_t = y'_{1C} = s' \tag{3.46}$$

$$x''_t = x''_{1C} = 0$$
$$y''_t = y''_{1C} = s'' \tag{3.47}$$

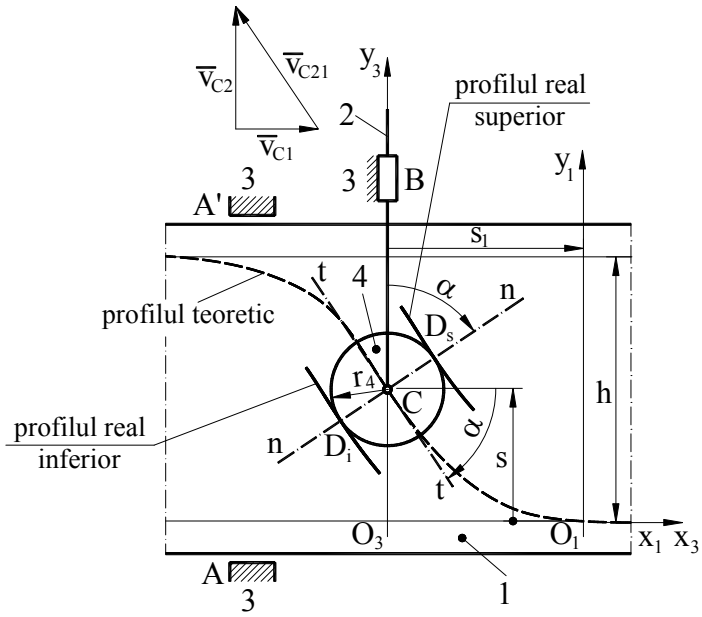


Fig. 3.32

■ Cinematica cuplei superioare

Vectorii $\overline{v}_{C1}$ şi $\overline{v}_{C2}$ au expresiile,

$$\overline{v}_{C1} = \overline{i}_3 v_1 = \overline{i}_3 \omega r_1$$
$$\overline{v}_{C2} = \overline{j}_3 v_{C2} = \overline{j}_3 \omega s',$$

în care $v_1 = \omega \cdot r_1$ este viteza de translaţie a camei plane.

Introducând aceste expresii în ecuaţia (3.6), rezultă

$$\overline{v}_{C21} = -\overline{i}_3 \omega r_1 + \overline{j}_3 \omega s' \tag{3.48}$$

■ Unghiul de presiune

Unghiul de presiune, α, se formează între axa tachetului (O_3y_3) şi normala la profile trasată prin centrul rolei (C) sau între perpendiculara pe tachet (O_3x_3) şi tangenta la profilul teoretic în (C). Deoarece vectorul $\overline{v}_{C21}$ este paralel cu tangenta, se poate scrie

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{(\overline{v}_{C21})_{y_3}}{(\overline{v}_{C21})_{x_3}}$$

$$\mathrm{tg}\alpha = -\frac{s'}{r_1} \tag{3.49}$$

■ Sinteza profilului real

Punctele de tangenţă ale rolei cu profilul real inferior, D_i, şi cu profilul real superior, D_s, au următorii vectori de poziţie

$$\overline{r}_{Di} = \overline{O_3C} + \overline{CD_i}$$

$$\overline{r}_{De} = \overline{O_3C} + \overline{CD_s}$$

Proiectând pe axele sistemului fix (3) se obţine

$$x_{3D} = r_4 \cos\left(\alpha \mp \frac{\pi}{2}\right) = \pm r_4 \sin\alpha$$

$$y_{3D} = s + r_4 \sin\left(\alpha \mp \frac{\pi}{2}\right) = s \mp r_4 \cos\alpha$$

Prin transformarea de coordonate [A.6] din sistemul (3) în sistemul (1) rezultă ecuaţiile parametrice ale profilelor reale

$$\begin{aligned} x_r &= x_{1D} = -\varphi r_1 \pm r_4 \sin\alpha \\ y_r &= y_{1D} = s \mp r_4 \cos\alpha \end{aligned} \tag{3.50}$$

cu semnul de sus pentru profilul real inferior şi cu cel de jos pentru profilul real superior.

- **Raza de curbură**

Se aplică formula (3.8) în care se introduc parametrii determinați cu formulele (3.45), (3.46) şi (3.47). Rezultă raza de curbură a profilului teoretic,

$$R_{ct} = \frac{-(r_1^2 + s'^2)^{3/2}}{r_1 s''} . \qquad (3.51)$$

3.5. ANALIZA CINETOSTATICĂ

3.5.1. Forțele de legătură din cupla superioară

Considerațiile generale privind obiectul analizei cinetostatice şi forțele care intervin în această operație, prezentate la mecanismele cu cuple inferioare (par. 2.2.), rămân valabile şi pentru mecanismele cu came. Un aspect deosebit îl reprezintă prezența cuplei superioare camă - tachet, pentru care se prezintă, în continuare, modul în care acționează forțele de legătură.

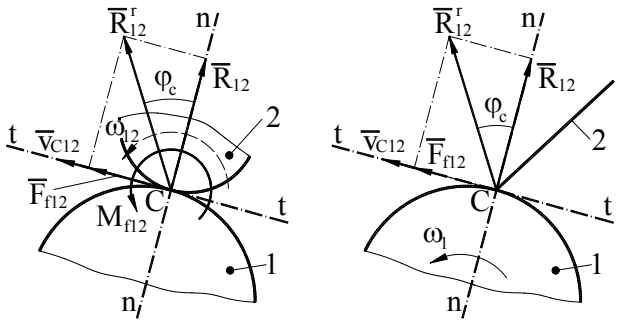
3.5.1.1. Cupla superioară simplă

Se consideră cupla superioară formată din cama 1 şi tachetul 2, având suprafețele active constituite din doi cilindri în contact după o generatoare (Fig.3.33.a). În ipoteza că sistemul de forțe care încarcă mecanismul este amplasat într-un plan paralel cu planul mişcării, torsorul reacțiunilor normale din cupla superioară se reduce la o reacțiune unică $\overline{R}_{12}$ având ca suport normala comună nn în punctul de contact C. Dacă suprafața activă aferentă tachetului se reduce la un punct (tachet cu vârf) (Fig.3.33.b), reacțiunea $\overline{R}_{12}$ are ca suport normala la profilul camei în punctul de contact C.

Sistemul forțelor de frecare se compune dintr-o forță de frecare de alunecare $\overline{F}_{f12}$ şi un moment de frecare de rostogolire M_{f12} care au următoarele caracteristici:

$$\overline{F}_{f12} \begin{cases} |F_{f12}| = \mu_C |R_{12}| \\ // \text{ tt} \\ \overline{F}_{f12} \text{ are acelasi sens cu viteza relativa de alunecare } \overline{v}_{C12} \end{cases}$$

$$M_{f12} \begin{cases} |M_{f12}| = f_C |R_{12}| \\ M_{f12} \text{ are acelasi sens cu viteza unghiulara relativa } \omega_{12} = \omega_1 - \omega_2 \end{cases}$$



a) ***b)***

Fig. 3.33

Parametrul f_C este coeficientul de frecare de rostogolire cu dimensiune de lungime.

În cazul tachetului cu vârf mişcarea relativă este de alunecare pură astfel încât momentul de frecare de rostogolire nu intervine.

Reacțiunea normală $\overline{R}_{12}$ şi forța de frecare de alunecare $\overline{F}_{f12}$ se pot compune, obținând reacțiunea rezultantă $\overline{R}^r_{12} = \overline{R}_{12} + \overline{F}_{f12}$. Reacțiunea $\overline{R}^r_{12}$ este deviată de la normală, în sensul vitezei relative $\overline{v}_{C12}$, cu unghiul $\varphi_C = \text{arctg}\ \mu_C$.

3.5.1.2. Cupla superioară cu rolă

Se consideră lanțul cinematic format din cama 1, rola 4 şi tachetul 2 (Fig.3.34.a). În cupla superioară camă - rolă acționează reacțiunea normală $\overline{R}_{14}$ având ca suport normala comună nn care, evident, trece prin centrul rolei, C. Se scrie ecuația de echilibru de forțe pentru rolă în ipoteza neglijării frecării şi a forțelor de greutate şi de inerție care sunt mici datorită dimensiunilor reduse ale rolei,

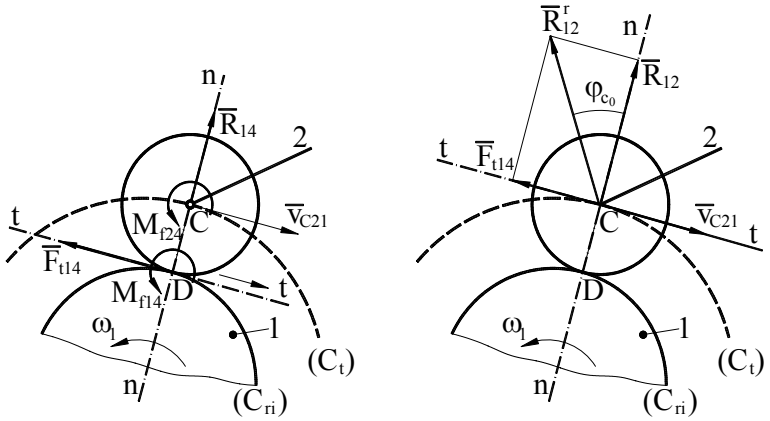
$$\sum \overline{F}(4);\ \overline{R}_{14} + \overline{R}_{24} = 0$$

Din această ecuație se poate deduce

$$\overline{R}_{14} = -\overline{R}_{24} = \overline{R}_{42},$$

ceea ce înseamnă că reacțiunea din cupla superioară se transmite nemodificată asupra tachetului în centrul rolei C.

În felul acesta lanțul cinematic 1 - 4 - 2 se poate înlocui printr-o cuplă superioară formată între profilul teoretic al camei 1 şi tachetul 2 prevăzut cu vârf (Fig.3.34.b) în care acționează reacțiunea $\overline{R}_{12} = \overline{R}_{14} = \overline{R}_{42}$.



a) ***b)***

Fig. 3.34

Dacă se iau în considerare forțele de frecare şi se admite că rola execută o mişcare de rostogolire pură pe suprafața activă a camei, asupra rolei acționează momentul de frecare de rostogolire M_{f14} în cupla superioară D şi momentul de frecare M_{f24} în cupla de rotație C.

Aceste momente au următoarele mărimi

$$|M_{f14}| = f_D |R_{14}| \tag{3.52}$$

$$|M_{f24}| = \mu_C r_C |R_{24}| = r_C |R^r_{24}| \sin\varphi_C \tag{3.53}$$

La nivelul cuplei superioare D acționează, de asemenea, o forță tangențială $\overline{F}_{t14}$ având ca suport tangenta comună la profilul camei şi la cercul rolei. Această forță intervine în echilibrul momentelor, aşa cum rezultă din următoarea ecuație

$$\sum M_C(4) = 0;\ M_C(F_{t14}) + M_{f14} + M_{f24} = 0, \tag{3.54}$$

din care rezultă

$$|F_{t14}| = \frac{1}{r_4}\left(|M_{f14}| + |M_{f24}|\right) \tag{3.55}$$

Condiția de rostogolire a rolei pe profilul camei este

$$|F_{t14}| < |F_{f14}|, \tag{3.56}$$

în care $\overline{F}_{f14}$ este forța de frecare de alunecare din cupla superioară, având valoarea:

$$|F_{f14}| = \mu_D |R_{14}| \tag{3.57}$$

în care $\mu_D = \text{tg}\ \varphi_D$ este coeficientul de frecare de alunecare.

Forța tangențială $\overline{F}_{t14}$ se poate transfera în punctul C, dacă asupra elementului 4 se aplică momentul suplimentar $M_C(F_{t14})$. În aceste condiții momentul rezultant care acționează asupra elementului 4 este

$$M_4 = M_{f14} + M_{f24} + M_C(F_{t14})$$

Având în vedere ecuația (3.54), rezultă $M_4 = 0$, astfel încât, prin transferul forței $\overline{F}_{t14}$ din punctul D în punctul C, se compensează efectul momentelor de frecare. Reacțiunea normală $\overline{R}_{14}$ şi forța tangențială $\overline{F}_{t14}$ se compun rezultând $\overline{R}^r_{14} = \overline{R}_{14} + \overline{F}_{t14}$. Din ecuația de forțe

$$\sum \overline{F}(4) = 0;\ \overline{R}^r_{14} + \overline{R}^r_{24} = 0$$

rezultă $\overline{R}^r_{14} = -\overline{R}^r_{24} = \overline{R}^r_{42}$, care arată că reacțiunea $\overline{R}_{14}$ din cupla camă - rolă se transmite nemodificată asupra tachetului, în punctul C. Ca şi în cazul neglijării frecării, lanțul cinematic 1 - 4 - 2 se poate asimila cu o cuplă superioară formată din profilul teoretic al camei şi un tachet cu vârful în C (Fig.3.34.b) în care acționează reacțiunea $\overline{R}^r_{12} = \overline{R}^r_{14} = \overline{R}^r_{24}$. Reacțiunea $\overline{R}^r_{12}$ este deviată, în raport cu normala nn, în sensul vitezei unghiulare ω_1, cu unghiul φ_{C_0} care se exprimă astfel,

$$\sin\varphi_{C_0} = \frac{|F_{t14}|}{|R^r_{12}|}$$

Forța tangențială F_{t14} se exprimă, la rândul ei, în modul următor

$$\begin{aligned} |F_{t14}| &= \frac{1}{r_4}\left(|M_{f14}| + |M_{f24}|\right) = \frac{1}{r_4}\left(f_D |R_{14}| + r_C |R^r_{24}| \sin\varphi_C\right) = \\ &= \frac{1}{r_4}\left(f_D |R_{12}| + r_C |R^r_{12}| \sin\varphi_C\right) \end{aligned} \tag{3.58}$$

astfel încât se obține ecuația

$$\sin\varphi_{C_0} = \frac{1}{r_4}(f_D \cos\varphi_{C_0} + r_C \sin\varphi_C)$$

sau

$$r_4 \sin\varphi_{C_0} - f_D \cos\varphi_{C_0} - r_C \sin\varphi_C = 0 \tag{3.59}$$

Această ecuație se rezolvă, analitic sau numeric, obținând unghiul φ_{C_0}. Deoarece φ_C şi φ_{C_0} au valori mici (sub 5°), sinusurile se pot aproxima cu unghiurile, rezultând următoarea formulă

$$\varphi_{C_0} \cong \frac{f_D}{r_4} + \frac{r_C \varphi_C}{r_4} \tag{3.60}$$

Având în vedere relația (3.58) condiția de rostogolire (3.56) se poate scrie

$$\frac{1}{r_4}(f_D \left| R_{12} \right| + r_C \left| R_{12}^r \right| \sin\varphi_C) < \text{tg}\ \varphi_D \left| R_{12} \right|$$

sau

$$\frac{1}{r_4}\left(f_D + r_C \frac{\sin\varphi_C}{\cos\varphi_{C_0}} \right) < \text{tg}\ \varphi_D \tag{3.61}$$

Prin aproximarea funcțiilor sinus şi tangentă cu unghiurile se obține o relație mai simplă

$$\frac{f_D}{r_4} + \frac{r_C}{r_4} \cdot \varphi_C < \varphi_D \tag{3.62}$$

Se observă că membrul din stânga este egal cu φ_{C_0} (3.60) ceea ce conduce la condiția

$$\varphi_{C_0} < \varphi_D\,. \tag{3.63}$$

3.5.2. Mecanismul plan cu tachet de translație şi rolă

3.5.2.1. Analiza cinetostatică

Se consideră un mecanism cu cuplă superioară unilaterală (Fig.3.35) pentru care se efectuează analiza cinetostatică, în prezența frecării, pentru faza de ridicare, în care tachetul este încărcat cu forța rezistentă $\overline{F}_2$. În procesul de calcul se utilizează un sistem de coordonate fix, Axyz, identic cu sistemul $Ax_3y_3z_3$ folosit în par. 3.4.

Reacțiunea din cupla superioară $\overline{R}_{12}^r$ este deviată de la normala nn cu unghiul φ_{C_0} (3.60) în sensul vitezei unghiulare ω, iar proiecțiile acesteia pe axele de coordonate au expresiile:

$$R^r_{12x} = R^r_{12}\cos\left(\alpha \pm \varphi_{C_0} + \frac{\pi}{2}\right) = -R^r_{12}\sin(\alpha \pm \varphi_{C_0})$$
$$R^r_{12y} = R^r_{12}\sin\left(\alpha \pm \varphi_{C_0} + \frac{\pi}{2}\right) = R^r_{12}\cos(\alpha \pm \varphi_{C_0}) \qquad (3.64)$$

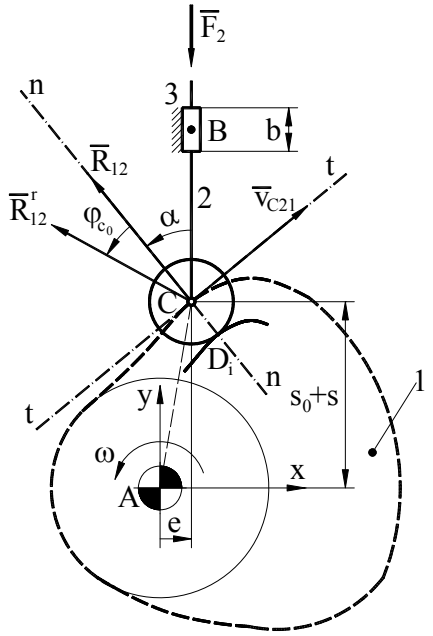


Fig. 3.35

Se scriu ecuațiile de echilibru pentru elementul 2,

$$\sum \bar{M}_B(2) = 0;\ \overline{BC} \times \bar{R}^r_{12} + \bar{M}_{r32} = 0$$
$$\sum \bar{F}(2) = 0;\ \bar{F}_2 + \bar{R}^r_{12} + \bar{R}_{32} + \bar{F}_{f32} = 0,$$

în care B este centrul zonei de contact a cuplei de translație.

Ecuația de momente se transpune scalar, iar ecuația de forțe se proiectează pe axele de coordonate

$$-\bar{j}(y_B - (s_0 + s)) \times R^r_{12}(-\bar{i}\sin(\alpha \pm \varphi_{C_0}) + \bar{j}\cos(\alpha \pm \varphi_{C_0}) + \bar{k}M_{r32} = 0$$
$$-\bar{k}R^r_{12}(y_B - (s_0 + s))\sin(\alpha \pm \varphi_{C_0}) + \bar{k}M_{r32} = 0$$

$$\begin{cases} -R_{12}^{r}(y_B-(s_0+s))\sin(\alpha\pm\varphi_{C_0})+M_{r32}=0 \\ -R_{12}^{r}\sin(\alpha\pm\varphi_{C_0})+R_{32}=0 \\ -|F_2|+R_{12}^{r}\cos(\alpha\pm\varphi_{C_0})+F_{f32}=0 \end{cases} \tag{3.65}$$

Forța de frecare $\overline{F}_{f32}$ are expresii diferite în funcție de cazul în care se încadrează cupla de translație B (par. 2.2.1.4.). Această încadrare depinde de raportul $k_B=\frac{|M_{r32}|}{|R_{32}|}$ care se poate calcula din ecuațiile sistemului (3.65), rezultând

$$k_B=\frac{|M_{r32}|}{|R_{32}|}=|y_B-(s_0+s)|.$$

• Dacă $k_B<\frac{b}{2}$, forța de frecare F_{f32} are expresia

$$F_{f32}=-\mu_B|R_{32}| \tag{3.66}$$

iar R_{12}^{r} se determină din (3.65),

$$R_{12}^{r}=\frac{|F_2|}{\cos(\alpha\pm\varphi_{C_0})\left(1-\mu_B\mathrm{tg}|\alpha\pm\varphi_{C_0}|\right)} \tag{3.67}$$

• Dacă $k_B>\frac{b}{2}$, forța de frecare F_{f32} şi reacțiunea rezultantă R_{12}^{r} sunt

$$F_{f32}=-\frac{2\mu_B}{b}|M_{r32}| \tag{3.68}$$

$$R_{12}^{r}=\frac{|F_2|}{\cos(\alpha\pm\varphi_{C_0})\left(1-\frac{2\mu_B}{b}|y_B-(s_0+s)|\cdot\mathrm{tg}|\alpha\pm\varphi_{C_0}|\right)} \tag{3.69}$$

Necunoscutele R_{32} şi M_{r32} se calculează, de asemenea, din sistemul (3.65):

$$R_{32}=R_{12}^{r}\sin(\alpha\pm\varphi_{C_0}) \tag{3.70}$$

$$M_{r32}=R_{12}^{r}(y_B-(s_0+s))\sin(\alpha\pm\varphi_{C_0}) \tag{3.71}$$

Se scriu ecuațiile de echilibru pentru elementul 1,

$$\sum\overline{M}_A(1)=0;\ \overline{AC}\times\overline{R}_{12}^{r}+\overline{M}_e+\overline{M}_{f12}=0$$

$$\sum\overline{F}(1)=0;\ \overline{R}_{31}^{r}+\overline{R}_{21}^{r}=0$$

Din ecuația de forțe rezultă

$$\bar{R}_{31}^{r} = -\bar{R}_{21}^{r} = \bar{R}_{12}^{r} \tag{3.72}$$

Ecuația de momente se transpune scalar

$$(\bar{i}e + \bar{j}(s_0 + s)) \times R_{12}^{r}(\bar{i}\sin(\alpha \pm \varphi_C) - \bar{j}\cos(\alpha \pm \varphi_C)) + \bar{k}M_e \mp \bar{k}R_{31}r_A \sin\varphi_A = 0$$

$$-\bar{k}R_{12}^{r}(e\cos(\alpha \pm \varphi_{C_0}) + (s_0 + s)\sin(\alpha \pm \varphi_{C_0})) + \bar{k}M_e \mp \bar{k}R_{12}^{r}r_A \sin\varphi_A = 0$$

$$-R_{12}^{r}(e\cos(\alpha \pm \varphi_{C_0}) + (s_0 + s)\sin(\alpha \pm \varphi_{C_0})) + M_e \mp R_{12}^{r}r_A \sin\varphi_A = 0$$

Din această ecuație se determină momentul de echilibrare M_e,

$$M_e = R_{12}^{r}(e\cos(\alpha \pm \varphi_{C_0}) + (s_0 + s)\sin(\alpha \pm \varphi_{C_0}) \pm r_A \sin\varphi_A) \tag{3.73}$$

Relațiile de calcul ale reacțiunilor se pot particulariza pentru cazul în care se nglijează forțele de frecare făcând $\varphi_{C_0} = 0$, $\mu_B = 0$ şi $\varphi_A = 0$,

$$R_{12}^{r} = R_{31}^{r} = \frac{|F_2|}{\cos\alpha} \tag{3.74}$$

$$R_{32} = |F_2|\,\mathrm{tg}\alpha \tag{3.75}$$

$$M_{r32} = |F_2|(y_B - (s_0 + s)) \cdot \mathrm{tg}\alpha \tag{3.76}$$

$$M_e = |F_2|(e + (s_0 + s) \cdot \mathrm{tg}\alpha) \tag{3.77}$$

Uneori, analiza cinetostatică se efectuează luând în considerare numai freacarea din cupla de translație B. Desigur, în acest caz, relațiile se particularizează numai cu $\varphi_{C_0} = 0$ şi $\varphi_A = 0$.

În toate relațiile semnul (+) intervine când viteza unghiulară a camei este pozitivă, iar semnul (-) când este negativă.

3.5.2.2. Randamentul, autoblocarea

Pentru calculul randamentului mecanic instantaneu se utilizează relația

$$\eta = -\frac{P_u}{P_m} = -\frac{-|F_2|s'}{M_e}. \tag{3.78}$$

Momentul de echilibrare M_e se înlocuieşte cu expresia sa (3.73) obținând

$$\eta = \frac{|F_2|s'}{R_{12}^{r}(e\cos(\alpha \pm \varphi_{C_0}) + (s_0 + s)\sin(\alpha \pm \varphi_{C_0}) \pm r_A \sin\varphi_A)}. \tag{3.79}$$

În această formulă R_{12}^{r} se înlocuieşte cu expresia (3.67) sau (3.69) în funcție de cazul în care se încadrează cupla B. Astfel, dacă $k_B < \frac{b}{2}$ se obține următoarea formulă pentru η

$$\eta = \frac{(1-\mu_B \mathrm{tg}|\alpha \pm \varphi_C|)s'}{e + (s_0 + s)\mathrm{tg}(\alpha \pm \varphi_C) \pm r_A \frac{\sin\varphi_A}{\cos(\alpha \pm \varphi_C)}} \tag{3.80}$$

Condiția de evitare a autoblocării ($\eta > 0$) aplicată expresiei (3.80) conduce la

$$1 - \mu_B \mathrm{tg}|\alpha \pm \varphi_C| > 0\,, \tag{3.81}$$

deoarece semnul randamentului este determinat numai de factorul $1 - \mu_B \mathrm{tg}|\alpha \pm \varphi_C|$. Soluția practică a inegalității (3.81), în raport cu necunoscuta α este

$$|\alpha| < \mathrm{arctg}\frac{1}{\mu_B} - \varphi_C = \alpha_{bl} \tag{3.82}$$

în care α_{bl} este valoarea de blocare a unghiului de presiune.

Dacă $k_B > 1$,

$$\eta = \frac{\left(1 - \frac{2\mu_B}{b}|y_B - (s_0 + s)| \cdot \mathrm{tg}|\alpha \pm \varphi_C|\right)s'}{e + (s_0 + s)\mathrm{tg}(\alpha \pm \varphi_C) \pm r_A \frac{\sin\varphi_A}{\cos(\alpha \pm \varphi_C)}} \tag{3.83}$$

Condiția de evitare a autoblocării este

$$1 - \frac{2\mu_B}{b}|y_B - (s_0 + s)| \cdot \mathrm{tg}|\alpha \pm \varphi_C| > 0$$

sau

$$|\alpha| < \mathrm{arctg}\frac{1}{\frac{2\mu_B}{b}|y_B - (s_0 + s)|} - \varphi_C = \alpha_{bl} \tag{3.84}$$

Randamentul global, pentru faza de ridicare, se determină cu formula

$$\eta_g = \frac{\int_0^{\varphi_r} P_u d\varphi}{\int_0^{\varphi_r} \frac{P_u}{\eta} d\varphi} = \frac{\int_0^{\varphi_r} F_2 s' d\varphi}{\int_0^{\varphi_r} \frac{F_2 s' d\varphi}{\eta}}\,. \tag{3.85}$$

În ipoteza $F_2 = -|F_2| = \text{ct.}$ relația devine

$$\eta_g = \frac{\int_0^{\varphi_r} s'd\varphi}{\int_0^{\varphi_r} \frac{s'd\varphi}{\eta}}. \tag{3.86}$$

Observații

• Autoblocarea este determinată de valoarea absolută a unghiului de presiune, aşa cum rezultă din condițiile (3.82) şi (3.84). Chiar dacă se respectă aceste condiții, dar unghiul de presiune este apropiat de α_{bl}, funcționarea este defavorabilă, cu valori mari ale reacțiunilor şi cu randament redus. De aceea, în locul condițiilor (3.82) şi (3.84) se utilizează condiția

$$|\alpha| \le \alpha_a < \alpha_{bl} \tag{3.87}$$

în care α_a este unghiul de presiune admisibil, având următoarele valori recomandate: $\alpha_a = 12^0 - 15^0$ pentru un regim de funcționare greu şi $\alpha_a = 25^0 - 30^0$ pentru un regim uşor. Pentru faza de coborâre, la mecanismele cu cuplă superioară unilaterală, $\alpha_a = 75^0 - 80^0$.

• Aşa cum am arătat şi în par. 2.2.1.4., dintre cele două cazuri care pot interveni în legătură cu calculul forței de frecare din cupla de translație, **cazul (1)** este favorabil. Întradevăr, formulele anterioare arată că, în acest caz, reacțiunile sunt mai reduse, iar randamentul şi unghiul de presiune de blocare sunt mai mari. Condiția pentru **cazul (1)**

$$k_B = |y_B - (s_0 + s)| < \frac{b}{2},$$

extinsă pentru toată faza de ridicare se exprimă astfel

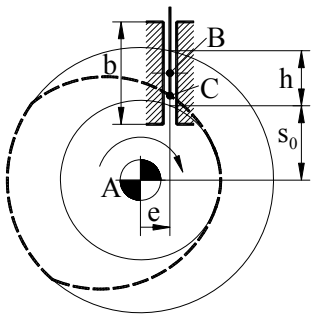


Fig. 3.36

$$\begin{cases} b \ge h \\ s_0 + h - \frac{b}{2} \le y_B \le s_0 + \frac{b}{2} \end{cases} \quad ($$

Condițiile (3.88) arată că punctul C trebuie să se deplaseze numai în interiorul zonei de contact a cuplei de translație B (Fig.3.36).

3.5.3. Mecanismul plan cu tachet de rotație şi rolă

3.5.3.1. Analiza cinetostatică

Se consideră mecanismul cu cuplă superioară unilaterală din Fig.3.37. Se efectuează analiza cinetostatică, în prezența frecării, pentru faza de ridicare în ipoteza că asupra tachetului acționează momentul rezistent M_2.

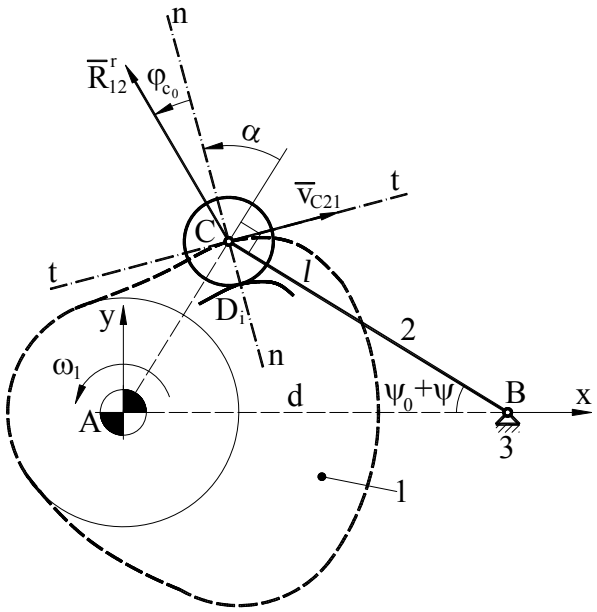


Fig. 3.37

Reacțiunea din cupla superioară $\overline{R}_{12}^{r}$ se proiectează pe axele sistemului de coordonate Axyz,

$$R_{12x}^{r} = R_{12}^{r}\cos\left(\alpha \pm \varphi_{C_0} - (\psi_0 + \psi) + \frac{\pi}{2}\right) = -R_{12}^{r}\sin(\alpha \pm \varphi_{C_0} - (\psi_0 + \psi))$$
$$R_{12y}^{r} = R_{12}^{r}\sin\left(\alpha \pm \varphi_{C_0} - (\psi_0 + \psi) + \frac{\pi}{2}\right) = R_{12}^{r}\cos(\alpha \pm \varphi_{C_0} - (\psi_0 + \psi)) \quad (3.89)$$

Se scriu ecuațiile de echilibru pentru elementul 2,

$$\sum \overline{F}(2) = 0;\ \overline{R}_{12}^{r} + \overline{R}_{32}^{r} = 0$$
$$\sum \overline{M}_B(2) = 0;\ \overline{BC} \times \overline{R}_{12}^{r} + \overline{M}_2 + \overline{M}_{f32} = 0.$$

Din ecuația forțelor rezultă

$$\bar{R}_{32}^{r} = -\bar{R}_{12}^{r} = \bar{R}_{21}^{r}, \tag{3.90}$$

iar din ecuația de momente, după dezvoltări corespunzătoare, se obține

$$R_{12}^{r} = \frac{|M_2|}{\ell\cos(\alpha \pm \varphi_{C_0}) - r_B \sin\varphi_B} \tag{3.91}$$

Se scriu ecuațiile de echilibru pentru elementul 1,

$$\sum \bar{F}(1) = 0;\ \bar{R}_{21}^{r} + \bar{R}_{31}^{r} = 0$$

$$\sum \bar{M}_A(1) = 0;\ \overline{AC} \times \bar{R}_{12} + \bar{M}_e + \bar{M}_{f12} = 0$$

Din ecuația de forțe se obține

$$\bar{R}_{31}^{r} = -\bar{R}_{21}^{r} = \bar{R}_{12}^{r} \tag{3.92}$$

iar din ecuația de momente rezultă

$$M_e = R_{12}^{r}(d\cos(\alpha \pm \varphi_{C_0} - (\psi_0 + \psi)) - \ell\cos(\alpha \pm \varphi_{C_0}) \pm r_A \sin\varphi_A) \tag{3.93}$$

În toate formulele semnul (+) se aplică dacă viteza unghiulară a camei este pozitivă (sens antiorar), iar (-) în caz contrar.

În ipoteza neglijării forțelor de frecare ($\varphi_{C_0} = 0,\ \varphi_A = 0$ şi $\varphi_B = 0$) se obțin relațiile:

$$R_{12}^{r} = \frac{|M_2|}{\ell\cos\alpha} \tag{3.94}$$

$$M_e = \frac{|M_2|(d\cos(\alpha - (\psi_0 + \psi)) - \ell\cos\alpha)}{l\cos\alpha} \tag{3.95}$$

3.5.3.2. Randamentul, autoblocarea

Randamentul se determină aplicând formula

$$\eta = -\frac{P_u}{P_m} = -\frac{-|M_2|\omega_2}{M_e\omega_1}$$

Având în vedere că $\psi' = -\frac{\omega_2}{\omega_1}$ (3.2), se obține

$$\eta = \frac{|M_2|\psi'}{M_e}. \tag{3.96}$$

Cunoscând expresiile pentru M_e (3.93) şi R_{12}^r (3.91) se ajunge la următoarea relaţie de calcul pentru randamentul instantaneu

$$\eta = \frac{(\ell\cos(\alpha \pm \varphi_{C_0}) - r_B \sin\varphi_B)\psi'}{d\cos(\alpha \pm \varphi_{C_0} - (\psi_0 + \psi)) - \ell\cos(\alpha \pm \varphi_C) \pm r_A \sin\varphi_A}. \tag{3.97}$$

Randamentul global se calculează cu o formulă similară cu o formulă similară cu (3.86),

$$\eta_g = \frac{\int_0^{\varphi_r} \psi' d\varphi}{\int_0^{\varphi_r} \frac{\psi' d\varphi}{\eta}}. \tag{3.98}$$

Condiţia de evitare a autoblocării ($\eta > 0$) se formulează astfel

$$\ell\cos(\alpha \pm \varphi_C) - r_B \sin\varphi_B > 0,$$

care conduce la

$$|\alpha| < \arccos\left(\frac{r_B}{\ell}\sin\varphi_B\right) - \varphi_C \tag{3.99}$$

Discuţia privitoare la unghiul de presiune, dezvoltată la mecanismul precedent, împreună cu condiţia (3.87) sunt aplicabile şi pentru acest mecanism. Pentru unghiul de presiune admisibil se recomandă următoarele valori: $\alpha_a = 30^0 - 45^0$ pentru un regim de funcţionare greu şi $\alpha_a = 45^0 - 60^0$ pentru un regim uşor.

3.5.4. Mecanismul plan cu tachet de translaţie şi talpă

3.5.4.1. Analiza cinetostatică

La fel ca la mecanismele studiate anterior, se efectuează analiza cinetostatică, în prezenţa frecării, pentru o cursă de ridicare, luând în considerare forţa rezistentă $\overline{F}_2$ (Fig.3.38).

Reacţiunea $\overline{R}_{12}^r$ este deviată de la normala nn cu unghiul φ_C în sensul indicat de viteza unghiulară a camei, ω, având proiecţiile pe axele de coordonate,

$$R_{12x}^{r} = R_{12}^{r}\cos\left(\frac{\pi}{2} \pm \varphi_C\right) = \mp R_{12}^{r}\sin\varphi_C$$
$$R_{12y}^{r} = R_{12}^{r}\sin\left(\frac{\pi}{2} \pm \varphi_C\right) = R_{12}^{r}\cos\varphi_C \qquad (3.100)$$

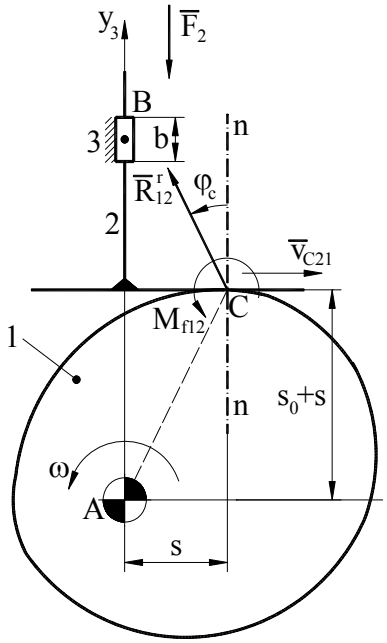


Fig. 3.38

Se scriu ecuațiile de echilibru pentru elementul 2,

$$\begin{cases} \sum \overline{F}(2) = 0;\ \overline{F}_2 + \overline{R}_{12}^{r} + \overline{R}_{32} + \overline{R}_{f32} = 0 \\ \sum \overline{M}_B(2) = 0;\ \overline{BC} \times \overline{R}_{12}^{r} + \overline{M}_{f12} + \overline{M}_{r32} = 0 \end{cases}$$

care se prelucrează în modul cunoscut de la mecanismele anterioare

$$\begin{cases} \mp R_{12}^{r}\sin\varphi_C + R_{32} = 0 \\ -|F_2| + R_{12}^{r}\cos\varphi_C + F_{f32} = 0 \\ R_{12}^{r}((e + f_C)\cos\varphi_C \mp (y_B - (s_0 + s))\sin\varphi_C) + M_{r32} = 0 \end{cases} \qquad (3.101)$$

Pentru a determina expresia forței de frecare $\overline{F}_{f32}$ din cupla B, se calculează raportul k_B din sistemul (3.101)

$$k_B = \frac{|M_{r32}|}{|R_{32}|} = \left| \frac{s' + f_C}{tg\varphi_C} \mp (y_B - (s_0 + s)) \right| . \qquad (3.102)$$

Dacă $k_B \le \frac{b}{2}$, forța de frecare are expresia

$$F_{f32} = -\mu_B |R_{32}|$$

care se introduce în sistemul (3.101) şi rezultă

$$R_{12}^r = \frac{|F_2|}{\cos\varphi_C - \mu_B \sin\varphi_C} . \qquad (3.103)$$

Dacă $k_B > \frac{b}{2}$, forța de frecare se scrie

$$F_{f32} = -\frac{2\mu_B}{b} |M_{r32}| ,$$

iar din sistemul (3.101) se obține

$$R_{12}^r = \frac{|F_2|}{\cos\varphi_C - \frac{2\mu_B}{b} |(s' + f_C)\cos\varphi_C \mp (y_B - (s_0 + s))\sin\varphi_C|} . \qquad (3.104)$$

Reacțiunile R_{32} şi M_{r32} rezultă, de asemenea, din sistemul (3.101)

$$R_{32} = R_{12}^r \sin\varphi_C \qquad (3.105)$$

$$M_{r32} = -R_{12}^r ((s' + f_C)\cos\varphi_C \mp (y_B (s_0 + s))\sin\varphi_C) . \qquad (3.106)$$

Se scriu ecuațiile de echilibru pentru elementul 1

$$\begin{cases} \sum \overline{F}(1) = 0; \quad \overline{R}_{31}^r + \overline{R}_{21}^r = 0 \\ \sum \overline{M}_A(1) = 0; \ \overline{AC} \times \overline{R}_{21}^r + \overline{M}_e + \overline{M}_{f31} + \overline{M}_{f21} = 0. \end{cases}$$

Din ecuația de forțe se obține

$$\overline{R}_{31}^r = -\overline{R}_{21}^r = \overline{R}_{12}^r , \qquad (3.107)$$

iar din ecuația de momente se calculează momentul de echilibrare

$$M_e = R_{12}^r ((s' + f_C)\cos\varphi_C \pm (s_0 + s)\sin\varphi_C \pm r_A \sin\varphi_A) . \qquad (3.108)$$

În toate formulele semnul de sus se utilizează când viteza unghiulară a camei este pozitivă, iar cel de jos când este negativă.

Uneori, analiza cinetostatică se efectuează ținând seama numai de frecarea din cupla de translație. În această ipoteză $\varphi_C = f_C = \varphi_A = 0$, iar $k_B \to \infty$ ceea ce înseamnă că R_{12}^r se calculează numai cu formula (3.104) care se particularizează astfel

$$R_{12}^{r} = \frac{|F_2|}{1 - \frac{2\mu_B |s'|}{b}} . \tag{3.109}$$

În funcție de R_{12}^{r} se obțin şi celelalte reacțiuni

$$R_{32} = 0 \tag{3.110}$$

$$M_{r32} = -R_{12}^{r} \cdot s' \tag{3.111}$$

$$M_e = R_{12}^{r} \cdot s' . \tag{3.112}$$

3.5.4.2. Randamentul, autoblocarea

Calculul randamentului se face cu formula (3.78). Dacă $k_B \le \frac{b}{2}$,

$$\eta = \frac{(1 - \mu_B tg\varphi_C)s'}{(s' + f_C) \pm (s_0 + s)tg\varphi_C \pm r_A \frac{\sin\varphi_A}{\cos\varphi_C}} \tag{3.113}$$

iar dacă $k_B > \frac{b}{2}$,

$$\eta = \frac{\left(1 - \frac{2\mu_B}{b}\left|(s' + f_C)\cos\varphi_C \mp (y_B - (s_0 + s))\sin\varphi_C\right|\right)}{(s' + f_C) \pm (s_0 + s)tg\varphi_C \pm r_A \frac{\sin\varphi_A}{\cos\varphi_C}} . \tag{3.114}$$

În cazul $k_B \le \frac{b}{2}$, condiția de evitare a autoblocării ($\eta < 0$) este

$$1 - \mu_B tg\varphi_C > 0$$

$$\mu_B tg\varphi_C < 1 . \tag{3.115}$$

Dacă $k_B > \frac{b}{2}$, condiția de evitare a autoblocării se formulează astfel

$$1 - \frac{2\mu_B}{b}\left|(s' + f_C) - (y_B - (s_0 + s))tg\varphi_C\right| > 0$$

$$\frac{2\mu_B}{b}\left|(s' + f_C) - (y_B - (s_0 + s))tg\varphi_C\right| < 1 . \tag{3.116}$$

Pentru cazul în care se consideră numai frecarea din cupla de translație, condiția (3.116) devine

$$\frac{2\mu_B s'}{b} < 1. \qquad (3.117)$$

Observaţii

• Mecanismul funcţionează, de regulă, cu $k_B > \frac{b}{2}$ deoarece pentru a avea $k_B \le \frac{b}{2}$, în toate fazele de funcţionare, ar trebui să se adopte valori foarte mari şi nepractice pentru parametrul b. În cazul în care se consideră numai frecarea din cupla de translaţie, $k_B \to \infty$ şi, deci, întotdeauna $k_B > \frac{b}{2}$.

• Condiţia de evitare a autoblocării (3.115) este îndeplinită întotdeauna deoarece $\mu_B < 1$ şi $tg\varphi_C < 1$. Expresiile care intervin în condiţiile (3.116) şi (3.117) sunt foarte apropiate având în vedere valorile practice ale coeficienţilor de frecare. Ca urmare condiţia (3.116) se poate aproxima foarte bine prin condiţia (3.117) din care rezultă domeniul în care se poate adopta parametrul b,

$$b > 2\mu_B \cdot s'.$$

Această condiţie, extinsă pentru întreaga fază de funcţionare, are forma

$$b > 2\mu_B \cdot s'_{max}, \qquad (3.118)$$

în care s'_{max} este valoarea maximă a funcţiei de transmitere s' corespunzătoare legii de mişcare utilizate. Trebuie menţionat că parametrul b nu trebuie adoptat în apropierea valorii limită (3.118) deoareace aceasta conduce la suprasolicitarea mecanismului.

3.6. ANALIZA PRECIZIEI

Evaluarea preciziei de funcţionare a unui mecanism cu camă constă în determinarea abaterii de poziţie a tachetului în funcţie de abaterile elementare ale mecanismului. O abatere elementară specifică mecanismelor cu came este abaterea de profil Δr, care afectează razele profilului real. Celelalte abateri elementare se referă la parametri constructivi constanţi.

Pentru exemplificare se tratează cazul mecanismului plan cu tachet de translaţie şi rolă (Fig.3.29). Abaterea de poziţie a tachetului Δs, asociată parametrului s, se calculează cu formula (2.41) adoptată mecanismului considerat,

$$\Delta s = \frac{\partial s}{\partial r_r}\Delta r_r + \frac{\partial s}{\partial e}\Delta e + \frac{\partial s}{\partial r_4}\Delta r_4 \qquad (3.119)$$

în care Δr_r reprezintă abaterea razei profilului real, Δe - abaterea excentricității, iar Δr_4 - abaterea razei rolei. Derivatele parțiale $\frac{\partial s}{\partial r_r}$, $\frac{\partial s}{\partial e}$ şi $\frac{\partial s}{\partial r_4}$ sunt funcțiile de transmitere ale abaterilor pentru aceiaşi parametri, esențiale pentru calculul abaterii funcționale Δs. Vom prezenta modul de determinare a acestor funcții. Folosind notațiile din par. 3.4.2. şi din Fig.3.29, raza reală r_r se poate scrie

$$r_r = AD_i = \sqrt{x_{3D_i}^2 + y_{3D_i}^2} \ ,$$

în care x_{3D_i} şi y_{3D_i} sunt coordonatele punctului D_i în raport cu sistemul fix Ax_3y_3. Pentru simplificarea relațiilor se notează $x_{3D_i} = x$ şi $y_{3D_i} = y$ astfel încât formula devine

$$r_r = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{3.120}$$

iar derivata $\frac{\partial s}{\partial r_r}$ se calculează astfel

$$\frac{\partial s}{\partial r_r} = \frac{\partial s}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial r_r} = s' \frac{1}{\frac{\partial r_r}{\partial \varphi}} = \frac{s'\sqrt{x^2 + y^2}}{xx' + yy'} \ . \tag{3.121}$$

Coordonatele x şi y se determină cu relațiile (3.23), care,pentru un mecanism cu cuplă superioară unilaterală, au forma

$$\begin{aligned} x &= e + r_4 \sin\alpha \\ y &= (s_0 + s) - r_4 \cos\alpha \end{aligned} \tag{3.122}$$

iar unghiul de presiune α, care intervine în aceste relații are expresia

$$\alpha = \mathrm{arctg}\left(\frac{s' - e}{s_0 + s}\right). \tag{3.21}$$

Prin derivarea expresiilor (3.122) în raport cu φ se obțin x' şi y',

$$\begin{aligned} x' &= r_4 \alpha' \cos\alpha \\ y' &= s' + r_4 \alpha' \sin\alpha \end{aligned} \tag{3.123}$$

în care α' este derivata unghiului α în raport cu φ

$$\alpha' = \frac{1}{1 + \mathrm{tg}^2\alpha} \cdot \frac{s''(s_0 + s) - s'(s' - e)}{(s_0 + s)^2} \ . \tag{3.124}$$

În felul acesta rezultă $\frac{\partial s}{\partial r_r}(\varphi)$ ca o funcție de parametrul φ, care intervine în formule prin intermediul legii de mişcare caracterizată prin funcțiile $s(\varphi)$, $s'(\varphi)$ şi $s''(\varphi)$.

Funcția de transmitere $\frac{\partial s}{\partial e}$ se calculează cu ajutorul funcției $\frac{\partial s}{\partial r_r}$ determinată anterior

$$\frac{\partial s}{\partial e} = \frac{\partial s}{\partial r_r} \cdot \frac{\partial r_r}{\partial e}, \tag{3.125}$$

iar $\frac{\partial r_r}{\partial e}$ se obține prin derivarea expresiei (3.120),

$$\frac{\partial r_r}{\partial e} = \frac{x\frac{\partial x}{\partial e} + y\frac{\partial y}{\partial e}}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \tag{3.126}$$

în care $\frac{\partial x}{\partial e}$ şi $\frac{\partial y}{\partial e}$ se introduc cu expresiile

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial e} &= 1 + r_4 \frac{\partial \alpha}{\partial e}\cos\alpha \\ \frac{\partial y}{\partial e} &= r_4 \frac{\partial \alpha}{\partial e}\sin\alpha. \end{aligned} \tag{3.127}$$

Derivata unghiului de presiune $\frac{\partial \alpha}{\partial e}$ este

$$\frac{\partial \alpha}{\partial e} = \frac{1}{1 + tg^2\alpha}\left(-\frac{1}{s_0 + s}\right). \tag{3.128}$$

În mod similar, funcția $\frac{\partial s}{\partial r_4}$ se determină cu ajutorul relației

$$\frac{\partial s}{\partial r_4} = \frac{\partial s}{\partial r_r} \cdot \frac{\partial r_r}{\partial r_4}, \tag{3.129}$$

în care se introduce $\frac{\partial r_r}{\partial r_4}$ calculat prin derivarea expresiei (3.120)

$$\frac{\partial r_r}{\partial r_4} = \frac{x\frac{\partial x}{\partial r_4} + y\frac{\partial y}{\partial r_4}}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \tag{3.130}$$

La rândul lor, funcțiile $\frac{\partial x}{\partial r_4}$ şi $\frac{\partial y}{\partial r_4}$ rezultă prin derivarea expresiilor (3.122)

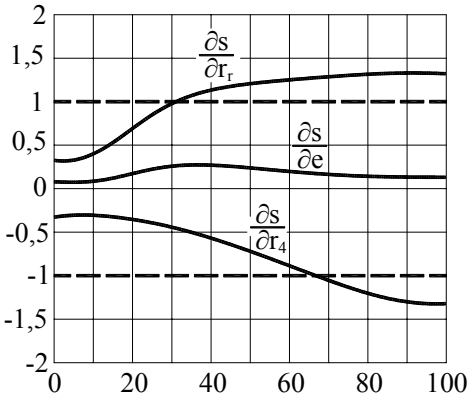


Fig. 3.39

$s_0 = 20$ [mm]; h=30 [mm];

e=+5 [mm]; $r_4 = 10$ [mm];

$$\frac{\partial x}{\partial r_4} = \sin\alpha$$
$$\frac{\partial y}{\partial r_4} = -\cos\alpha \qquad (3.131)$$

Pentru exemplificare, în Fig.3.39 sunt reprezentate diagramele $\frac{\partial s}{\partial r_r}(\varphi)$, $\frac{\partial s}{\partial e}(\varphi)$ şi $\frac{\partial s}{\partial r_4}(\varphi)$, determinate prin procedeul arătat, pentru un caz concret.

Pentru alte tipuri de mecanisme cu came tratarea este asemănătoare. Astfel, în cazul mecanismului plan cu tachet de rotație şi rolă, analiza preciziei urmăreşte determinarea abaterii de poziție a tachetului $\Delta\psi$, care conform formulei (2.41) are expresia

$$\Delta\psi = \frac{\partial\psi}{\partial r_r}\Delta r_r + \frac{\partial\psi}{\partial d}\Delta d + \frac{\partial\psi}{\partial l}\Delta l + \frac{\partial\psi}{\partial r_4}\Delta r_4, \qquad (3.132)$$

în care ψ, d, l şi r_4 au semnificațiile cunoscute (par. 3.4.3.). Funcția $\frac{\partial\psi}{\partial r_r}$ se determină similar cu funcția $\frac{\partial s}{\partial r_r}$ de la mecanismul tratat anterior, pornind de la expresiile coordonatelor x_{3D_i}, y_{3D_i} şi a unghiului de presiune α (3.33) specifice acestui mecanism. Funcțiile $\frac{\partial\psi}{\partial d}$, $\frac{\partial\psi}{\partial l}$ şi $\frac{\partial\psi}{\partial r_4}$ se calculează cu ajutorul funcției $\frac{\partial\psi}{\partial r_r}$ aşa cum s-a procedat pentru funcțiile $\frac{\partial s}{\partial e}$ şi $\frac{\partial s}{\partial r_4}$ la mecanismul precedent.

3.7. SINTEZA DIMENSIONALĂ

3.7.1. Formularea generală a problemei

Obiectivul sintezei dimensionale este determinarea parametrilor geometrici de bază ai mecanismului. Valorile acestor parametri au consecinţe atât asupra funcţionării mecanismului, cât şi asupra formei şi dimensiunilor profilului. Adoptarea lor reprezintă rezultatul rezolvării unei probleme de optimizare. Dacă parametrii geometrici de bază se notează $p_1, p_2 \dots p_k$, formularea problemei este următoarea

$$F_0(p_1, p_2 \dots p_k) \to \min \tag{3.133}$$

$$f_i(p_1, p_2 \dots p_k) \le 0 \quad (i=1, n). \tag{3.134}$$

Funcţia obiectiv F_0 se poate alege în diverse moduri, după criteriul de optimizare adoptat: gabaritul camei legat de consumul de material, randamentul mecanismului, momentul de echilibrare maxim, etc. Dacă se ia în considerare criteriul minimizării gabaritului, funcţia obiectiv se poate adopta, la mecanismele plane, ca fiind egală cu raza maximă a profilului real $F_0 = r_{r\,max}(p_1, p_2 \dots p_k)$. În cazul mecanismelor spaţiale, funcţia obiectiv este raza medie a cilindrului camei, r_1, care constituie unul dintre parametrii geometrici de bază.

Condiţiile (3.134) constituie restricţiile problemei de optimizare şi pot avea caracter funcţional, constructiv sau tehnologic. În cele ce urmează se prezintă cele mai importante restricţii care pot interveni într-o astfel de problemă.

1) Condiţia unghiului de presiune

Aşa cum am arătat în Cap. 3.5., unghiul de presiune trebuie să satisfacă condiţia

$$|\alpha(p_1, p_2 \dots p_k, \varphi)| \le \alpha_a .$$

Formulele de calcul, pentru fiecare tip de mecanism, sunt prezentate în subcap. 3.4. Deoarece α depinde, pe lângă parametrii geometrici de bază, de unghiul de poziţie al camei φ, această condiţie se poate scrie

$$|\alpha(p_1, p_2 \dots p_k)|_{\max\limits_{\varphi}} \le \alpha_a$$

sau

$$f_1 = |\alpha(p_1, p_2 \dots p_k)|_{\max\limits_{\varphi}} - \alpha_a \le 0 . \tag{3.135}$$

Uneori, se impun valori diferite pentru α_a în faza de ridicare - α_{ar} şi în faza de coborâre - α_{ac}. În acest caz, condiția (3.135) se scrie separat, pentru cele două faze

$$\begin{aligned} f_{1r} &= \left|\alpha_r(p_1,\ p_2\ \dots\ p_k)\right|_{\substack{\max \\ \varphi}} - \alpha_{ar} \le 0 \\ f_{1c} &= \left|\alpha_c(p_1,\ p_2\ \dots\ p_k)\right|_{\substack{\max \\ \varphi}} - \alpha_{ac} \le 0 \end{aligned} \tag{3.136}$$

2) Condiția de evitare a subtăierii

În cazul mecanismelor cu rolă şi cuplă superioară bilaterală, pentru evitarea subtăierii trebuie îndeplinite condițiile (3.11) şi (3.12)

$$R_{ct}(p_1,\ p_2\ \dots\ p_k,\ \varphi) > r_4$$
$$R_{ct}(p_1,\ p_2\ \dots\ p_k,\ \varphi) < -r_4$$

care se pot scrie comasat

$$\left|R_{ct}(p_1,\ p_2\ \dots\ p_k,\ \varphi)\right| > r_4$$

sau sub forma

$$f_2 = \left|R_{ct}(p_1,\ p_2\ \dots\ p_k)\right|_{\substack{\min \\ \varphi}} - r_4 > 0\,. \tag{3.137}$$

În cazul mecanismelor cu cuplă superioară unilaterală intervin condițiile (3.11),

$$R_{ct}(p_1,\ p_2\ \dots\ p_k,\ \varphi) > r_4 \tag{3.138}$$
$$R_{ct}(p_1,\ p_2\ \dots\ p_k,\ \varphi) < 0\,. \tag{3.139}$$

Aşa cum rezultă din formulele de calcul ale razei de curbură a profilului teoretic (3.26, 3.35) aceasta nu trece niciodată prin zero, dar îşi poate schimba semnul trecând prin infinit, aşa cum se observă în Fig.3.26. În consecință, profilul teoretic, corespunzător unei faze, poate fi integral convex ($R_{ct} > 0$) sau poate avea un segment concav ($R_{ct} < 0$) şi unul convex ($R_{ct} > 0$). Având în vedere aceste observații condiția (3.138) poate fi scrisă sub forma

$$f_2 = R_{ct}(p_1,\ p_2\ \dots\ p_k)_{\substack{\min \\ \varphi}} - r_4 > 0 \tag{3.140}$$

în care $R_{ct\,min}$ este valoarea minimă a razei de curbură pentru intervalul cu $R_{ct} > 0$. Condiția (3.139) se aplică intervalului cu $R_{ct} < 0$ şi este, evident, de prisos. Condiția (3.140) poate fi înlocuită cu

$$f_2 = R_{ct}(p_1,\ p_2\ \dots\ p_k)_{\substack{\min \\ \varphi}} - r_4 \ge R_{ca} \tag{3.141}$$

unde R_{ca} este o valoare admisibilă pentru raza de curbură a profilului real. În felul acesta se evită o formă prea ascuțită a profilului.

În cazul mecanismelor cu tachet plat, condiția de evitare a subtăierii (3.13) este

$$R_{cr}(p_1,\ p_2\ \dots\ p_k,\ \varphi) > 0$$

şi poate fi reformulată astfel

$$f_2 = R_{cr}(p_1,\ p_2\ \dots\ p_k)_{\min\limits_{\varphi}} > 0\,. \tag{3.142}$$

Dacă raza de curbură R_{cr} este apropiată de zero, profilul prezintă o formă aproape ascuțită care are consecințe nefavorabile în ce privește uzura suprafețelor active. De aceea raza de curbură poate fi limitată la o valoare admisibilă $R_{ca} > 0$, iar restricția (3.142) devine

$$f_2 = R_{cr}(p_1,\ p_2\ \dots\ p_k)_{\min\limits_{\varphi}} - R_{ca} > 0\,. \tag{3.143}$$

3) Condiția de portanță a cuplei superioare

Această condiție este legată de rezistența la solicitarea de contact a celor două elemente care formează cupla superioară. Deşi problemele de rezistență şi durabilitate nu fac obiectul lucrării de față, această condiție nu poate fi neglijată deoarece este strâns legată de geometria camei - în formula de calcul a tensiunii de contact, σ [4], intervine raza de curbură a profilului real.

$$\sigma(p_1,\ p_2\ \dots\ p_k,\ \varphi) \le \sigma_a$$
$$f_3 = \sigma(p_1,\ p_2\ \dots\ p_k)_{\max\limits_{\varphi}} - \sigma_a \le 0 \tag{3.144}$$

4) Condiția de prelucrare cu o sculă de rază dată

În cazul prelucrării profilului interior, raza de curbură reală, în intervalul concav, trebuie să fie mai mare, în valoare absolută, decât raza sculei r_s,

$$\left|R_{ct}(p_1,\ p_2\ \dots\ p_k,\ \varphi) - r_4\right| \ge r_s$$
$$f_4 = R_{ct}(p_1,\ p_2\ \dots\ p_k)_{\max\limits_{\varphi}} - (r_4 - r_s) \le 0 \tag{3.145}$$

în care $R_{ct\,max}$ este valoarea maximă a razei de curbură în intervalul concav ($R_{ct} < 0$).

La prelucrarea profilului exterior, raza de curbură reală, în intervalul convex, trebuie să fie mai mare decât raza sculei

$$R_{ct}(p_1,\ p_2\ \dots\ p_k,\ \varphi) + r_4 \geq r_s$$
$$f_4 = R_{ct}(p_1,\ p_2\ \dots\ p_k)_{\max\limits_{\varphi}} + (r_4 - r_s) \geq 0\,, \qquad (3.146)$$

în care $R_{ct\ min}$ este minima razei de curbură în intervalul convex ($R_{ct} > 0$).

5) Condiții de montare

Aceste condiții se referă la relațiile dintre dimensiunile camei şi rolei, pe de o parte, şi diametrele arborilor pe care se montează, pe de altă parte. Ca urmare, raza rolei şi raza minimă a profilului real trebuie limitate inferior,

$$f_5 = r_4 \geq r_{4a} \qquad (3.147)$$
$$f_6 = r_{r\ \min\limits_{\varphi}} \geq r_{ra}\,. \qquad (3.148)$$

*

Rezolvarea problemei de optimizare se efectuează utilizând algoritmi şi programe specifice acestui domeniu. Pentru alegerea adecvată a acestora, este util să se țină seama de câteva observații legate de caracterul matematic al problemei, care se prezintă în continuare.

1) **Problema este neliniară deoarece funcția obiectiv şi majoritatea restricțiilor sunt neliniare.**

2) **Funcția obiectiv, deşi neliniară, are o expresie simplă, uşor de calculat pe cale analitică.**

3) **Majoritatea funcțiilor care intervin în formularea restricțiilor reprezintă valori extreme, în raport cu parametrul φ, ale altor funcții. Calculul lor se face, cu unele excepții, prin procedee numerice iterative. Este preferabil să se evite algoritmii de optimizare care utilizează derivatele restricțiilor în raport cu parametrii $p_1, p_2 \dots p_k$, deoarece acestă operație reclamă aplicarea succesivă a două procedee iterative.**

În lucrarea [4] se propune un algoritm de optimizare elaborat în aşa fel încât să exploateze specificul problemei în vederea simplificării rezolvării şi a reducerii timpului de calcul.

Problema de optimizare prezintă unele particularități şi rezolvări specifice în funcție de tipul mecanismului care se proiectează. În cazul mecanismelor prevăzute cu tachet cu rolă restricția legată de unghiul de presiune are o mare însemnătate pentru a asigura o bună funcționare. În cele ce urmează se prezintă procedeele de rezolvare a problemei de optimizare, luând în considerare această restricție, pentru câteva mecanisme uzuale. Aceste procedee, care au preponderent caracter grafic, sunt cunoscute în teoria mecanismelor înainte de dezvoltarea domeniului matematic al optimizării.

3.7.2. Mecanismul plan cu tachet de translație şi rolă

Parametrii geometrici de bază sunt e, s_0 şi r_4 (par. 3.4.2.), iar funcția obiectiv este

$$F_0(e,\ s_0,\ r_4) = r_{r\ max} = \sqrt{e^2 + (s_0 + h)^2} - r_4\ . \qquad (3.149)$$

Se consideră mecanismul echivalent obținut prin eliminarea rolei reprezentat într-o poziție oarecare (Fig.3.40).

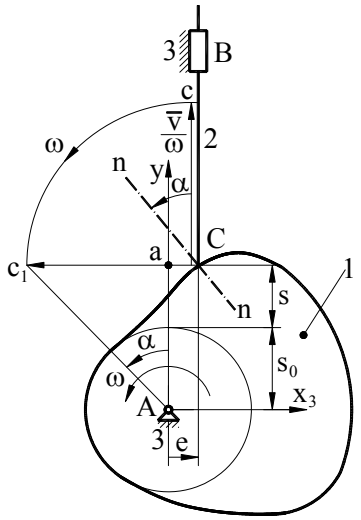


Fig. 3.40

Se aplică, în punctul C, vectorul $\overline{Cc} = \frac{\overline{v}}{\omega}$ corespunzător poziției considerate şi apoi se rabate acest vector, cu 90^0, în sensul vietzei unghiulare ω, ajungând în poziția $\overline{Cc_1}$. Se poate arăta că unghiul $\sphericalangle c_1Aa$, format între dreapta care unește centrul camei A cu vârful vectorului $\frac{\overline{v}}{\omega}$ rabătut, c_1, şi axa tachetului este unghiul de presiune α. Din triunghiul Aac_1 rezultă

$$\text{tg}\ \sphericalangle c_1Aa = \frac{ac_1}{Aa} = \frac{Cc_1 - Ca}{Aa} = \frac{\frac{v}{\omega} - e}{s_0 + s} = \text{tg}\ \alpha\ .$$

Pornind de la acest procedeu grafic, de determinare a unghiului de presiune, se prezintă o metodă de rezolvare a problemei de optimizare.

Se consideră un şir de poziții succesive ale tachetului în faza de ridicare şi în faza de coborâre (Fig.3.41). Pentru fiecare poziție se reprezintă vectorul $\frac{\overline{v}}{\omega}$ rabătut. Extremitățile acestor vectori se unesc printr-o linie continuă obținând o curbă închisă. Această curbă are două ramuri separate de axa tachetului. Dacă ω are sens antiorar ca în Fig.3.41, ramura din stânga corespunde fazei de ridicare, iar cea din dreapta, fazei de coborâre. Se trasează, în continuare dreapta (R_1) tangentă la ramura de ridicare şi înclinată cu unghiul α_{ar} față de axa tachetului şi dreapta (R_2) prin punctul C_i, înclinată cu acelaşi unghi (α_{ar}) în sens opus. Dacă centrul camei se adoptă în domeniul unghiular format sub dreptele (R_1) şi (R_2), unghiul de presiune respectă condiția $|\alpha| \le \alpha_{ar}$, în faza de

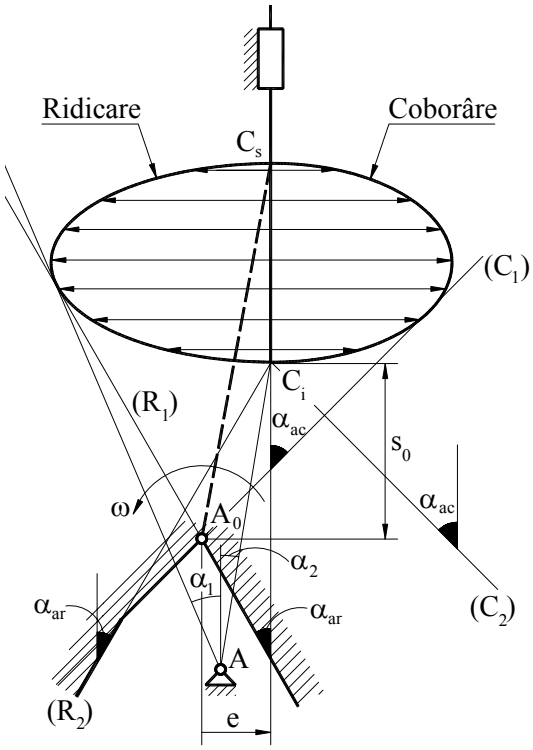


Fig. 3.41

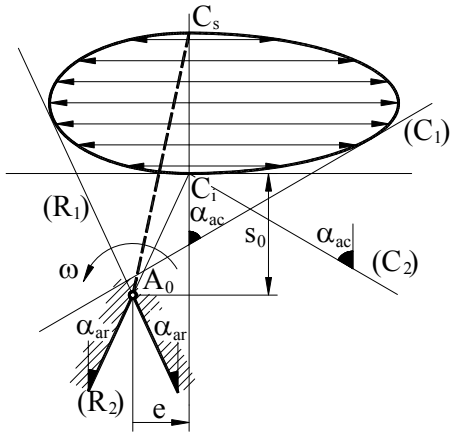


Fig. 3.42

ridicare. Această afirmație se poate verifica pe baza procedeului grafic de determinare a unghiului de presiune descris anterior. Astfel, dacă centrul camei se adopță în punctul A, unghiul de presiune maxim este

$$|\alpha|_{max} = |\alpha_1| \text{ sau } |\alpha_2|,$$

iar

$$|\alpha_1| \le \alpha_{ar};\ |\alpha_2| \le \alpha_{ar}.$$

În mod similar se trasează dreptele (C_1) și (C_2) pentru faza de coborâre. Desigur, în domeniul unghiular situat sub aceste drepte se respectă condiția $|\alpha| \le \alpha_{ac}$ pentru faza de coborâre. Pentru a asigura respectarea ambelor condiții, se definește un domeniu admisibil, situat sub cele patru drepte, pus în evidență în Fig.3.41.

Deoarece în această restricție nu este implicat parametrul r_4, funcția obiectiv se poate reduce la forma

$$F_0(e, s_0) = r_{t\,max} = \sqrt{e^2 + (s_0 + h)^2}$$

care reprezintă, evident, raza maximă a profilului teoretic. Această rază este distanța AC_s, de la centrul camei la extremitatea superioară a cursei. Pentru situația din Fig.3.41, valoarea minimă (optimă) a acestui segment

se obține când A se adoptă în A_0, punctul de intersecție dintre dreptele (R_1) şi (C_1). Domeniul admisibil poate avea, în funcție de valorile α_{ar}, α_{ac} şi de parametrii care intervin în legea de mişcare şi o altă configurație (Fig.3.42). În acest caz poziția optimă a centrului camei A_0 este la intersecția dreptelor (R_1) şi (R_2). Prin adoptarea punctului A_0 rezultă, implicit, parametrii e şi s_0 (Fig.3.41, 3.42). Trebuie menționat că în această construcție grafică scările pentru lungimi şi pentru $\frac{\overline{v}}{\omega}$ trebuie să fie egale.

Pentru determinarea razei rolei r_4 se recomandă relația empirică

$$r_4 \cong (0,3-0,4)r_{t\ min}. \tag{3.151}$$

Cunoscând e, s_0 şi r_4 se verifică şi celelalte restricții. Dacă se ajunge la o restricție nerespectată se modifică e, s_0 şi r_4 în sensul necesar, având grijă ca centrul de rotație al camei să rămână în domeniul admisibil.

3.7.3. Mecanismul plan cu tachet de rotație şi rolă

Parametrii geometrici de bază sunt ℓ, d, ψ_0 şi r_4 (par. 3.4.3.), iar funcția obiectiv are forma

$$F_0(\ell,\ d,\ \psi_0,\ r_4) = r_{r\ max} = \sqrt{\ell^2 + d^2 - 2\ell d\cos(\psi_0 + \psi_h)} - r_4. \tag{3.152}$$

Ca şi în cazul mecanismului precedent, se prezintă un procedeu grafic de opitmizare luând în considerare numai restricția unghiului de presiune.

Se consideră mecanismul echivalent obținut prin eliminarea rolei, într-o poziție oarecare (Fig.3.43). În punctul C se aplică vectorul $\overline{Cc} = \frac{\overline{v}}{\omega_1}$ în care $\overline{v}$ este viteza punctului C pentru poziția considerată. Acest vector se rabate cu 90^0 în sensul lui ω_1, ajungând în poziția Cc_1 coliniară cu tachetul BC. Se poate arăta că unghiul $\sphericalangle c_1Aa$, format între dreapta Ac_1, care uneşte punctul c_1 cu centrul camei, şi perpendiculara pe tachet Aa este unghiul de presiune α. Din triunghiul dreptunghic c_1Aa rezultă

$$\text{tg}\ \sphericalangle c_1Aa = \frac{\ell + Cc_1 - Ba}{Aa}. \tag{3.153}$$

Având în vedere că ω_1 şi ω_2 au sensuri contrare, în poziția considerată, segmentul Cc_1 se poate exprima astfel

$$Cc_1 = \left|\frac{v}{\omega_1}\right| = \frac{\ell|\omega_2|}{|\omega_1|} = -\ell\frac{\omega_2}{\omega_1}.$$

În aceste condiții formula (3.153) devine

$$\text{tg}\ \sphericalangle c_1Aa = \frac{\ell\left(1-\frac{\omega_2}{\omega_1}\right) - d\cos(\psi_0+\psi)}{d\sin(\psi_0+\psi)} = \text{tg}\ \alpha. \qquad (3.154)$$

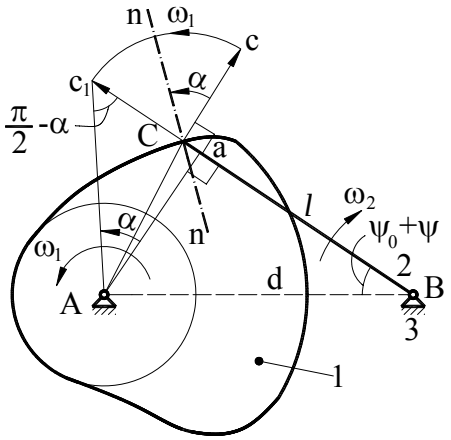


Fig. 3. 43

Pe baza acestui procedeu de determinare a unghiului de presiune se execută o construcție grafică pentru rezolvarea problemei de optimizare. Se reprezintă tachetul într-un şir de poziții succesive (Fig.3.44) în faza de ridicare şi în faza de coborâre, cu lungimea ℓ adoptată arbitrar. Pentru fiecare poziție se reprezintă vectorul $\frac{\overline{v}}{\omega_1}$ rabătut. Aceşti vectori sunt orientați în mod diferit pentru cele două faze. Când ω_1 are sens antiorar, ca în Fig.3.44, orientarea este în sensul $\overline{BC}$ pentru faza de ridicare şi în sensul $\overline{CB}$ pentru faza de coborâre. În extremitatea fiecărui vector se trasează două drepte care formează cu tachetul unghiurile $\frac{\pi}{2}-\alpha_{ar}$, pentru pozițiile fazei de ridicare şi $\frac{\pi}{2}-\alpha_{ac}$ pentru coborâre. Astfel, pentru poziția BC (Fig.3.44) cele două drepte sunt (R_1) şi (R_2). Dacă

centrul camei se adoptă în domeniul unghiular format de aceste drepte, $|\alpha| \le \alpha_{ar}$ pentru poziția considerată.

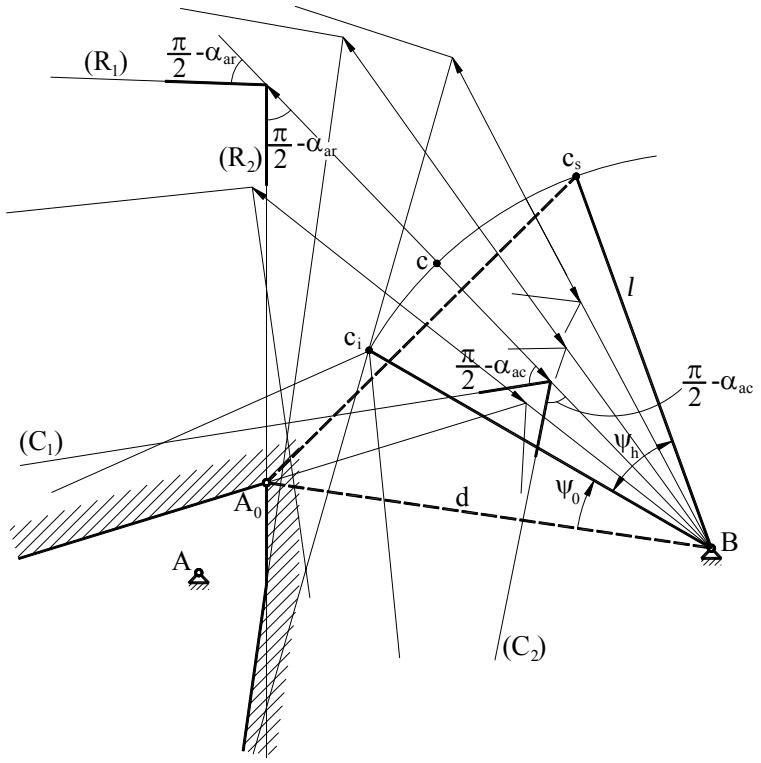


Fig. 3.44

Se defineşte un domeniu admisibil format prin intersecția domeniilor unghiulare specifice fiecărei poziții. Dacă centrul camei se adoptă în acest domeniu, $|\alpha| \le \alpha_{ar}$ pentru toată faza de ridicare şi $|\alpha| \le \alpha_{ac}$ pentru întreaga fază de coborâre. Pentru a obține poziția optimă se consideră funcția obiectiv redusă la expresia

$$F_0(\ell,\ d,\ \psi_0) = r_{t\,max} = \sqrt{\ell^2 + d^2 - 2\ell d\cos(\psi_0 + \psi_h)}\ . \qquad (3.155)$$

Raza teoretică maximă $r_{t\,max}$ este distanța AC_s de la centrul camei A la punctul C_s corespunzător poziției extreme superioare. Valoarea minimă a acestui segment se obține când A este în vârful A_0, rezultând astfel $\psi_0 = \sphericalangle A_0BC_i$ şi $d = A_0B$. Dacă lungimea adoptată inițial pentru ℓ se schimbă,

d se modifică proporțional, iar ψ_0 rămâne nemodificat. Pentru adoptarea razei r_4 se utilizează relația empirică (3.151).

3.7.4. Mecanismul spațial cu camă cilindrică şi tachet de translație

În cazul acestui mecanism parametrul care trebuie optimizat este raza medie a camei cilindrice r_1, care este legată de unghiul de presiune α, prin relația

$$\text{tg}\ \alpha = -\frac{s'}{r_1}. \tag{3.49}$$

Impunând condiția $|\alpha| \le \alpha_a$, se obține

$$\text{tg}\ |\alpha| = \frac{|s'|}{r_1} \le \text{tg}\ \alpha_a$$

sau

$$r_1 \ge \frac{|s'|}{\text{tg}\ \alpha_a}.$$

Această condiție este satisfăcută pentru orice valoare $s'(\varphi)$ dacă este îndeplinită pentru $|s'|_{max}$,

$$r_1 \ge \frac{|s'|_{max}}{\text{tg}\ \alpha_a},$$

iar valoarea optimă (minimă) pentru r_1 este evident

$$r_1 = \frac{|s'|_{max}}{\text{tg}\ \alpha_a}. \tag{3.156}$$

Capitolul **4**

MECANISME CU ROȚI DINȚATE

4.1. MECANISME ELEMENTARE CU ROȚI DINȚATE (ANGRENAJE)

Un mecanism elementar cu roți dințate (angrenaj) este format din două roți dințate cu mişcare de rotație în jurul a doua axe cu poziție relativă invariabilă, una antrenând-o pe cealaltă prin acțiunea dinților aflați succesiv şi continuu în contact (STAS 915/2-81).

4.1.1. Suprafețele şi liniile caracteristice ale roților dințate

Să considerăm un angrenaj, reprezentat simplificat în Fig.4.1, constituit din elementele dințate 1 şi 2 care se rotesc cu vitezele unghiulare ω_1 şi ω_2 în jurul unur axe fixe (Δ_1) şi (Δ_2).

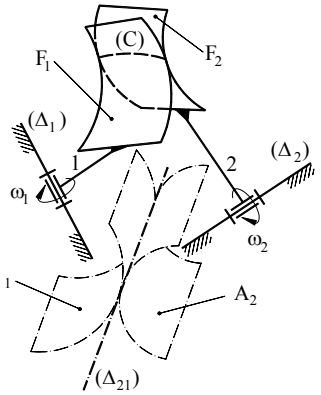


Fig. 4.1

Transmiterea mişcării între cele două roți dințate conjugate (care angrenează una cu cealaltă) se face prin intermediul unei cuple superioare formată între două suprafețe F_1 şi F_2 tangente după o curbă (C), numite **flancuri**. Flancul F_1, aparținând roții 1, ocupă în timpul mişcării, un şir de poziții succesive în raport cu elementul 2. Flancul F_2 rămâne tangent la toate aceste poziții, deci este înfăşurătoarea lor. Analog, flancul F_1 este înfăşurătoarea pozițiilor succesive ale flancului F_2 în raport cu roata 1. De aceea flancurile sunt denumite **suprafețe de înfăşurare reciprocă**. În acelaşi timp transmiterea

mişcării se poate face prin intermediul axoidelor mişcării relative A_1 şi A_2. Acestea sunt generate de axa instantanee a mişcării relative (Δ_{21}), în deplasarea sa în raport cu fiecare roată. Poziția axei instantanee (Δ_{21}) este determinata de raportul de transmitere i_{12} şi de poziția relativă a axelor de rotație, definită prin distanța dintre axe, a şi prin unghiul dintre axe Σ. Aceşti parametri se definesc la rândul lor, conform (STAS 915/2-81).

- **Raportul de transmitere, i_{12}** – raportul dintre viteza unghiulară a roții conducătoare 1 şi viteza unghiulră a roții conduse 2.

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2}\Bigg|^{(*)} \qquad (4.1)$$

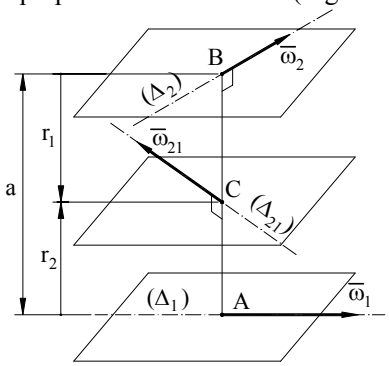
- **Distanța dintre axe, a –** lungimea perpendicularei comune (Fig.4.2.a).
- **Unghiul dintre axe, Σ** – cel mai mic unghi cu care trebuie rotită una dintre axe pentru a fi adusă în poziție de paralelism sau de suprapunere cu cealaltă axă, în aşa fel încât sensurile de rotație ale celor două roți să fie opuse (Fig.4.2.b)

Axa instantanee (Δ_{21}) trece printr-un punct C situat pe perpendiculara comună AB şi constituie suportul vitezei unghiulare relative $\overline{\omega}_{21}$ (Fig.4.2 a,b),

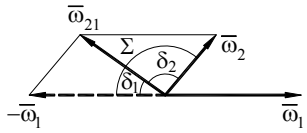
$$\overline{\omega}_{21} = \overline{\omega}_2 - \overline{\omega}_1 = \overline{\omega}_2 + \left(-\overline{\omega}_1\right).$$

Parametrii care definesc poziția acestei axe sunt unghiurile δ_1 şi δ_2 formate cu vectorii $-\overline{\omega}_1$ şi $\overline{\omega}_2$, astfel încât

$$\Sigma = \delta_1 + \delta_2, \qquad (4.2)$$



a)



b)

Fig. 4.2

şi razele orientate $r_1 = AC$ şi $r_2 = CB$. Valorile acestor parametri se calculează cu relațiile (ANEXA 3),

(*) *În cadrul acestui capitol convenim să folosim notațiile* i_{12}, ω_1, ω_2 *atunci când parametrii respectivi sunt scalari fără semn şi* $\tilde{i}_{12}$, $\tilde{\omega}_1$, $\tilde{\omega}_2$, *când sunt scalari cu semn.*

$$tg\delta_1 = \frac{\sin\Sigma}{i_{12} + \cos\Sigma} \tag{4.3}$$

$$tg\delta_2 = \frac{i_{12}\sin\Sigma}{1 + i_{12}\cos\Sigma} \tag{4.4}$$

$$r_1 = \frac{a(1 + i_{12}\cos\Sigma)}{1 + i_{12}^2 + 2i_{12}\cos\Sigma} \tag{4.5}$$

$$r_2 = -\frac{a \cdot i_{12}(\cos\Sigma + i_{12})}{1 + i_{12}^2 + 2i_{12}\cos\Sigma} \tag{4.6}$$

Razele r_1 şi r_2 rezultă pozitive dacă au sensul AB şi negative în caz contrar.

Menţionăm de asemenea două relaţii, utile pentru calculul raportului de transmitere, deduse din formulele (4.3) - (4.6),

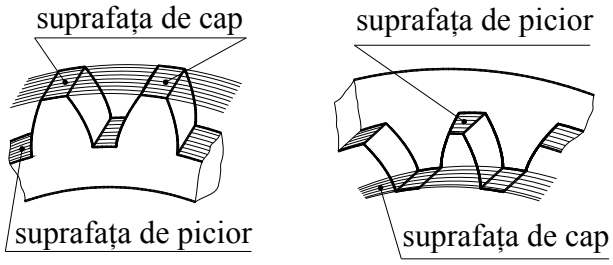
$$i_{12} = \frac{\sin\delta_2}{\sin\delta_1} \tag{4.7}$$

$$i_{12} = -\frac{r_2\cos\delta_2}{r_1\cos\delta_1} \tag{4.8}$$

Axoidele mişcării relative se numesc, în terminologia angrenajelor, **suprafeţe de rostogolire** şi prezintă o importanţă deosebită pentru studiul geometric şi cinematic al roţilor dinţate. Dacă se cunoaşte forma flancului unei roţi şi mişcarea relativă, reprodusă cu ajutorul suprafeţelor de rostogolire, se poate determina, prin înfăşurare, flancul roţii conjugate. Pe această proprietate se bazează definirea geometrică a **sistemelor de roţi dinţate** cu ajutorul unui **element dinţat de referinţă**. Acesta are o formă particulară, caracterizată printr-o geometrie simplă – de obicei flancurile sunt plane. Definirea unei roţi dinţate aparţinând sistemului se face din condiţia de angrenare fictivă cu elementul de referinţă. În procesul de definire se cunosc suprafeţele de rostogolire şi forma flancului elementului de referinţă, rezultând prin înfăşurare, flancul roţii care se defineşte. Suprafaţa de rostogolire a roţii dinţate în angrenarea ei cu elementul dinţat de referinţă se numeşte **suprafaţă de divizare**. Această suprafaţă este caracteristică şi invariabilă pentru o anumită roată considerată izolat şi serveşte la definirea geometrică a elementelor danturii. Spre deosebire de suprafaţa de divizare, suprafaţa de rostogolire a unei roţi dinţate depinde de parametrii geometrici ai roţii conjugate şi se poate modifica în ce priveşte dimensiunile şi chiar forma, odată cu schimbarea roţii conjugate. Suprafaţa de rostogolire poate să coincidă cu cea de divizare numai în situaţii particulare.

Flancurile sunt delimitate de **suprafaţa de cap** – spre vârful dinţilor şi de **suprafaţa de picior** - spre fundul golurilor (Fig.4.3). Dacă suprafaţa de cap

este în exteriorul celei de picior, roata dințată are **dantură exterioară** (Fig.4.3a), iar dacă suprafața de cap este în interiorul celei de picior, roata are **dantură interioară** (Fig.4.3b).



a) ***b)***

Fig. 4.3

Intersecțiile flancurilor cu diverse suprafețe formează liniile caracteristice ale roții dințate, după cum urmează.

Liniile de divizare ale flancurilor – intersecțiile flancurilor cu suprafața de divizare (Fig.4.4). În mod analog se definesc **liniile de rostogolire ale flancurilor**, **liniile de cap ale flancurilor**, etc.

Profilul dintelui (golului dintre dinți) – intersecția suprafețelor care delimitează dintele (flancurile dintelui şi suprafața de cap) sau golul dintre dinți (flancurile golului şi suprafața de picior) cu o suprafață dată (Fig.4.5). În funcție de această suprafață de intersecție, există mai multe tipuri de profile:

Profilul frontal – se obține când suprafața de intersecție este frontală. **Suprafața frontală** este ortogonală la generatoarele suprafeței de divizare.

Profilul normal – se obține când suprafața de intersecție este normală pe dinte sau pe gol. **Suprafața normală** este ortogonală la liniile de divizare ale flancurilor dintelui sau golului.

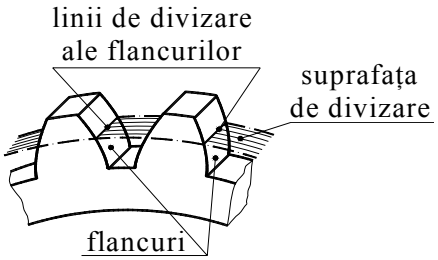


Fig. 4.4

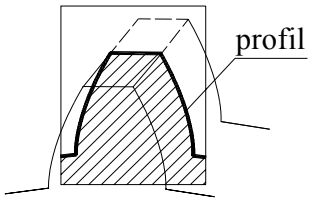


Fig. 4.5

Profilul axial – se obține când suprafața de intersecție este un plan care conține axa roții.

4.1.2. Clasificare angrenajelor

Angrenajele, precum şi roțile dințate luate separat, prezintă o mare varietate de tipuri şi de forme. Clasificarea lor se face după mai multe criterii, după cum se arată în continuare.

■ Variația raportului de transmitere

Dacă raportul de transmitere instantaneu este constant, axa instantanee a mişcării relative este fixă deoarece parametrii de poziție δ_1 (4.3), δ_2 (4.4), r_1 (4.5) şi r_2 (4.6), au de asemeni valori constante. Prin mişcarea relativă de rotație a acestei axe în raport cu fiecare roată, se generează suprafețele de rostogolire care sunt suprafețe de revoluție. Evident, intersecțiile suprafețelor de rostogolire cu plane perpendiculare pe axa roții, sunt cercuri. Din această cauză **angrenajele cu raport de transmitere constant** se numesc **angrenaje circulare**.

Dacă raportul de transmitere instantaneu este variabil, poziția axei instantanee, este de asemenea, variabilă iar suprafețele de rostogolire nu sunt suprafețe de revoluție. **Angrenajele** de acest fel se numesc **necirculare**. În construcția de maşini, aplicațiile angrenajelor necirculare sunt foarte reduse. Din această cauză, în continuare vom trata numai angrenajele circulare.

Raportul de transmitere al angrenajelor circulare, indiferent de tipul lor, se calculează cu formula

$$i_{12} = \frac{z_2}{z_1} \tag{4.9}$$

în care z_1 şi z_2 reprezintă numerele de dinți ale roților. Formula (4.9) se demonstrează simplu. Să presupunem că roata 1 execută o rotație completă, cu unghiul $\varphi_1 = 2\pi$. În acest caz, dinții roții 1, în număr de z_1, angrenează cu tot atâția dinți ai roții 2. Ca urmare roata 2 se roteşte cu unghiul

$$\varphi_2 = \frac{z_1}{z_2} \cdot 2\pi$$

Având în vedere că rotațiile cu unghiurile φ_1 şi φ_2 se execută în acelaşi timp, se poate scrie

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\varphi_1}{\varphi_2} = \frac{2\pi}{\frac{z_1}{z_2} \cdot 2\pi} = \frac{z_2}{z_1}$$

- **Poziția relativă a axelor şi forma suprefețelor de rostogolire**

Poziția relativă a axelor de rotație determină forma suprafețelor de rostogolire, astfel încât aceste criterii trebuie discutate împreună. Conform acestui criteriu se pot forma următoarele tipuri de angrenaje.

1) Angrenaje cu axele de rotație încrucişate (neparalele şi neconcurente)

În acest caz $a \neq 0$, $\Sigma \neq 0$, $\Sigma \neq \pi$. Axa instantanee a mişcării relative are o poziție determinată în spațiu iar **suprafețele de rostogolire sunt hiperboloizi de rotație cu o pânză** (ANEXA 3) (Fig.4.6.a).

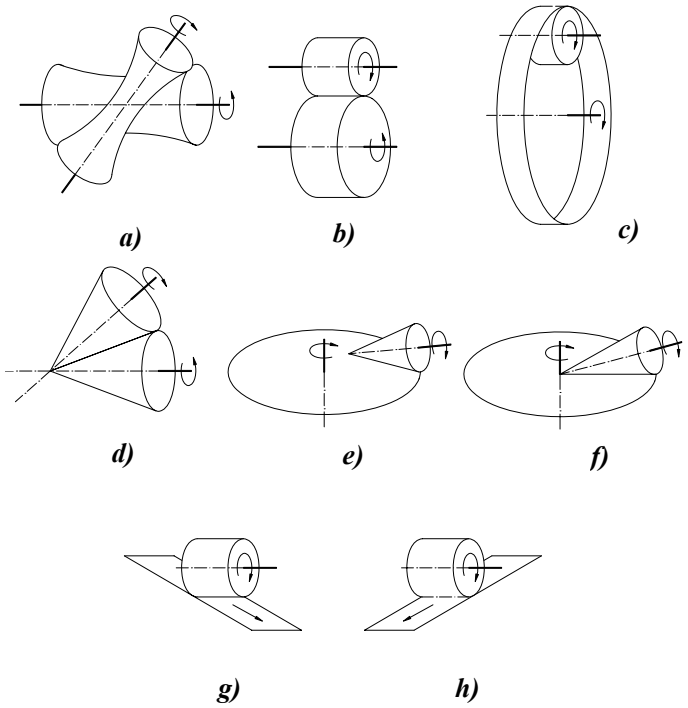


Fig. 4.6

2) Angrenaje cu axele de rotație paralele

În acest caz $a \neq 0$ şi $\Sigma = 0$ sau $\Sigma = \pi$. Pentru $\Sigma = 0$ rezultă $\delta_1 = \delta_2 = 0$, iar pentru $\Sigma = \pi$, se obține $\delta_1 = 0$ şi $\delta_2 = \pi$. Axa instantanee a mişcării relative este paralelă cu axele de rotație iar **suprafețele de rostogolire sunt cilindri circulari având axele geometrice identice cu axele de rotație** (Fig.4.6.b, c).

3) Angrenaje cu axele de rotație concurente

În acest caz $a = 0$, ceea ce conduce la $r_1 = 0$ şi $r_2 = 0$. Rezultă că axa instantanee şi axele de rotație sunt concurente în acelaşi punct, iar **suprafețele de rostogolire sunt conuri cu axele geometrice identice cu axele de rotație şi cu vârfurile în punctul de intersecție al acestora** (Fig.4.6.d).

În procesul de definire geometrică a roților dințate, interesează şi angrenajele particulare, la care una din roți are suprafața de rostogolire plană. Aceste roți sunt utilizate de obicei ca elemente de referință. Pentru a pune în evidență aceste angrenaje să considerăm planul de coordonate $(\Sigma,\ i_{12})$ $(\Sigma \in [0,\ \pi],\ i_{12} \in [0, \infty))$ - Fig.4.7. Fiecare punct din acest plan reprezintă o infinitate de angrenaje având aceleaşi valori pentru Σ, i_{12}, δ_1 şi δ_2 şi o mulțime de valori pentru $a \in [0, \infty)$. Dreptele $\Sigma = 0$ şi $\Sigma = \pi$, reprezintă angrenaje paralele, iar restul punctelor – angrenaje încrucişate (dacă $a \neq 0$) sau concurente (dacă $a = 0$).

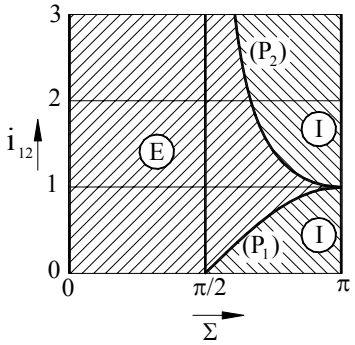


Fig. 4.7

Angrenajele cu o suprafață de rostogolire plană se pot obține în două moduri.

- Când $\boldsymbol{\delta_1 = \pi/2}$ sau $\boldsymbol{\delta_2 = \pi/2}$. Să presupunem $\delta_1 = \pi/2$. Din (4.3) – (4.6) rezultă $i_{12} = -\cos\Sigma,\ r_1 = a,$ şi $r_2 = 0$. Prin urmare axa instantanee este perpendiculară pe axa de roții 1 ($\delta_1 = \pi/2$)şi concurentă cu axa roții 2 ($r_2 = 0$). Angrenajul este format dintr-o roată 1, cu suprafața de rostogolire plană numită **roată plană** şi o roată 2, cu suprafața de rostogolire conică. Acest angrenaj poate fi încrucişat (Fig.4.6.e) dacă $a \neq 0$ sau concurent (Fig.4.6.f) dacă $a = 0$. În planul $(i_{12},\ \Sigma)$ angrenajele cu roata 1 plană se găsesc pe curba (P_1) de ecuație $i_{12} = -\cos\Sigma$ (Fig.4.7). În ipoteza $\delta_2 = \pi/2$ se obțin angrenaje similare în care roata 2 este plană şi se găsesc pe curba (P_2) de ecuație $i_{12} = -\dfrac{1}{\cos\Sigma}$.

• Când $\mathbf{i_{12} = 0}$ sau $\mathbf{i_{12} = \infty}$. În ipoteza $i_{12} = 0$, $\omega_1 = 0$ şi, deci elementul 1 are mişcare translaţie purtând denumirea de **cremalieră**. Din relaţiile (4.3) – (4.6) rezultă $\delta_1 = \Sigma, \delta_2 = 0, r_1 = a = \infty$. Axa instantanee descrie, în raport cu elementul 1, o suprafaţă de rostogolire plană, deoarece cremaliera are mişcare de translaţie rectilinie. Roata 2 are suprafaţa de rostogolire cilindrică deoarece $\delta_2 = 0$. Dacă $\Sigma \neq 0$ şi $\Sigma \neq \pi$, angrenajele cu cremalieră sunt spaţiale – cele două elemente se deplasează paralel cu plane diferite, (Fig.4.6 g). Dacă $\Sigma = 0$ sau $\Sigma = \pi$, angrenajul este plan (Fig.4.7). În ipoteza $i_{12} = \infty$, se obţin angrenaje similare, cu elementul 2 – cremalieră, situate în planul (i_{12}, Σ), pe dreapta $i_{12} = \infty$.

■ Angrenaje exterioare şi interioare

Angrenajele exterioare se caracterizează prin aceea că suprafeţele de rostogolire sunt exterioare una în raport cu cealaltă, iar roţile au dantură exterioară.

În cazul angrenajelor interioare suprafaţa de rostogolire a uneia dintre roţi (care are dantură exterioară) este amplasată în interiorul suprafeţei de rostogolire aparţinând celeilalte roţi (care are dantură interioară).

Angrenajele exterioare au $\delta_1 < \frac{\pi}{2}$ şi $\delta_2 < \frac{\pi}{2}$, pe când angrenajele interioare au $\delta_1 > \frac{\pi}{2}$ sau $\delta_2 > \frac{\pi}{2}$. Analizând aceste condiţii pe baza relaţiilor (4.3) şi (4.4) se ajunge la concluzia că în domeniul (E) (Fig.4.7), avem angrenaje exterioare, iar în domeniul (I), angrenaje interioare. Cele două domenii sunt separate de curbele (P_1) şi (P_2), care reprezintă angrenajele cu o suprafaţă de rostogolire plană. Acestea din urmă formează o clasă specială care nu poate fi încadrată nici în categoria angrenajelor exterioare, nici în categoria angrenajelor interioare. Menţionăm că, deşi teoretic, angrenajele interioare pot avea axe încrucişate, concurente sau paralele, în aplicaţiile practice se utilizează numai cele cu axele paralele, (Fig.4.6.b). În planul (i_{12}, Σ) angrenajele paralele exterioare sunt pe dreapta $\Sigma = 0$, iar cele interioare, pe dreapta $\Sigma = \pi$. Precizăm, de asemenea, că angrenajele exterioare cu axe neparalele (concurente sau încrucişate), au în marea lor majoritate a aplicaţiilor practice, axele de rotaţie perpendiculare, fiind pe dreapta $\Sigma = \frac{\pi}{2}$.

■ Forma liniilor de divizare ale flancurilor

1) Roți dințate cu dinți drepți – liniile de divizare ale flancurilor coincid cu generatoarele suprafeței de divizare.

2) Roți dințate cu dinți înclinați – liniile de divizare ale flancurilor sunt elici cilindrice (la roțile cu suprafață de divizare cilindrică) sau conice (la roțile cu suprafața de divizare conică), cu pas constant.

3) Roți dințate cu dinți curbi - liniile de divizare ale flancurilor sunt curbe de diverse forme: arce de cerc, epicicloide alungite, evolvente alungite sau scurtate. Dantura curbă se utilizează, practic, numai în cazul roților cu suprafața de divizare conică sau plană.

■ Modul de definire geometrică

1) Roți dințate cilindrice – au suprafața de divizare cilindrică, iar elementul de referință este o cremalieră. Roțile cilindrice pot forma **angrenaje paralele** sau **încrucişate**, numite **elicoidale**.

2) Roți dințate conice – au suprafața de divizare conică, iar elementul de referință este o roată plană. Roțile conice pot forma **angrenaje concurente** sau **încrucişate**, numite **hipoide**.

3) Angrenaje melcate. Angrenajul melcat este un angrenaj încrucişat cu axe perpendiculare, ale cărui elemente sunt melcul şi roata melcată.

Melcul este un element cu dinți elicoidali dispuşi pe un cilindru. El poate fi asimilat cu o roată cilindrică cu dinți înclinați având un număr mic de dinți (1-4). Melcul este elementul de referință pentru roata melcată şi este definit pe baza procedeului de prelucrare.

Roata melcată este elementul dințat conjugat cu melcul, care serveşte ca element de referință pentru definirea sa.

■ Forma profilului frontal

În marea majoritate a aplicațiilor tehnice, roțile dințate sunt evolventice – profilul frontal are formă de **evolventă**. În mecanica fină se întrebuințează şi angernaje **cicloidale**, cu profilul format dintr-un arc de **epicicloidă** şi un arc de **hipocicloidă**. Se cunosc, de asemenea, angrenajele **Wildhaber – Novikov**, cu profile în formă de arce de cerc.

*

În Fig.4.8 sunt reprezentate tipurile principale de angrenaje uzuale, indicându-se încadrarea în categoriile de clasificare prezentate.

Cele mai simple angrenaje sunt cele cu axe paralele, formate din roți dințate cilindrice cu dinți drepți, care se vor prezenta în continuare. Studiul

geometrico-cinematic al acestor angrenje se extinde prin unele echivalenţe şi analogii şi asupra celorlalte tipuri de angrenaje.

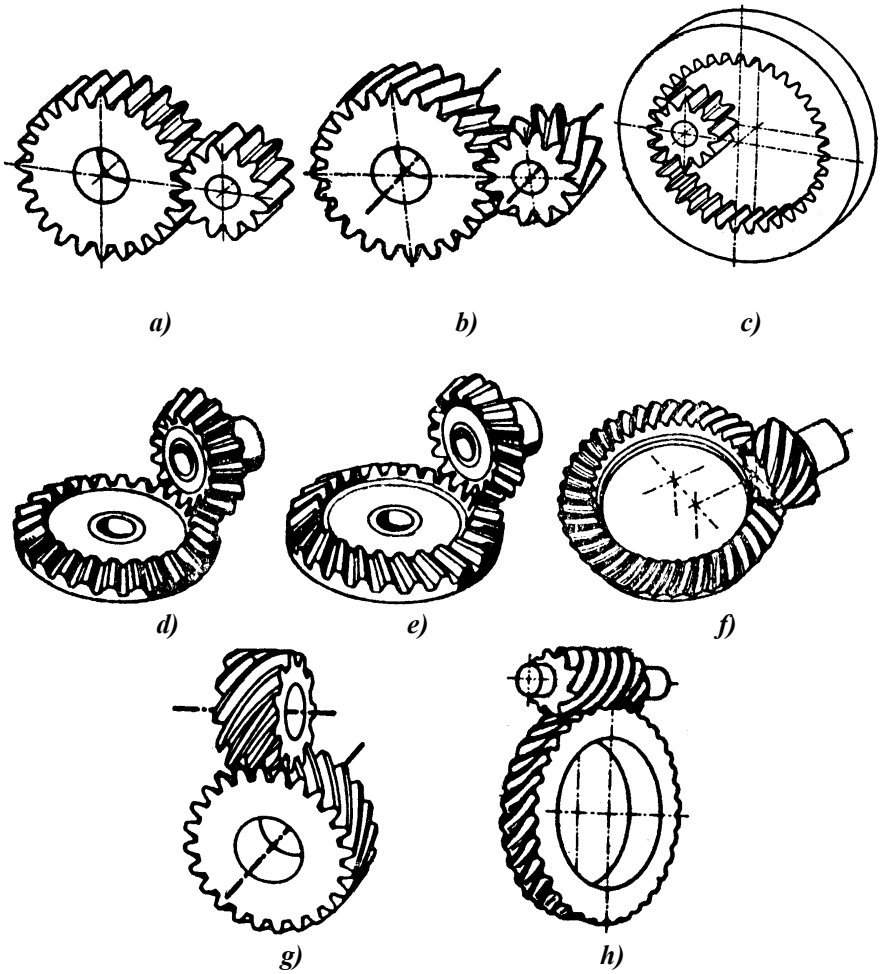


Fig. 4.8

a) *angrenaj cilindric, paralel cu dinţi drepţi;* ***b)*** *angrenaj cilindric, paralel cu dinţi înclinaţi;* ***c)*** *angrenaj cilindric, paralel, interior, cu dinţi drepţi;* ***d)*** *angrenaj conic, concurent, cu dinţi drepţi;* ***e)*** *angrenaj conic, concurent, cu dinţi înclinaţi;* ***f)*** *angrenaj hipoid (format din roţi conice cu axe încrucişate, cu dinţi curbi);* ***g)*** *angrenaj elicoidal (format din roţi cilindrice, cu axe încrucişate, cu dinţi înclinaţi);* ***h)*** *angrenaj melcat (încrucişat, format dintr-un melc şi o roată melcată)*

4.1.3. Angrenaje paralele formate din roți dințate cilindrice cu dinți drepți

4.1.3.1. Raportul de transmitere. Legea fundamentală a angrenării

Angrenajele paralele sunt mecanisme plane, iar proprietățile lor geometrico-cinematice se studiază într-un plan frontal, perpendicular pe axele roților.

În ipoteza că raportul de transmitere este constant (angrenaje circulare), suprafețele de rostogolire sunt cilindri circulari coaxiali cu roțile. Intersecțiile lor cu un plan frontal, formează cercurile de rostogolire C_{w1} şi C_{w2} , care reprezintă centroidele mişcării relative. Punctul lor de tangență este centrul instantaneu al mişcării relative C (Fig.4.9), numit în terminologia angrenajelor, **punct de rostogolire** sau **pol al angrenării**.

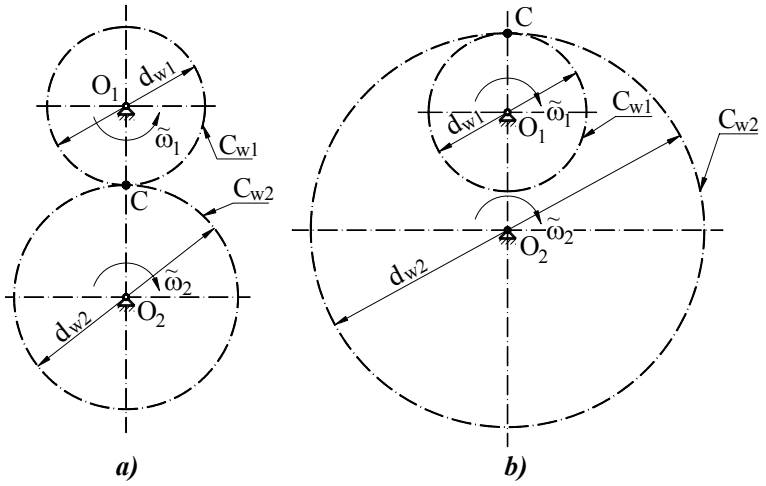


Fig. 4.9

Raportul de transmitere al angrenajelor paralele se calculează, desigur, cu formula generală (4.9), dar se poate exprima şi în funcție de razele de rostogolire d_{w1} şi d_{w2}.

Vitezele periferice $v_{C1} = \omega_1 \cdot (d_{w1}/2)$ şi $v_{C2} = \omega_2 \cdot (d_{w2}/2)$, sunt egale datorită rostogolirii fără alunecare a celor două cercuri, unul peste altul,

$$v_{C1} = \omega_1 \cdot \frac{d_{w1}}{2} = v_{C2} = \omega_2 \cdot \frac{d_{w2}}{2},$$

ceea ce conduce la relația

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{z_2}{z_1} = \frac{d_{w2}}{d_{w1}}. \qquad (4.10)$$

Deoarece axele de rotație sunt paralele, sensurile de rotație sunt comparabile, astfel încât vitezele unghiulare se pot exprima şi prin scalari cu semn $\tilde{\omega}_1$ şi $\tilde{\omega}_2$. În această ipoteză, raportul de transmitere definit prin relația

$$\tilde{i}_{12} = \frac{\tilde{\omega}_1}{\tilde{\omega}_2} \qquad (4.11)$$

este, de asemenea, un număr cu semn. Dacă roțile au sensuri de rotație opuse, aşa cum se întâmplă la angrenajul exterior (Fig.4.9.a), raportul de transmitere este negativ, iar expresiile sale de calcul sunt

$$\tilde{i}_{12} = -\frac{z_2}{z_1} = -\frac{d_{w2}}{d_{w1}}. \qquad (4.12)$$

Dacă roțile se rotesc în acelaşi sens, ca în cazul angrenajului interior (Fig.4.9.b), raportul de transmitere este pozitiv

$$\tilde{i}_{12} = +\frac{z_2}{z_1} = +\frac{d_{w2}}{d_{w1}}. \qquad (4.13)$$

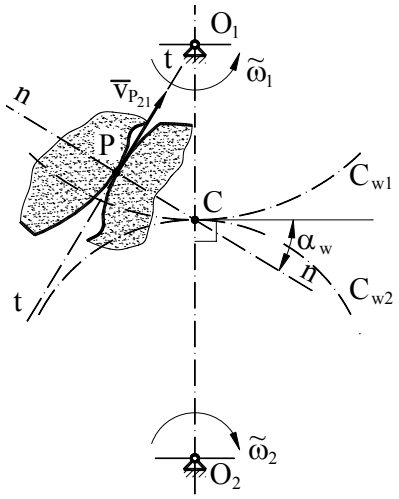


Fig. 4.10

Existența angrenajelor circulare, cu raport de transmitere instantaneu constant, care se bucură de proprietățile evidențiate anterior, este determinată de forma profilelor frontale. Ne propunem să stabilim ce condiții trebuie să îndeplinească aceste profile pentru a obține angrenaje circulare.

Se consideră două profile conjugate, cu contactul în punctul P (Fig.4.10). Aceste profile formează o cuplă superioară într-un mecanism plan, pentru care se poate scrie ecuația de viteze,

$$\bar{v}_{P_2} = \bar{v}_{P_1} + \bar{v}_{P_{21}},$$

în care $\bar{v}_{P_2}$ şi $\bar{v}_{P_1}$ reprezintă vitezele punctelor P_2 şi P_1, aparținând celor două roți. Vectorul $\bar{v}_{P_{21}}$ este viteza relativă de alunecare definită ca viteza puncului P_2 în mişcarea relativă a roții 2 în raport cu 1. Viteza relativă, este în acelaşi timp, tangentă comună la profilele în contact şi perpendiculară pe dreapta PC, care uneşte punctul P cu centrul instantaneu de rotație. Aceasta înseamnă că

dreapta PC este normală comună la cele două profile în punctul de contact. Dacă angrenajele sunt circulare, punctul C este fix pe linia centrelor O_1O_2, deoarece centroidele sunt cercuri cu centrele în O_1 şi O_2. Această concluzie permite formularea **legii fundamentale a angrenării**:

Pentru ca raportul de transmitere instantaneu să fie constant este necesar ca normala comună în punctul de contact al profilelor să treacă printr-un punct fix, situat pe linia centrelor.

Dacă profilul unei roţi dinţate este dat, se poate determina profilul conjugat, prin înfăşurare, astfel încât să fie respectată legea fundamentală a angrenării. Aceasta însemnă că se poate utiliza o infinitate de perechi de profile de dinţi. Cu toate acestea, în construcţia de maşini, se folosesc aproape excusiv, profilele formate din **evolventa cercului**, datorită avantajelor pe care le au.

În legătură cu procesul de angrenare dintre două profile, se definesc următoarele noţiuni.

• **Linie de angrenare** – locul geometric (traiectoria) punctului de contact.

• **Unghi de angrenare** (α_w) – unghiul format între normala comună în punctul de contact şi o dreaptă perpendiculară pe linia centrelor (Fig.4.10).

4.1.3.2. Utilizarea evolventei cercului ca profil de dinte

■ Evolventa cercului. Definiţie, ecuaţii, proprietăţi

Evolventa cercului (*) **este curba descrisă de un punct care aparţine unei drepte (dreaptă generatoare), care se rostogoleşte fără alunecare peste un cerc (cerc de bază).**

Ecuaţiile evolventei se deduc pe baza Fig.4.11 în care este reprezentat cercul de bază C_b, dreapta generatoare PK şi punctul P care descrie evolventa. Coordonatele polare ale punctului curent P sunt unghiul θ şi raza r, care se exprimă în funcţie de raza de bază r_b şi de unghiul α format între razele OP şi OK. Având în vedere că arcul $\widehat{P_bK}$ şi segmentul PK au lungimi egale deoarece se rostogolesc unul peste altul fără alunecare, se poate scrie

$$\theta = \frac{\widehat{P_bK}}{r_b} - \alpha = \frac{PK}{r_b} - \alpha = tg\alpha - \alpha .$$

---

*) *În cele ce urmeză se va folosi termenul simplificat **evolventă**, în loc de **evolventa cercului***

Funcția **tgα – α** se numeşte **involută** şi se notează **invα**. La această relație se asociază expresia razei r dedusă din triunghiul dreptunghic OPK, obtinând ecuațiile parametrice ale evolventei în coordonate polare,

$$\begin{cases} \theta = \mathrm{inv}\alpha \\ r = \dfrac{r_b}{\cos\alpha} \end{cases} \tag{4.14}$$

în care parametrul α are semnificația menționată – unghiul dintre raza punctului curent P şi raza punctului de tangență K, a dreaptei generatoare cu cercul de bază.

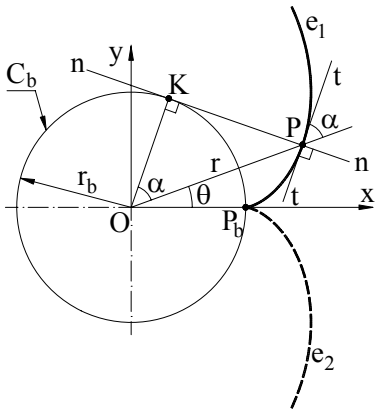


Fig. 4.11

Aplicând relațiile,

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta,$$

se deduc ecuațiile parametrice în coordonate rectangulare,

$$\begin{aligned} x &= r_b(\cos t + t\cdot\sin t) \\ y &= r_b(\sin t - t\cdot\cos t), \end{aligned} \tag{4.15}$$

în care parametrul t este

$$t = \alpha + \theta = \mathrm{tg}\alpha\,.$$

Evolventa are o serie de proprietăți importante în contextul utilizării ei ca profil de roată dințată, pe care le menționăm în continuare.

1) Evolventa are două ramuri infinite e_1 şi e_2, separate printr-un punct de întoarcere P_b, situat pe cercul de bază,

2) În ecuațiile evolventei intervine un singur parametru constant – raza de bază r_b. Aceasta înseamnă că forma evolventei este determinată numai de mărimea cercului de bază.

3) Normala la evolventă în P este tangenta la cercul de bază PK sau dreapta generatoare, iar centrul de curbură este în punctul de tangență K. Pentru a demonstra aceste afirmații, se calculează panta normalei la evolventă în P (A.10),

$$m_n = -\frac{x'(t)}{y'(t)}\,.$$

Derivatele $x'(t)$ şi $y'(t)$ rezultă din expresiile (4.15)

$$x'(t) = r_b\cdot t\cos t$$
$$y'(t) = r_b\cdot t\sin t,$$

astfel încât se obține,

$$m_n = -\frac{1}{\text{tg } t} = -\frac{1}{\text{tg } (\alpha+\theta)}.$$

Această relație arată că normala în P este perpendiculară pe raza OK, deci coincide cu tangenta la cercul de bază. Raza de curbură se calculează cu relația (A.11)

$$R_C = \frac{\left(x'(t)^2 + y'(t)^2\right)^{3/2}}{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}$$

în care $x''(t)$ şi $y''(t)$ sunt

$$x''(t) = r_b(\cos t - t\sin t)$$

$$y''(t) = r_b(\sin t + t\cos t).$$

După efectuarea calculelor se obține

$$R_C = r_b t = r_b \cdot \text{tg}\alpha = PK,$$

care arată că centrul de curbură este în K.

Dacă r_b tinde la infinit, adică cercul de bază devine o dreaptă, R_C tinde, de asemenea, la infinit, deci şi evolventa se transformă într-o dreaptă.

4) Cunoscând direcția normalei la evolventă, se poate da o altă interpretare parametrului α - unghiul dintre raza OP şi tangenta la evolventă în P. În cazul în care evolventa este utilizată ca profil de dinte, acest unghi se numeşte **unghi de presiune**.

Din ecuațiile (4.14) rezultă că pe cercul de bază ($r = r_b$), unghiul de presiune $\alpha = 0$.

5) Evolventa poate fi generată şi prin înfăşurare. Dacă ataşăm dreptei generatoare, o altă dreaptă, perpendiculară pe prima în punctul P, acesta se suprapune peste tangenta la evolventă. Astfel, la rostogolirea dreptei generatoare peste cercul de bază, dreapta suplimentară înfăşoară evolventa.

■ Verificarea legii fundamentale a angrenării în cazul profilelor evolventice

Se consideră un angrenaj (Fig.4.12), având profilele de forma unor evolvente generate cu ajutorul cercurilor de bază C_{b1} şi C_{b2}, coaxiale cu roțile. Normala comună în punctul de contact P trebuie să fie tangentă la ambele cercuri de bază. Cum această dreaptă (K_1K_2) este fixă, punctul ei de intersecție cu linia centrelor, este de asemenea fix, şi reprezintă punctul de rostogolire C al angrenajului. Prin urmare, legea fundamentală a angrenării este respectată.

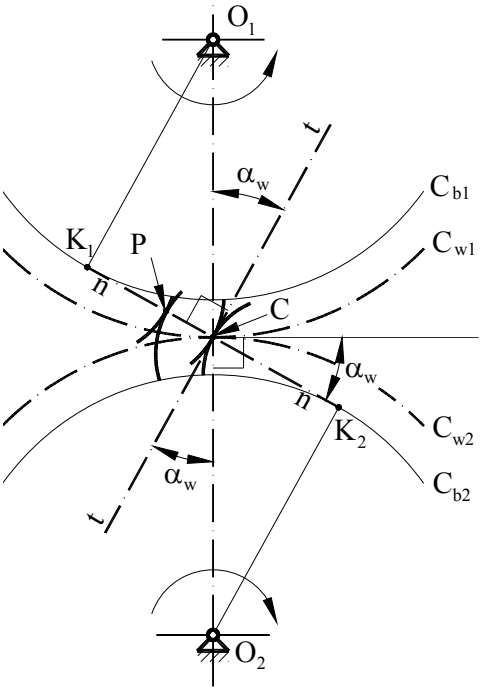


Fig. 4.12

Linia de angrenare a angrenajului evolventic coincide cu tangenta comună la cercurile de bază K_1K_2, deoarece punctul de contact P aparţine permanent acestei drepte invariabile. Datorită formei rectilinii, linia de angrenare se numeşte **dreaptă de angrenare**.

Unghiul de angrenare α_w, este constant, deoarece normala comună în punctul de contact este fixă.

Să considerăm cele două profile evolventice, reprezentate când punctul de contact concide cu punctul de rostogolire C. Tangenta comună tt, formează cu razele O_1C şi O_2C unghiurile de presiune ale profilelor pe cercurile de rostogolire. Acestea sunt, evident, egale între ele şi egale cu unghiul de angrenare α_w.

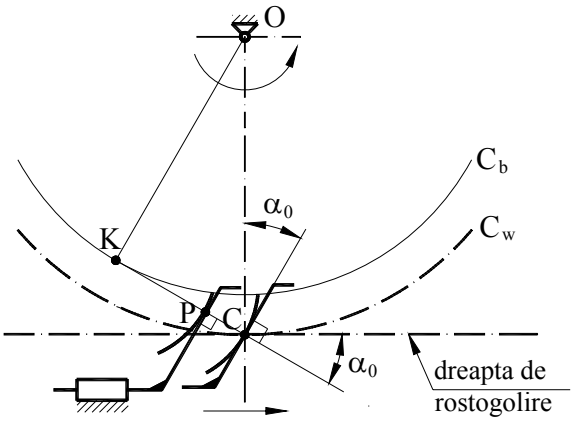


Fig. 4.13

În sistemul angrenajelor evolventice, un rol important îl are cremaliera – elementul dințat cu mişcare de translație. Se poate arăta că profilul cremalierei în angrenare cu o roată evolventică este rectiliniu. Să considerăm un astfel de angrenaj (Fig.4.13). Normala comună în punctul de contact P, trebuie să fie simultan, tangentă la cercul de bază al roții şi perpendiculară pe profilul rectiliniu al cremalierei. Deoarece direcția profilului cremalierei este invariabilă datorită mişcării de translație, normala comună este o dreaptă fixă. Desigur, punctul ei de intersecție cu linia centrelor, este de asemenea fix, iar legea fundamentală a angrenării este verificată. În acest caz, linia centrelor se consideră dreapta care trece prin centrul roții O, şi este perpendiculară pe direcția vitezei cremalierei. În punctul de rostogolire C, sunt tangente, cercul de rostogolire al roții C_w şi dreapta de rostogolire a cremalierei.

Proprietățile evidențiate la angrenajul format din două roți evolventice, se regăsesc şi în acest caz. Linia de angrenare este normala comună invariabilă CK şi poartă denumirea de **dreaptă de angrenare**. Unghiul de angrenare este constant şi este egal cu unghiul de înclinare al profilului cremalierei în raport cu o dreaptă perpendiculară pe direcția de deplasare, α_0. Unghiul de presiune de rostogolire al profilului roții, este de asemenea, egal cu unghiul α_0.

4.1.3.3. Definirea geometrică a roții dințate cilindrice cu dinți drepți

- **Cremaliera de referință**

Cremaliera de referință este o cremalieră standardizată (STAS 821-82), cu profile rectilinii (Fig.4.14), care serveşte pentru definirea geometrică a roților dințate evolventice. Elementele geometrice ale danturii se definesc în raport cu **dreapta de referință**. Pe această dreaptă, grosimea dintelui şi lățimea golului dintre dinți sunt egale.

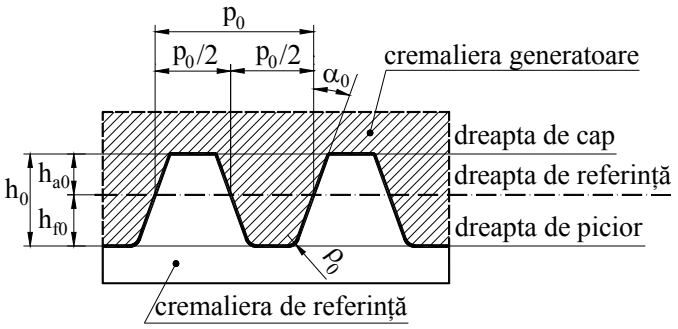


Fig. 4.14

Parametrii geometrici ai cremalierei de referință sunt:

• **Pasul p_0** – distanța dintre două profile omoloage (de aceeaşi parte a dintelui) consecutive, măsurată pe dreapta de referință sau pe o dreaptă paralelă cu aceasta;

• **Înălțimea dintelui h_0 –** distanța dintre dreapta de cap şi dreapta de picior;

• **Înălțimea de referință a capului dintelui h_{a0}** – distanța dintre dreapta de referință şi dreapta de cap;

• **Înălțimea de referință a piciorului dintelui h_{f0}** – distanța dintre dreapta de referință şi dreapta de picior;

• **Raza de racordare la piciorul dintelui ρ_0-** raza cercului de racordare dintre profilul dintelui şi dreapta de picior;

• **Unghiul de înclinare a profilului α_0 –** unghiul profilului, format cu o dreaptă perpendiculară pe dreapta de referință.

Înălțimea de referință a capului h_{a0}, este mai mică decât înălțimea de referință a piciorului h_{f0}, iar diferența dintre ele,

$$h_{f0} - h_{a0} = c_0$$

se numeşte **joc radial**.

Parametrii geometrici ai cremalierei de referință se calculează în funcție de o mărime unică numită **modul**. Modulul este un parametru standardizat (STAS 822-82), cu dimensiune de lungime, măsurat în [mm].

Formulele de calcul ale parametrilor geometrici sunt:

$$p_0 = \pi \cdot m\,,\ (\pi = 3{,}141592654) \tag{4.16}$$

$$h_{a0} = h^*_{a0} m, \quad (h^*_{a0} = 1) \tag{4.17}$$

$$c_0 = c^*_0 m \quad (c^*_0 = 0{,}25) \tag{4.18}$$

$$h_{f0} = (h^*_{f0} + c^*_0) \cdot m \tag{4.19}$$

$$h = (2h^*_{a0} + c^*_0) \cdot m \tag{4.20}$$

$$\rho = \rho^*_0 \quad (\rho^*_0 = 0{,}38) \tag{4.21}$$

$$\alpha_0 = 20^o \tag{4.22}$$

Cremaliera complementară cu cea de referință, construită astfel încât dinții acesteia au forma golurilor dintre dinții cremalierei de referință, se numeşte **cremalieră generatoare**. Desigur cele două cremaliere sunt identice din punct de vedere al dispunerii profilelor în raport cu dreapta de referință.

- **Parametrii geometrici principali ai roții dințate cilindrice exterioare cu dinți drepți**

Roțile dințate cilindrice în evolventă formează un sistem şi se definesc din condiția de angrenare fictivă cu cremaliera de referință. Angrenajul de definire (Fig.4.15), se consideră fără joc între flancuri (profile), şi cu joc radial standardizat (c_0). Profilele roții se obțin ca înfăşurătoare ale profilelor rectilinii ale cremalierei de referință, în mişcarea relativă dintre cele două elemente. Geometria roții depinde de forma cremalierei de referință (care a fost descrisă în paragraful precedent), de mişcarea relativă dinte cele două elemente şi de poziția cremalierei de referință față de roată. Mişcarea relativă este determinată de rostogolirea cercului de rostogolire al roții peste dreapta de rostogolire a cremalierei. Cercul de rostogolire al roții în procesul de definire se numeşte **cerc de divizare**. Poziția cremalierei de referință este determinată de distanța dintre dreapta de referință şi dreapta de rostogolire, care este tangentă la cercul de divizare. Această distanță se numeşte **deplasare de profil (X).** Prin convenție, deplasarea se consideră pozitivă dacă dreapta de referință este în exteriorul cercului de divizare (ca în Fig.4.15), şi negativă dacă îl intersectează.

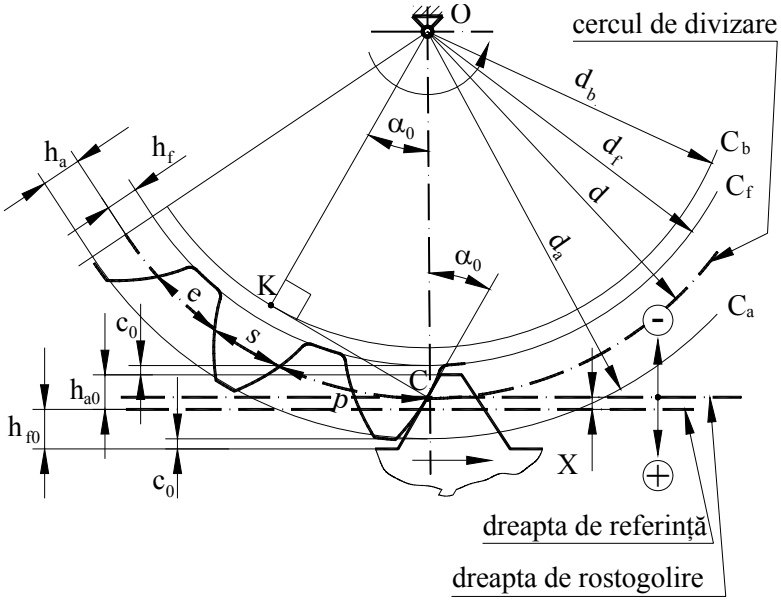


Fig. 4.15

Parametrii geometrici principali ai roții dințate se definesc în raport cu cercul de divizare şi se exprimă în funcție de modulul cremalierei de referință care este şi al roții, după cum urmează.

• **Deplasarea de profil, X** (definită anterior)

$$X = x \cdot m \tag{4.23}$$

Parametrul x se numeşte **coeficientul deplasării de profil sau deplasarea specifică**, iar adoptarea sa, pentru cele două roți ale angrenajului, constituie o problemă esențială a sintezei angrenajului.

• **Pasul de divizare, p** – arcul cercului de divizare, limitat de două profile omoloage (de aceeaşi parte a dintelui), consecutive. Datorită rostogolirii fără alunecare a dreptei de rostogolire a cremalierei peste cercul de divizare al roții, pasul cremalierei se reproduce pe cercul de divizare,

$$p = p_0$$

$$p = \pi \cdot m \quad (\pi=3{,}141592654) \tag{4.24}$$

• **Diametrul de divizare, d** (definit anterior) – rezultă ca raportul dintre lungimea cercului de divizare, $z \cdot p$ (z – numărul de dinți ai roții) şi numărul π,

$$d = \frac{z \cdot p}{\pi} = \frac{z \cdot \pi \cdot m}{\pi} = m \cdot z$$

$$d = m \cdot z\,. \tag{4.25}$$

• **Înălțimea de divizare a capului dintelui, h_a** – distanța radială dintre cercul de divizare şi cercul de cap. Din Fig.4.15 se obține

$$h_a = h_{f0} - c_0 + X = h_{a0} + X$$

$$h_a = \left(h_{a0}^* + x\right)m\,. \tag{4.26}$$

• **Înălțimea de divizare a piciorului dintelui, h_f** – distanța radială dintre cercul de divizare şi cercul de picior

$$h_f = h_{a0} + c_0 - X$$

$$h_f = \left(h_{a0}^* + c_0^* - x\right)m\,. \tag{4.27}$$

• **Diametrul de cap, d_a**

$$d_a = d + 2 \cdot h_a$$

$$d_a = \left(z + 2 \cdot h_{a0}^* + 2 \cdot x\right)m \tag{4.28}$$

• **Diametrul de picior, d_f,**

$$d_f = d - 2 \cdot h_f$$

$$d_f = \left(z - 2 \cdot h_{a0}^* - 2 \cdot c_0^* + 2 \cdot x\right)m \tag{4.29}$$

• **Arcul de divizare al dintelui, s** – arcul cercului de divizare limitat de profilele unui dinte. În ipoteza că jocul dintre profile este nul, arcul dintelui pe cercul de divizare (s) este egal cu lățimea golului dintre dinții cremalierei pe dreapta de rostogolire (e_{w0}). Din Fig. 4.16 rezultă

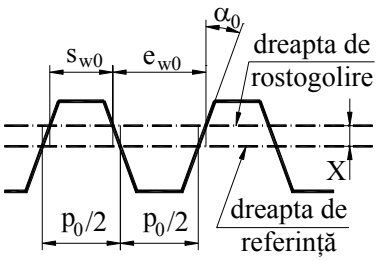


Fig. 4.16

$$s = e_{w0} = \frac{p_0}{2} + 2X \cdot tg\alpha_0$$

$$s = \left(\frac{\pi}{2} + 2x \cdot tg\alpha_0\right) m . \qquad (4.30)$$

• **Arcul de divizare al golului dintre dinți, e** – arcul cercului de divizare limitat de profilele unui gol dintre dinți. Printr-un raționament similar celui expus la determinarea parametrului s, din Fig. 4.16 rezultă

$$e = s_{w0} = \frac{p_0}{2} - 2X \cdot tg\alpha_0$$

$$e = \left(\frac{\pi}{2} - 2x \cdot tg\alpha_0\right) m . \qquad (4.31)$$

• **Unghiul de presiune de divizare,** α_0 - unghiul dintre tangenta la profil în punctul situat pe cercul de divizare şi raza acestui cerc. Aşa cum rezultă din Fig.4.15 acest unghi este egal cu unghiul de presiune al profilului cremalierei de referință, α_0.

• **Diametrul de bază, d_b –** diametrul cercului de bază c_b, care intervine la generarea profilului evolventic. Din triunghiul OKC (Fig.4.15), rezultă

$$d_b = d \cdot \cos\alpha_0$$

$$d_b = mz \cdot \cos\alpha_0 \qquad (4.32)$$

Din cele arătate rezultă că geometria roții dințate depinde de trei parametri de bază: **m, z** şi **x**.

• **Modulul m** indică mărimea danturii prin intermediul parametrilor p, s, e, h_a, şi h_f.

• **Numărul de dinți z,** împreună cu **modulul m** determină mărimea roții, prin itermediul parametrilor d, d_a, d_f.

• **Coeficientul de deplasare x** determină forma dintelui. Din (4.32) rezultă că diametrul de bază nu depinde de coeficientul de deplasare. Aceasta înseamnă că profilele dinților cu coeficienți de deplasare diferiți, provin din aceeaşi evolventă, generată pornind de la un cerc de bază unic, aşa cum se observă în Fig.4.17, unde sunt reprezentate trei danturi (un plin şi un gol), având acelaşi modul şi trei deplasări diferite. Comparativ cu dintele având deplasare

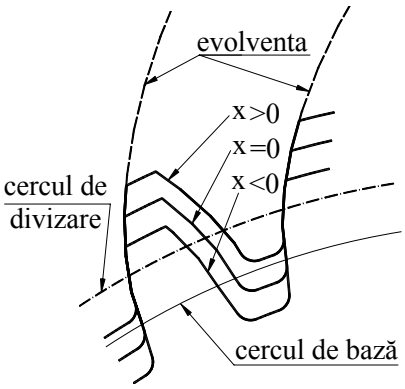


Fig. 4.17

zero, dintele cu deplasare pozitivă are vârful mai ascuţit şi baza mai lată, iar dintele cu deplasare negativă are vârful mai gros şi baza mai îngustă.

Aceste consideraţii legate de forma dintelui au impicaţii legate de calculul de rezistenţă al roţii dinţate.

Observaţii

1) Definirea roţii dinţate se poate face şi din condiţia de angrenare fictivă, fără joc radial, cu cremaliera generatoare, obţinând evident aceiaşi parametri geometrici principali, ca şi în cazul folosirii cremalierei de referinţă. În acest caz rezultă şi forma curbei de racordare de la piciorul dintelui roţii. Acest lucru nu are o importanţă deosebită, deoarece această curbă este determinată de procedeul de prelucrare şi de geometria sculei, şi poate fi diferită de cea care rezultă la definirea roţii cu ajutorul cremalierei generatoare.

2) Pentru prelucrarea roţilor dinţate, se foloseşte în principal, metoda rulării, care se bazează, ca şi definirea geometrică, pe principiul "imitării" angrenării. Scula aşchietoare provine dintr-un element dinţat (cremalieră, roată dinţată sau melc). Între sculă şi semifabricat se imprimă o mişcare relativă corespunzătoare angrenării dintre cele două elemente. Flancurile roţii rezultă ca înfăşurătoare ale suprafeţelor descrise de muchiile aşchietoare ale sculei.

■ Parametrii geometrici ai roţii dinţate pe un cerc oarecare

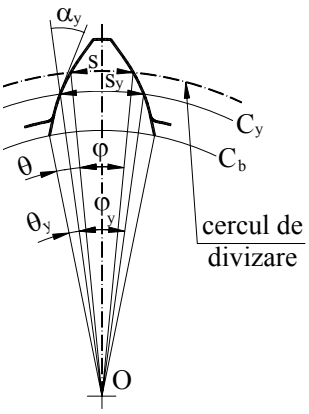


Fig. 4.18

Se consideră un cerc oarecare, concentric cu roata, C_y. Ne propunem să determinăm diametrul d_y, pasul p_y, arcul dintelui s_y şi arcul golului e_y, în funcţie de unghiul de presiune α_y.

Având în vedere ecuaţia razei unui punct curent al evolventei (4.14), se poate scrie

$$d_y = \frac{d_b}{\cos\alpha_y} = mz\frac{\cos\alpha_0}{\cos\alpha_y}. \qquad (4.33)$$

Pasul p_y se exprimă în funcţie de diametrul d_y,

$$p_y = \frac{\pi d_y}{z} = \pi m \frac{\cos\alpha_0}{\cos\alpha_y}. \tag{4.34}$$

Pe baza Fig.4.18 se scrie

$$s_y = \varphi_y \frac{d_y}{2}$$

$$\varphi_y = \varphi + 2\left(\theta - \theta_y\right) = 2\frac{s}{d} + 2\left(\mathrm{inv}\alpha_0 - \mathrm{inv}\alpha_y\right).$$

Expresiile lui φ_y şi d_y (4.34), se introduc în formula lui s_y, iar d şi s se exprimă conform cu (4.25) şi (4.30). Astfel se obține relația pentru arcul dintelui,

$$s_y = mz\frac{\cos\alpha_0}{\cos\alpha_y}\left(\frac{\pi}{2z} + \frac{2x \cdot \mathrm{tg}\alpha_0}{z} + \mathrm{inv}\alpha_0 - \mathrm{inv}\alpha_y\right). \tag{4.35}$$

Arcul golului rezultă pe baza relației

$$p_y = s_y + e_y,$$

înlocuind p_y şi s_y, cu expresiile lor,

$$e_y = mz\frac{\cos\alpha_0}{\cos\alpha_y}\left(\frac{\pi}{2z} - \frac{2x \cdot \mathrm{tg}\alpha_0}{z} - \mathrm{inv}\alpha_0 + \mathrm{inv}\alpha_y\right). \tag{4.36}$$

Formulele deduse se pot utiliza, printre altele, pentru a determina arcul dintelui pe cercul de cap, s_a.

Din formula (4.33) se deduce unghiul de presiune la nivelul cercului de cap α_a,

$$\cos\alpha_a = \frac{mz\cos\alpha_0}{d_a},$$

care se introduce în relația (4.35), obținând s_a,

$$s_a = mz\frac{\cos\alpha_0}{\cos\alpha_a}\left(\frac{\pi}{2z} + \frac{2x \cdot \mathrm{tg}\alpha_0}{z} + \mathrm{inv}\alpha_0 - \mathrm{inv}\alpha_a\right).$$

4.1.3.4. Angrenajul paralel exterior

- **Parametrii geometrici**

Parametrii geometrici ai angrenajului sunt unghiul de angrenare (α_w), diametrele de rostogolire (d_{w1} şi d_{w2}) şi distanța dintre axele de rotație (a) (Fig.4.19).

Formarea angrenajului se face din condiția absenței jocului dintre flancuri (profile). În această ipoteză, arcul de rostogolire al dintelui roții 1 trebuie să fie egal cu arcul de rostogolire al golului roții 2

$s_{w1} = e_{w2}$.

Această afirmație se susține pe baza Fig.4.19, în care sunt surprinse două profile conjugate, când punctul de contact este în C. Dacă admitem că

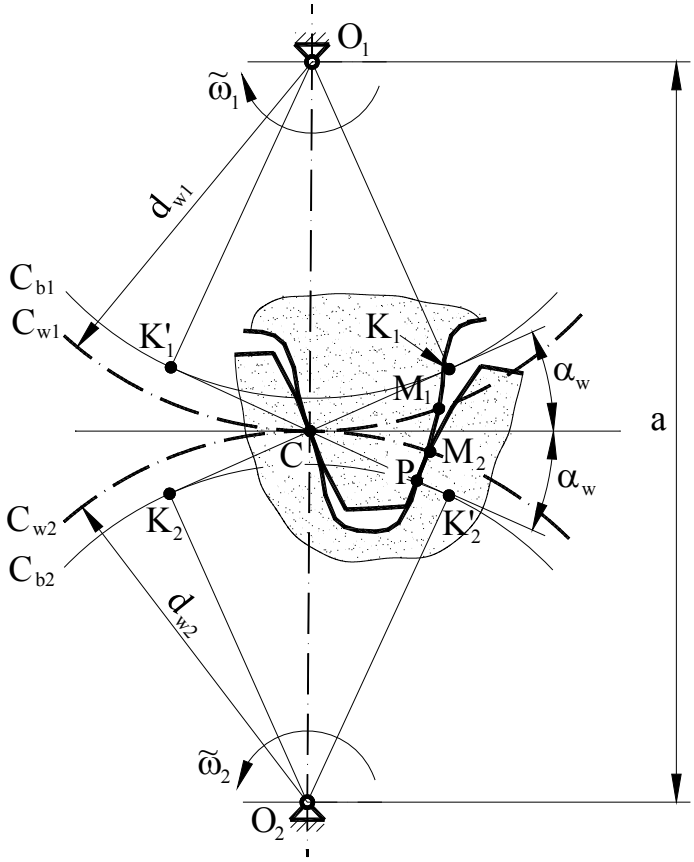


Fig. 4.19

jocul între profile este nul, profilele anti-omoloage cu primele, sunt de asemenea în contact, în punctul P. În procesul de angrenare, punctul de contact se deplasează pe linia de angrenare $K'_1K'_2$ din poziția P în poziția C. În acelaşi timp punctul M_1 parcurge arcul $\widehat{M_1C} = s_{w1}$, iar punctul M_2 – arcul $\widehat{M_2C} = e_{w2}$. Aceste arce sunt egale, fiind parcurse în acelaşi timp cu aceeaşi viteză, deoarece aparțin cercurilor de rostogolire.

Cele două arce se exprimă cu ajutorul formulelor (4.35) şi (4.36), având în vedere că unghiurile de presiune de rostogolire sunt egale cu unghiul de angrenare (par. 4.1.3.3), $\alpha_{w1} = \alpha_{w2} = \alpha_w$, iar modulul pentru două roți conjugate este acelaşi $m_1 = m_2 = m$,

$$mz_1 \frac{\cos\alpha_0}{\cos\alpha_w}\left(\frac{\pi}{2z_1} + \frac{2x_1 \cdot tg\alpha_0}{z_1} + inv\alpha_0 - inv\alpha_w\right) =$$

$$= mz_2 \frac{\cos\alpha_0}{\cos\alpha_w}\left(\frac{\pi}{2z_2} - \frac{2x_2 \cdot tg\alpha_0}{z_2} - inv\alpha_0 + inv\alpha_w\right)$$

Din această ecuație se obține unghiul de angrenare α_w, prin intermediul funcției involută

$$inv\alpha_w = inv\alpha_0 + 2\frac{x_1 + x_2}{z_1 + z_2} tg\alpha_0 . \tag{4.37}$$

Diametrele de rostogolire se determină cu formula (4.33),

$$\begin{aligned} d_{w1} &= mz_1 \frac{\cos\alpha_0}{\cos\alpha_w} \\ d_{w2} &= mz_2 \frac{\cos\alpha_0}{\cos\alpha_w} \end{aligned} \tag{4.38}$$

În fine, distanța dintre axe, rezultă în funcție de diametrele de rostogolire,

$$\begin{aligned} a &= \frac{d_{w1}}{2} + \frac{d_{w2}}{2} \\ a &= m\frac{\cos\alpha_0}{\cos\alpha_w}\left(\frac{z_1 + z_2}{2}\right). \end{aligned} \tag{4.39}$$

Lungimea a_0, definită ca suma razelor de divizare,

$$a_0 = m\left(\frac{z_1 + z_2}{2}\right), \tag{4.40}$$

se numeşte **distanța dinte axe de referință**.

Diferența $(a - a_0)$ se numeşte modificarea distanței dintre axe, iar raportul,

$$y = \frac{a - a_0}{m} = \left(\frac{z_1 + z_2}{2}\right)\left(\frac{\cos\alpha_0}{\cos\alpha_w} - 1\right)$$

este **coeficientul modificării distanței dintre axe**. Distanța dintre axe se poate exprima în funcție de a_0 şi y,

$$a = a_0 + my. \tag{4.42}$$

■ Angrenarea cu joc radial standardizat

Formarea angrenajului din condiția eliminării jocului dintre profile neglijează condiția de a realiza un joc radial de valoare standardizată, c_0. Pentru a rezolva această problemă, se calculează din nou distanța dintre axe (a_x), pe baza acestei condiții. Urmărind schema angrenajului din Fig.4.20, rezultă

$$a_x = \frac{d_{a1}}{2} + \frac{d_{f2}}{2} + c_0 .$$

Înlocuind d_{a1}, d_{f2} şi c_0 cu expresiile lor, se obține

$$a_x = m\frac{z_1 + z_2}{2} + m(x_1 + x_2) = a_0 + m(x_1 + x_2). \tag{4.43}$$

Analiza relațiilor (4.42) şi (4.43) arată că $a_x \geq a$ (ANEXA 4). Prin urmare, montarea roților la distanța dintre axe, calculată cu formula (4.42), conduce la micşorarea jocului radial în raport cu valoarea c_0. Pentru a obține valoarea necesară, se operează o reducere a înălțimii capului de divizare al dintelui, pentru ambele roți, cu lungimea,

$$a_x - a = a_0 + (x_1 + x_2)m - (a_0 + ym) = m(x_1 + x_2 - y).$$

În felul acesta, parametrii h_{a1}, h_{a2}, d_{a1}, şi d_{a2} se recalculează în raport cu valorile stabilite la definirea roții,

$$h_{a1} = m\left(h_{a0}^* + x_1\right) - m(x_1 + x_2 - y)$$

$$\begin{cases} h_{a1} = m\left(h_{a0}^* - x_2 + y\right) \\ h_{a2} = m\left(h_{a0}^* - x_1 + y\right) \end{cases} \tag{4.44}$$

$$d_{a1} = z_1 m + 2h_{a1}$$

$$\begin{cases} d_{a1} = m\left(z_1 + 2h_{a0}^* - 2x_2 + 2y\right) \\ d_{a2} = m\left(z_2 + 2h_{a0}^* - 2x_1 + 2y\right) \end{cases} \tag{4.45}$$

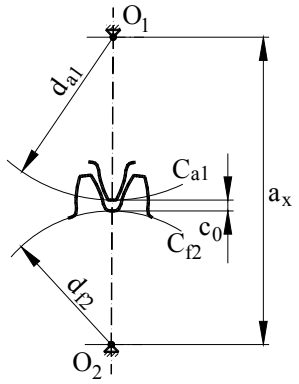


Fig. 4.20

Angrenajele cu $x_1 = x_2 = 0$ se numesc angrenaje zero sau nedeplasate, iar angrenajele cu $x_1 + x_2 = 0$, se numesc zero deplasate. În ambele cazuri se înregistrează $\alpha_w = \alpha_0$, $d_{w1} = d_1$, $d_{w2} = d_2$, $a = a_0 = a_x$ şi y = 0.

4.1.3.5. Angrenajul paralel interior

Aşa cum am arătat (par. 4.1.2), angrenajele interioare sunt formate dintr-o roată cu dantură exterioară şi o roată cu dantură interioară, şi au o utilizare practică mult mai redusă decât angrenajele exterioare. În cele ce urmează se vor pune în evidenţă particularităţile angrenajului interior, urmărind aceeaşi problematică pe care am prezentat-o la cel exterior.

Roata dinţată interioară se defineşte în acelaşi mod ca şi roata exterioară, pe baza cremalierei de referinţă, inversându-se dinţii cu golurile dintre dinţi. Două roţi, una cu dantură exterioară şi cealaltă cu dantură interioară, având aceleaşi valori pentru m, z, şi x, au acelaşi cerc de divizare, iar profilele lor sunt congruente (Fig.4.21). Cercul de cap al unei roţi, nu se suprapune însă pe cercul de picior al celeilalte, între ele fiind distanţa radială c_0.

Parametrii geometrici principali ai roţii cu dantură interioară se definesc în acelaşi mod ca şi cei ai roţii cu dantură exterioară, iar expresiile pentru X, p, α_0 şi d_b rămân neschimbate. Ceilalţi parametri se calculează cu formulele care urmează, deduse pe baza Fig.4.21.

$$h_a = h_{a2} = h_{f1} - c_0 = \left(h_{a0}^* - x\right)m \tag{4.46}$$

$$h_f = h_{f2} = h_{a1} + c_0 = \left(h_{a0}^* + c_0^* + x\right)m \tag{4.47}$$

$$d_a = d_{a2} = d - 2h_a = \left(z - 2h_{a0}^* + 2x\right)m \tag{4.48}$$

$$d_f = d_{f2} = d + 2h_f = \left(z + 2h_{a0}^* + 2c_0^* + 2x\right)m \tag{4.49}$$

$$s = s_2 = e_1 = \left(\frac{\pi}{2} - 2x\,tg\alpha_0\right)m \tag{4.50}$$

$$e = e_2 = s_1 = \left(\frac{\pi}{2} + 2x\,tg\alpha_0\right)m \tag{4.51}$$

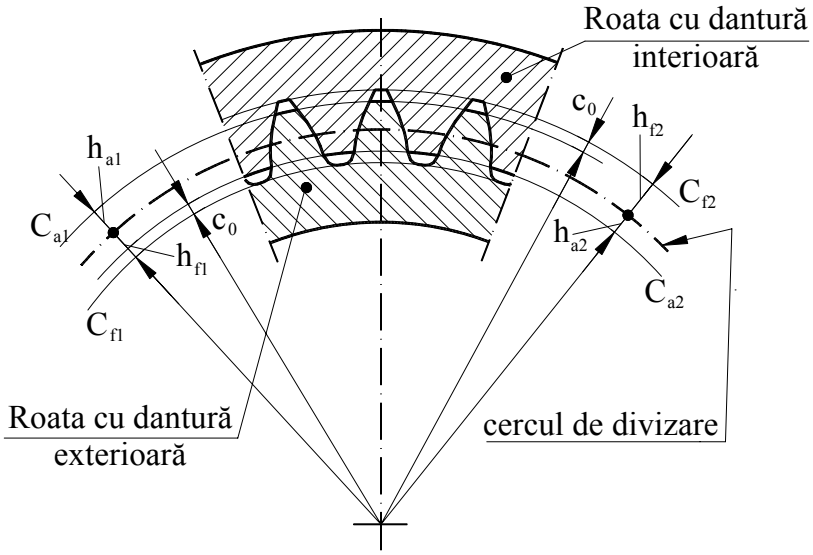


Fig. 4.21

Dintre parametrii definiţi pe un cerc oarecare, diametrul (d_y) şi pasul (p_y) au aceleaşi expresii, iar formulele pentru s_y şi e_y (4.35, 4.36) se inversează.

În aceste condiţii, unghiul de angrenare, α_w (Fig.4.22), dedus din condiţia absenţei jocului dintre profile, este

$$inv\alpha_w = inv\alpha_0 + 2\frac{x_2 - x_1}{z_2 - z_1}tg\alpha_0, \tag{4.52}$$

în care x_1 şi z_1 se referă la roata cu dantură exterioară, iar x_2 şi z_2 – la roata cu dantură interioară. Diametrele de rostogolire se calculează cu aceleaşi formule (4.38), astfel încât distanţa dintre axe (Fig.4.22) are expresia

$$a = \frac{d_{w2}}{2} - \frac{d_{w1}}{2} = m\frac{z_2 - z_1}{2}\frac{\cos\alpha_0}{\cos\alpha_w}, \tag{4.53}$$

care se poate pune şi sub forma cunoscută

$$a = a_0 + my,$$

în care

$$a_0 = m\left(\frac{z_2 - z_1}{2}\right), \tag{4.54}$$

$$y = \left(\frac{z_2 - z_1}{2}\right)\left(\frac{\cos\alpha_0}{\cos\alpha_w} - 1\right). \tag{4.55}$$

Distanța dintre axe, a_x, calculată din condiția angrenării cu joc standardizat, rezultă

$$a_x = \frac{d_{f2}}{2} - \frac{d_{a1}}{2} - c_0 = a_0 + m\left(x_2 - x_1\right). \tag{4.56}$$

Deoarece $a_x \geq a$, înseamnă că angrenajul montat fără joc între profile, are joc radial mai mare decât cel standardizat. Pentru a-l aduce la valoarea standardizată, ar trebui operată o majorare a înălțimii dinților, care nu se aplică pentru că nu conferă avantaje în funcționare.

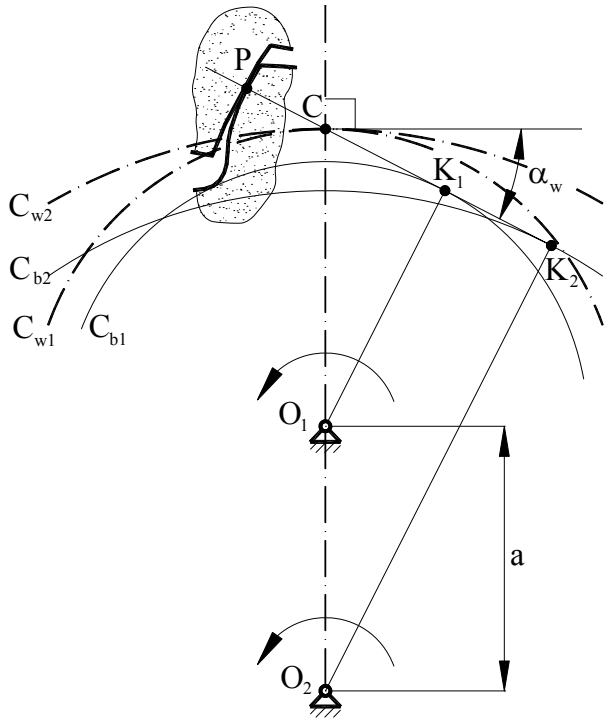


Fig. 4.22

4.1.3.6. Formarea şi întreruperea contactului dintre dinţi. Continuitatea angrenării

Fenomenul de angrenare se produce prin contactul succesiv al perechilor de profile conjugate. Ne propunem să analizăm procesul de formare şi de întrerupere a contactului şi implicaţiile sale asupra funcţionării angrenajului, considerând un angrenaj exterior compus din roata conducătoare 1 şi roata condusă 2 (Fig.4.23). Aşa cum am arătat, locul geometric al punctului de contact este dreapta de angrenare K_1K_2 (par. 4.1.3.2.). Pe de altă parte, contactul poate avea loc numai în zona în care există profile materializate. Aceasta este limitată de cercurile de cap c_{a1} şi c_{a2}, având forma de lentilă. Ca urmare poziţiile limită ale punctului de contact se găsesc la intersecţia dreptei de angrenare cu cele două cercuri de cap. Contactul se formează în punctul A, aflat la intersecţia dreptei de angrenare cu cercul de cap al roţii conduse c_{a2}, şi se întrerupe în punctul E – intersecţia dreptei de angrenare cu cercul de cap al roţii conducătoare, c_{a1}. Segmentul $g = AE$, pe care se produce contactul efectiv se

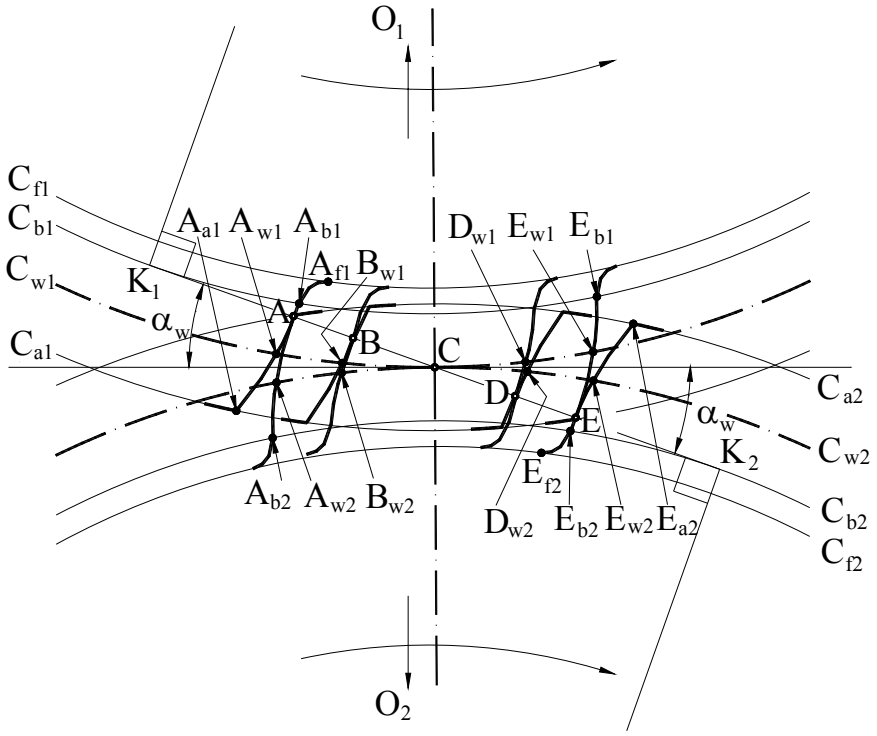


Fig. 4.23

numeşte **segment de angrenare**. Segmentele AC şi CE se numesc **segment de intrare în angrenare**, respectiv **segment de ieşire din angrenare**. Lungimea segmentului de angrenare rezultă pe baza Fig.4.23,

$$g = AE = K_1K_2 - \left(K_1K_2 - K_2A\right) - \left(K_1K_2 - K_1E\right) = K_2A + K_1E - K_1K_2 .$$

$$g = \sqrt{r_{a1}^2 - r_{b1}^2} + \sqrt{r_{a2}^2 - r_{b2}^2} - a\sin\alpha_w , \qquad (4.57)$$

în care a este distanţa dintre axe,

$$a = r_{w1} + r_{w2} .$$

Se observă, că pe profilul roţii conducătoare 1, contactul se formează în zona piciorului dintelui şi se deplasează până la nivelul cercului de cap, iar pe profilul roţii conduse 2, contactul se formează pe cercul de cap şi se deplasează înspre piciorul dintelui. Profilele AA_{a1} şi EE_{a2}, care participă la angrenare, se numesc **profile active**, iar profilele AA_{f1} şi EE_{f2}, care nu participă la angrenare, se numesc **profile inactive**. Desigur, profilele inactive nu este necesar să fie evolventice. Razele punctelor care delimitează cele două feluri de profile se numesc **raze active**. În cazul roţii 1, raza activă r_{ac1} este raza punctului A,

$$r_{ac1} = r_A = \sqrt{r_{b1}^2 + K_1A^2} = \sqrt{r_{b1}^2 + \left(K_1K_2 - K_2A\right)^2}$$

$$r_{ac1} = \sqrt{r_{b1}^2 + \left(a\sin\alpha_w - \sqrt{r_{a2}^2 - r_{b2}^2}\right)^2} . \qquad (4.58)$$

În cazul roţii 2, raza activă r_{ac2} este raza punctului E,

$$r_{ac2} = r_E = \sqrt{r_{b2}^2 + \left(a\cdot\sin\alpha_w - \sqrt{r_{a1}^2 - r_{b1}^2}\right)^2} \qquad (4.59)$$

Trebuie menţionat că segmentul de angrenare se poate exprima şi în funcţie de razele active,

$$g = K_1K_2 - K_1A - K_2E$$

$$g = a\sin\alpha_w - \sqrt{r_{ac1}^2 - r_{b1}^2} - \sqrt{r_{ac2}^2 - r_{b2}^2} . \qquad (4.60)$$

Arcul parcurs de un punct aparţinând cercului de rostogolire, din momentul formării până în momentul întreruperii contactului, se numeşte **arc de angrenare**. Arcele de angrenare ale celor două roţi sunt egale deoarece sunt parcurse cu aceeaşi viteză (viteza periferică a cercurilor de rostogolire), în aceeaşi perioadă de timp. Având în vedere că în Fig.4.23 este surprinsă aceeaşi pereche de profile conjugate în momentul formării contactului, în A, şi în momentul întreruperii sale, în E, arcele de angrenare sunt

$$\widehat{A_{w1}E_{w1}} = \widehat{A_{w2}E_{w2}} .$$

Lungimea arcului de angrenare se determină pe baza observaţiei că raza oricărui punct al roţii, se roteşte între cele două momente, cu acelaşi unghi.

Deci

$$\sphericalangle A_{w1}O_1E_{w1} = \sphericalangle A_{b1}O_1E_{b1},$$

şi $$\frac{\widehat{A_{w1}E_{w1}}}{r_{w1}} = \frac{\widehat{A_{b1}E_{b1}}}{r_{b1}}.$$

Arcul $\widehat{A_{b1}E_{b1}}$ este egal cu segmentul de angrenare $g = AE$, deoarece se rostogolesc unul peste altul, când se generează evolventele $A_{b1}A_{a1}$ şi $E_{b1}E$, şi prin urmare,

$$\widehat{A_{w1}E_{w1}} = g\frac{r_{w1}}{r_{b1}} = \frac{g}{\cos\alpha_w}. \tag{4.61}$$

Raportul dintre arcul de angrenare şi pasul de rostogolire se numeşte **grad de acoperire (ε)**

$$\varepsilon = \frac{g}{p_w\cos\alpha_w} = \frac{g}{\pi m\cos\alpha_0} = \frac{g}{p_b}, \tag{4.62}$$

în care p_b este pasul pe cercul de bază – acelaşi pentru ambele roți.

Pentru a asigura continuitatea angrenării este necesar, ca în momentul întreruperii contactului unei perechi de profile în E, perechea următoare să fie în angrenare. Să presupunem că această pereche se află în contact în punctul B. Arcele $\widehat{B_{w1}E_{w1}}$ şi $\widehat{B_{w2}E_{w2}}$, reprezintă pasul de rostogolire p_w. Rezultă că angrenarea este continuă dacă arcul de angrenare $\widehat{A_{w1}E_{w1}} > p_w$ sau $\varepsilon > 1$. Practic, limita gradului de acoperire se adoptă mai mare decât unitatea, pentru a lua în considerare abaterile de la valoarea teoretică, cauzate de imprecizie şi deformații, $\varepsilon \geq (1{,}1 \div 1{,}3)$. Este util de precizat semnificația valorii gradului de acoperire care rezultă din calcul, de regulă, fracționară. În momentul formării contactului în A, de către o pereche de profile, perechea anterioară este în contact în D, astfel încât $\widehat{A_{w1}D_{w1}} = \widehat{A_{w2}D_{w2}} = p_w$. Urmărind procesul de angrenare, constatăm că atunci când pe segmentul AB se află o pereche de profile în contact, pe segmentul DE se află de asemenea, o pereche de profile în angrenare, deci angrenarea este **bipară**. Când contactul se produce pe segmentul BD, angrenarea este **monopară**. Calculând arcele $\left(\widehat{A_{w1}B_{w1}} + \widehat{D_{w1}E_{w1}}\right)$ şi $\widehat{B_{w1}D_{w1}}$, raportate la pasul de rostogolire, se ajunge la următoarea interpretare. Angrenarea monopară se desfăşoară pe un arc egal cu $(2-\varepsilon)$ din pasul de rostogolire, iar cea bipară pe un arc egal cu $2\cdot(\varepsilon-1)$ din pasul de rostogolire. De exemplu, dacă $\varepsilon = 1{,}23$, angrenarea monopară se

desfăşoară pe un arc egal cu $(2-\varepsilon)\cdot p_w = 0,77\cdot p_w$ (77% din p_w), iar angrenarea bipară, pe un arc egal cu $2(\varepsilon-1)p_w = 0,46p_w$ (46% din p_w).

În cazul angrenajului interior (Fig.4.24), intervin aceleaşi noţiuni legate de formarea şi întreruperea contactului şi de continuitatea angrenării, cu deosebirea că unele formule de calcul se modifică. Astfel, segmentul de angrenare se determină astfel,

$$g = AE = K_1K_2 + K_1E - K_2A$$

$$g = a\sin\alpha_w + \sqrt{r_{a1}^2 - r_{b1}^2} - \sqrt{r_{a2}^2 - r_{b2}^2}\ . \qquad (4.63)$$

în care $a = r_{w2} - r_{w1}$.

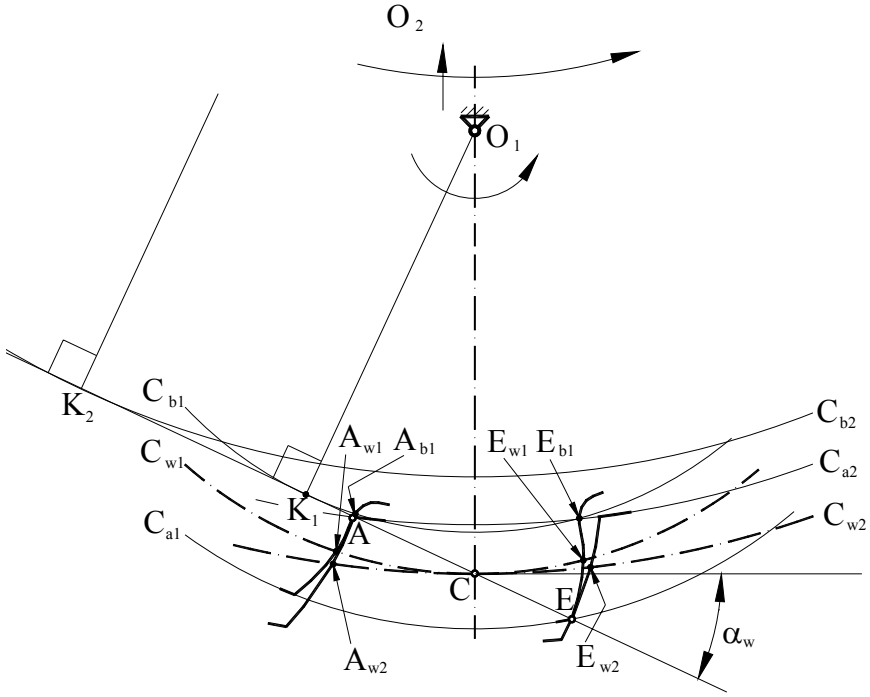


Fig. 4.24

Razele active se calculează cu formulele

$$r_{ac1} = r_A = \sqrt{r_{b1}^2 + K_1A^2} = \sqrt{r_{b1}^2 + (K_2A - K_1K_2)^2}$$

$$r_{ac1} = \sqrt{r_{b1}^2 + \left(\sqrt{r_{a2}^2 - r_{b2}^2} - a\sin\alpha_w\right)^2}\ . \qquad (4.64)$$

$$r_{ac2} = r_E = \sqrt{r_{b2}^2 + K_2E^2} = \sqrt{r_{b2}^2 + \left(K_1K_2 + K_1E\right)^2}$$

$$r_{ac2} = \sqrt{r_{b2}^2 + \left(a\sin\alpha_w + \sqrt{r_{a1}^2 - r_{b1}^2}\right)^2} \ . \qquad (4.65)$$

Aspectele legate de gradul de acoperire rămân neschimbate în raport cu angrenajul exterior, atât în ce priveşte relațiile de calcul, cât şi în ce priveşte interpretarea rezultatelor.

4.1.3.7. Fenomenul de interferență

Interferența în angrenare este fenomenul de pătrundere, teoretică, a unui dinte în dintele conjugat. Deoarece această pătrundere nu este posibilă datorită rigidității flancurilor, se produce o funcționare incorectă, însoțită de vibrații şi zgomot, sau chiar blocarea angrenajului, dacă fenomenul este pronunțat.

În cazul angrenajelor exterioare există două tipuri de interferență – **primară** şi **secundară**.

Interferența primară se înregistrează dacă angrenarea tinde să se producă în afara segmentului K_1K_2, limitat pe dreapta de angrenare, de punctele de tangență cu cercurile de bază. Se consideră angrenajul din Fig.4.25, cu evolventele e_1 şi e_2 materializate ca profile de dinți. Să presupunem că sensurile

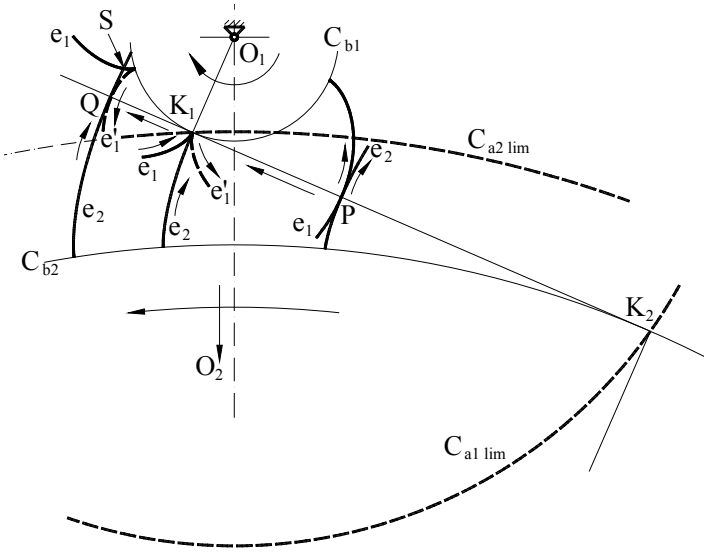


Fig. 4.25

de rotație ale roților sunt ca în Fig. 4.25, astfel încât punctul de contact se deplasează pe dreapta de angrenare în sensul K_2K_1. Când acest punct se află în P, în interiorul segmentului K_1K_2, angrenarea se produce corect, iar contactul se deplasează pe profilul e_1 spre cercul de bază. Când punctul de contact ajunge în K_1, acest punct este pe cercul de bază c_{b1} şi constituie punct de întoarcere pentru evolventa e_1. În această poziție angrenarea profilelor e_1 şi e_2, este totuşi posibilă. Dacă angrenarea continuă în afara segmentului K_1K_2, punctul de contact ajungând în Q, evolventa e_2 înfăşoară ramura e'_1, fiind tangentă cu aceasta, iar profilele materializate e_1 şi e_2 se intersectează în punctul S. Astfel are loc fenomenul de interferență, care împiedică angrenarea corectă a profilelor e_1 şi e_2. Pentru evitarea interferenței, cercurile de cap ale roților nu trebuie să depăşească punctele K_1 şi K_2, fiind limitate de cercurile c_{a1lim} şi c_{a2lim}, (Fig.4.25). După cum am arătat (par. 4.1.3.6), intersecțiile cercurilor de cap cu dreapta de angrenare delimitează segmentul de angrenare AE (Fig.4.23), iar razele punctelor A şi E sunt razele active $r_{ac1} = r_A$ şi $r_{ac2} = r_E$. Pozițiile limită ale punctelor A şi E, pentru evitarea interferenței, sunt K_1 şi K_2, când razele active devin egale cu razele de bază. Deci condițiile pentru evitarea interferenței se pot formula astfel

$$r_{ac1} \geq r_{b1} \tag{4.66}$$

$$r_{ac2} \geq r_{b2} \tag{4.67}$$

Dacă se ține seama de expresiile razelor active (4.58), (4.59), aceste condiții se pot scrie

$$\sqrt{r_{a2}^2 - r_{b2}^2} \leq a \sin \alpha_w \tag{4.68}$$

$$\sqrt{r_{a1}^2 - r_{b1}^2} \leq a \sin \alpha_w \tag{4.69}$$

Efectuând substituțiile corespunzătoare, se poate observa că relațiile (4.68) şi (4.69) nu depind de modul, ci numai de numerele de dinți (z_1, z_2) şi de coeficienții de deplasare (x_1, x_2). Astfel, dacă x_1 şi x_2 au valori date, se poate stabili un domeniu admisibil în planul de coordonate Oz_1z_2. În Fig.4.26 se indică acest domeniu (cel nehaşurat), pentru cazul $x_1 = x_2 = 0$.

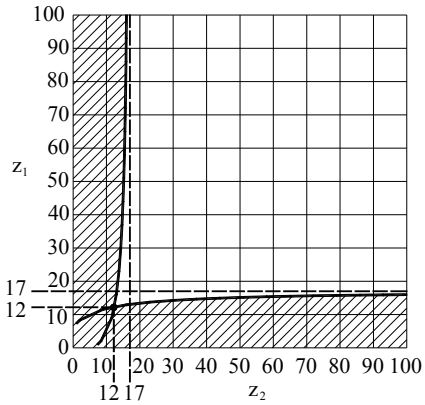


Fig. 4.26

Se observă că numerele de dinți sunt limitate inferior. Numărul minim de dinți ai unei roți depinde de numărul de dinți ai roții conjugate şi creşte puțin cu acesta. Dacă roțile sunt egale $(z_1 = z_2)$, se obține $z_{min} \cong 12$

(punctul de intersecție al celor două curbe). Dacă unul dintre numerele de dinți tinde la infinit, numărul minim de dinți ai roții conjugate este $z_{min} = 17$. Această valoare se confirmă prin analiza directă a angrenajului roată dințată – cremalieră (Fig.4.27). Evitarea interferenței se obține când dreapta de cap a cremalierei intersectează dreapta de angrenare în interiorul segmentului CK. Pentru aceasta, trebuie satisfăcută condiția,

$$r_{ac} = r_A \geq r_b , \tag{4.70}$$

întâlnită şi la angrenarea dintre două roți.

$$r_{ac} = \sqrt{r_b^2 + AK^2} ,$$

ceea ce conduce la $AK \geq 0$.

Calculând segmentul AK,

$$AK = CK - CA = \frac{d}{2}\sin\alpha_0 - \frac{h_{a0} - X}{\sin\alpha_0} = m\left(\frac{z}{2}\sin\alpha_0 - \frac{h_{a0}^* - x}{\sin\alpha_0}\right),$$

se obține condiția finală

$$z \geq \frac{2\left(h_{a0}^* - x\right)}{\sin^2\alpha_0} = z_{min} . \tag{4.71}$$

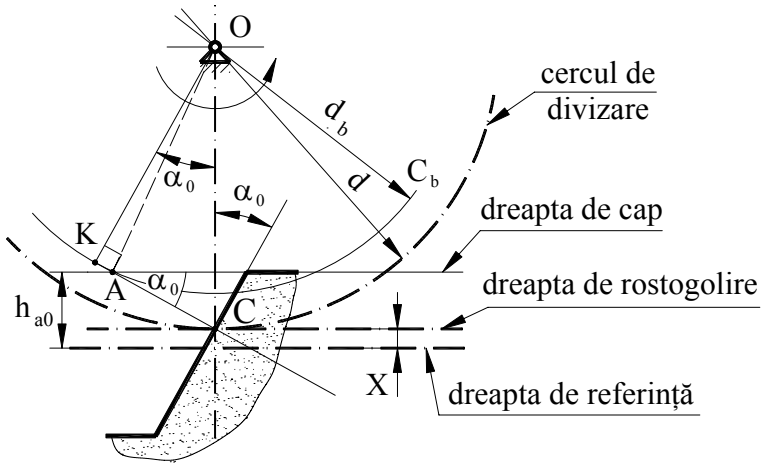


Fig. 4.27

Pentru $h_{a0}^* = 1$, $\alpha_0 = 20^\circ$ şi x = 0, rezultă z = 17,097 adică z_{min} = 17. Dacă roata mică a unui angrenaj are $z \geq 17$, se asigură funcționarea fără interferență, pentru orice număr de dinți ai roții conjugate. Dacă se ține seama de existența, în condiții practice, a jocului dintre flancuri şi de faptul că o interferență uşoară se poate admite, numărul minim de dinți se poate reduce la valoarea z_{min} = 14.

Formula (4.71) se poate folosi şi pentru calculul coeficientului de deplasare necesar, în condiţiile în care numărul de dinţi este dat,

$$x \geq 1 - \frac{z \sin^2 \alpha_0}{2}.$$

Deoarece $\frac{2}{\sin^2 \alpha_0} \cong 17$, această condiţie se poate scrie,

$$x \geq \frac{17 - z}{17}. \qquad (4.72)$$

În cazul angrenajului interior, interferenţa se produce atunci când cercul de cap al roţii interioare C_{a2} (Fig.4.24), intersectează dreapta de angrenare în interiorul segmentului K_1K_2. Prin urmare, segmentul de angrenare AE trebuie să fie în afara segmentului K_1K_2. Acest lucru se obţine dacă este respectată condiţia,

$$r_{ac1} = r_A \geq r_{b1}. \qquad (4.73)$$

Având în vedere expresia razei active r_{ac1} (4.74), această condiţie devine,

$$\sqrt{r_{a2}^2 - r_{b2}^2} \geq a \sin \alpha_w. \qquad (4.74)$$

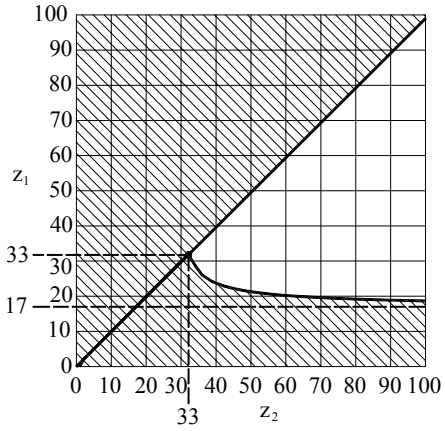


Fig. 4.28

Ca şi la angrenajul exterior, se poate stabili un domeniu admisibil pentru condiţia (4.74), în sistemul de coordonate Oz_1z_2, adăugând şi condiţia, normală pentru angrenajul interior, $z_2 \geq z_1$. În Fig.4.28 este trasat acest domeniu pentru cazul $x_1 = 0$, $x_2 = 0$.

Se observă că z_1 este limitat inferior de o curbă care porneşte din punctul de coordonate $z_1 = z_2 \cong 33$ şi tinde asimtotic la valoarea $z_1 \cong 17$, când z_2 tinde la infinit (roata 2 devine cremalieră).

Interferenţa primară poate interveni şi la prelucrarea roţii dinţate, care reproduce angrenarea dintre elementul dinţat sculă şi roata prelucrată. În acest caz, scula pătrunde în dintele roţii, eliminând o parte din profilul său. Condiţiile de evitare a intrferenţei la prelucrare sunt similare cu cele stabilite pentru evitarea interferenţei la angrenare. Dacă ne referim la procedeul de prelucrare cu o sculă care provine dintr-o roată dinţată (cuţit roată) şi notăm roata care se prelucrează cu 1 şi scula cu 2, se pot face următoarele observaţii. Dacă nu este verificată condiţia (4.66),

se produce eliminarea unui segment din profilul evolventei, situat la baza dintelui, iar fenomenul se numeşte **subtăiere** (Fig.4.29). Dacă nu este îndeplinită condiția (4.67), este afectat profilul în zona de cap, iar fenomenul se numeşte **retezare**. La prelucrarea cu o sculă care provine dintr-o cremalieră (cuțit pieptene), poate interveni numai subtăierea, când nu este verificată condiția (4.70). Trebuie menționat că subtăierea, care este defectul cel mai frecvent, poate influența funcționarea angrenajului. Când raza de început a subtăierii r_s (Fig. 4.28), este mai mare decât raza activă $(r_s > r_{ac})$, aceasta conduce la micşorarea segmentului de angrenare şi a gradului de acoperire. În acest caz calculul segmentului de angrenare se face cu formula (4.60), în care r_{ac1} se înlocuieşte cu r_{s1}, dacă $r_{s1} > r_{ac1}$, iar r_{ac2} se înlocuieşte cu r_{s2} dacă $r_{s2} > r_{ac2}$. De regulă, subtăierea este admisă, dacă nu afectează gradul de acoperire, adică se respectă condițiile $r_{s1} \le r_{ac1}$ şi $r_{s2} \le r_{ac2}$. Razele r_{s1} şi r_{s2} se determină din analiza procesului de prelucrare şi depind de tipul şi de caracteristicile geometrice ale sculei [26, 35].

Interferența secundară se produce când intervine contactul între capul dintelui unei roți şi profilul de racord, neevolventic, de la baza dintelui roții conjugate. Acest fenomen se poate produce numai dacă profilul de racord depăşeşte cercul de bază şi afectează evolventa (Fig. 4.30). În felul acesta, profilul dintelui este format din două segmente: **profilul util**, de formă evolventică, şi **profilul de racord** – neevolventic. Raza cercului cere separă cele două profile se numeşte **rază utilă** – r_u. Interferența secundară este evitată, dacă este verificată condiția:

$$r_{ac} \ge r_u , \tag{4.75}$$

pentru ambele roți ale angrenajului. Raza utilă se determină de asemenea din studiul procesului de prelucrare a roții.

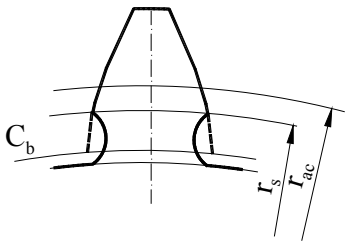


Fig. 4.29

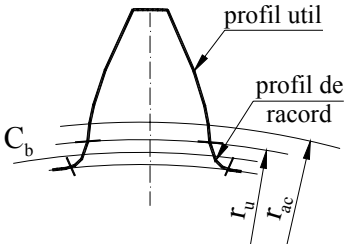


Fig. 4.30

Interferența secundară se poate întâlni şi la angrenajele interioare, atât la baza dintelui roții exterioare cât şi la baza dintelui roții interioare. La aceste angrenaje, pot apărea şi alte tipuri de interferență atunci când diferența $(z_2 - z_1)$ este prea mică, [35].

4.1.3.8. Alunecarea relativă a profilelor

Mişcarea relativă a profilelor conjugate este combinată: rostogolire cu alunecare. Viteza relativă de alunecare a profilului roții 1 peste profilul roții 2 (Fig.4.31, 4.32), se defineşte prin relația

$$\overline{v}_{al1} = \overline{v}_{d1} - \overline{v}_{d2}, \tag{4.76}$$

în care $\overline{v}_{d1}$ şi $\overline{v}_{d2}$ sunt vitezele de deplasare a punctului de contact P, pe cele două profile. Desigur, $\overline{v}_{al2}$ definită similar cu $\overline{v}_{al1}$, are expresia

$$\overline{v}_{al2} = \overline{v}_{d2} - \overline{v}_{d1}, \tag{4.77}$$

Vitezele $\overline{v}_{d1}$ şi $\overline{v}_{d2}$ au direcția tangentei comune în punctul de contact, astfel încât relațiile (4.76) şi (4.77) pot fi scrise şi sub formă scalară. În studiul fenomenelor tribologice interesează **alunecarea specifică** a profilelor, definită pentru cele două roți, astfel

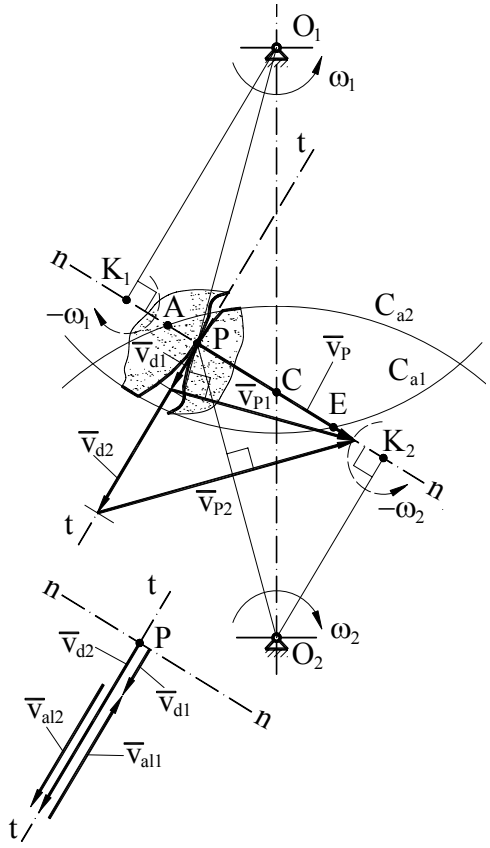


Fig. 4.31

$$\zeta_1 = \frac{v_{al1}}{v_{d1}} = \frac{v_{d1} - v_{d2}}{v_{d1}} \tag{4.78}$$

$$\zeta_2 = \frac{v_{al2}}{v_{d2}} = \frac{v_{d2} - v_{d1}}{v_{d2}} \tag{4.79}$$

Viteza absolută a punctului de contact $\overline{v}_P \left(// K_1K_2 \right)$ se poate exprima cu ajutorul ecuației

$$\overline{v}_P = \overline{v}_{d1} + \overline{v}_{P1}, \tag{4.80}$$

în care $\overline{v}_{d1} \left(\perp K_1K_2 \right)$ este viteza relativă a punctului P în raport cu roata 1, iar $\overline{v}_{P1}$ este viteza de transport,

$$\overline{v}_{P1} = \overline{\omega}_1 \times \overline{O_1P} =$$
$$= \overline{\omega}_1 \times \left(\overline{O_1K_1} + \overline{K_1P} \right) = .$$
$$= \overline{\omega}_1 \times \overline{O_1K_1} + \overline{\omega}_1 \times \overline{K_1P}$$

Deoarece $(\overline{\omega}_1 \times \overline{O_1K_1}) // K_1K_2$ şi $(\overline{\omega}_1 \times \overline{K_1P}) \perp K_1K_2$, rezultă

$$\overline{v}_{d1} = -\overline{\omega}_1 \times \overline{K_1P}. \tag{4.81}$$

Deci viteza $\overline{v}_{d1}$ este similară cu viteza unui punct care coincide cu P şi aparţine unei bare care se roteşte în jurul punctului K_1 cu viteza unghiulară $-\overline{\omega}_1$. În mod asemănător, pentru determinarea vitezei $\overline{v}_{d2}$ se foloseşte ecuaţia

$$\overline{v}_P = \overline{v}_{d2} + \overline{v}_{P2}, \tag{4.82}$$

şi se ajunge la expresia

$$\overline{v}_{d2} = -\overline{\omega}_2 \times \overline{K_2P}. \tag{8.83}$$

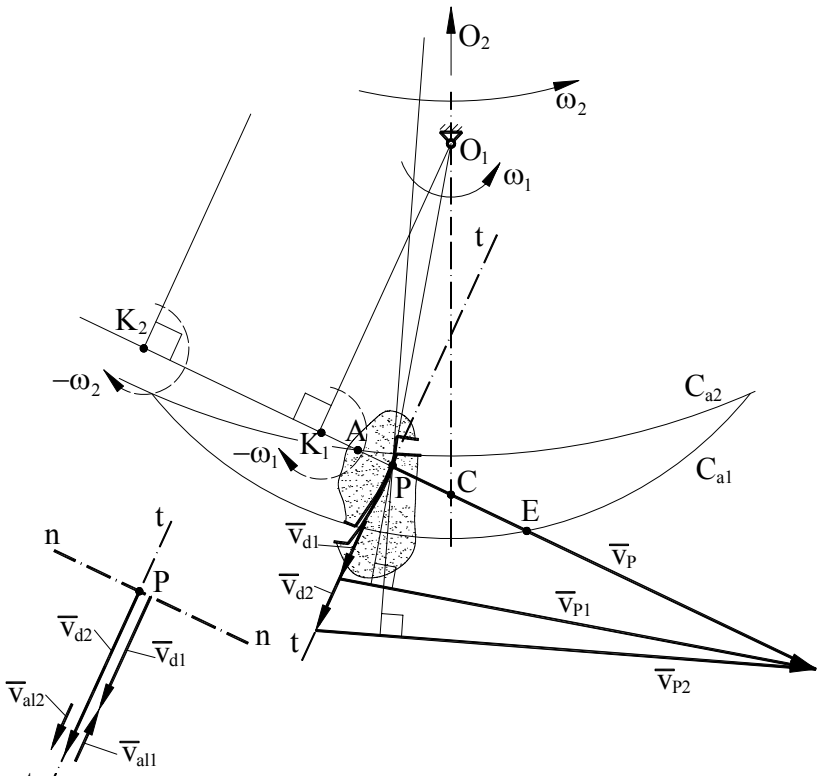


Fig. 4.32

În Fig.4.31şi 4.32 sunt reprezentate poligoanele de viteze corespunzătoare ecuaţiilor (4.80) şi (4.82), pentru un angrenaj exterior şi pentru un angrenaj interior.

Distanţele $K_1P = \rho_1$ şi $K_2P = \rho_2$ sunt razele de curbură ale profilelor evolventice în punctul de contact P. Introducând vitezele $v_{d1} = \omega_1\rho_1$ şi $v_{d2} = \omega_2\rho_2$ în relaţiile (4.78) şi (4.79), şi având în vedere că $\rho_1 + \rho_2 = K_1K_2 = L = a\sin\alpha_w$, se obţin formulele de calcul ale alunecărilor specifice pentru un angrenaj exterior

$$\zeta_1 = 1 - \frac{1}{i_{12}} \cdot \frac{\rho_2}{\rho_1} = 1 - \frac{1}{i_{12}}\left(\frac{L}{\rho_1} - 1\right) \tag{4.84}$$

$$\zeta_2 = 1 - \frac{1}{i_{12}} \cdot \frac{\rho_1}{\rho_2} = 1 - \frac{1}{i_{12}}\left(\frac{L}{\rho_2} - 1\right) = 1 - \frac{1}{i_{12}}\left(\frac{L}{L - \rho_1} - 1\right). \tag{4.85}$$

În cazul angrenajului interior $\rho_2 - \rho_1 = K_1K_2 = L$, iar formulele de calcul sunt

$$\zeta_1 = 1 - \frac{1}{i_{12}} \cdot \frac{\rho_2}{\rho_1} = 1 - \frac{1}{i_{12}}\left(1 + \frac{L}{\rho_1}\right) \tag{4.86}$$

$$\zeta_2 = 1 - \frac{1}{i_{12}} \cdot \frac{\rho_1}{\rho_2} = 1 - \frac{1}{i_{12}}\left(1 - \frac{L}{\rho_2}\right) = 1 - \frac{1}{i_{12}}\left(1 - \frac{L}{L + \rho_1}\right). \tag{4.87}$$

În Fig.4.33 sunt trasate diagramele $\zeta_1(\rho_1)$ şi $\zeta_2(\rho_2)$, pentru angrenajul exterior, iar în Fig.4.34 – pentru cel interior. Aceste diagrame arată variaţia alunecărilor specifice de-a lungul dreptei de angrenare. Sunt puse în evidenţă

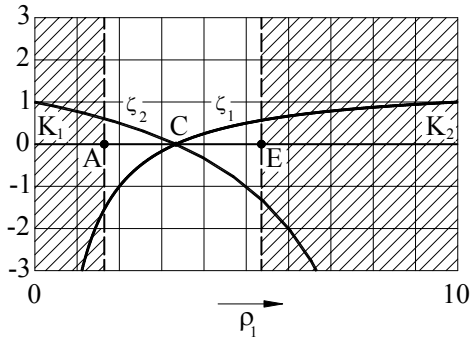


Fig. 4.33

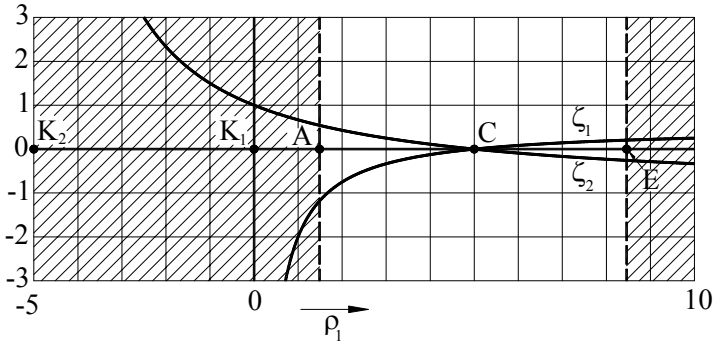


Fig. 4.34

punctele K_1, K_2, A, E şi C. Desigur, curbele prezintă importanţă numai în interiorul segmentului de angrenare AE. Se observă că valorile maxime în modul, ale alunecărilor specifice, se înregistrează în punctele A şi E – la intrarea şi ieşirea din angrenare.

Deoarece alunecările specifice influenţează direct uzura abrazivă a flancurilor, este de dorit ca valorile lor să fie cât mai mici. Această cerinţă se poate realiza prin alegerea adecvată a deplasărilor de profil, care determină poziţia segmentului de angrenare pe dreapta de angrenare, astfel încât valorile alunecărilor de profil, la intrarea şi la ieşirea din angrenare, să fie egale.

4.1.3.9. Analiza cinetostatică, randamentul

Se consideră un angrenaj exterior (Fig.4.35), format din roata conducătoare 1 şi roata condusă 2, asupra căreia acţionează momentul rezistent M_2 – considerat cunoscut.

În cuplele de rotaţie O_1 şi O_2 acţionează, aşa cum am arătat în par.2.2.1.4, reacţiunile rezultante $\overline{R}_{31}^{r}$ şi $\overline{R}_{32}^{r}$, precum şi momentele de frecare,

$$\left|M_{f31}\right| = r_{O_1}\left|R_{31}^{r}\right|\sin\varphi_{O_1}$$

$$\left|M_{f32}\right| = r_{O_2}\left|R_{32}^{r}\right|\sin\varphi_{O_2},$$

orientate în sens opus faţă de vitezele unghiulare $\tilde{\omega}_1$ şi $\tilde{\omega}_2$. În aceste relaţii r_{O_1} şi r_{O_2} sunt razele fusurilor, iar φ_{O_1} şi φ_{O_2} sunt unghiurile de frecare din cele două cuple.

În cupla superioară, formată între flancurile dinţilor, acţionează reacţiunea normală $\overline{R}_{12}$, orientată după normala comună K_1K_2, în sensul $K_1 \rightarrow K_2$, forţa de frecare de alunecare

$$\left|F_{f12}\right| = \mu_P \cdot \left|R_{12}\right|,$$

şi momentul de frecare de rostogolire,

$$\left|M_{f12}\right| = f_P \cdot \left|R_{12}\right|,$$

în care μ_P este coeficientul de frecare de alunecare iar f_P este coeficientul de frecare de rostogolire.

Forţa $\overline{F}_{f12}$ are ca suport tangenta comună la profile tt, iar sensul este acelaşi cu viteza relativă de alunecare $\overline{v}_{al2}$. Din relaţiile (4.80) şi (4.82) rezultă

$$\overline{v}_{al2} = \overline{v}_{d2} - \overline{v}_{d1} = \overline{v}_{P1} - \overline{v}_{P2} = \overline{v}_{P12}.$$

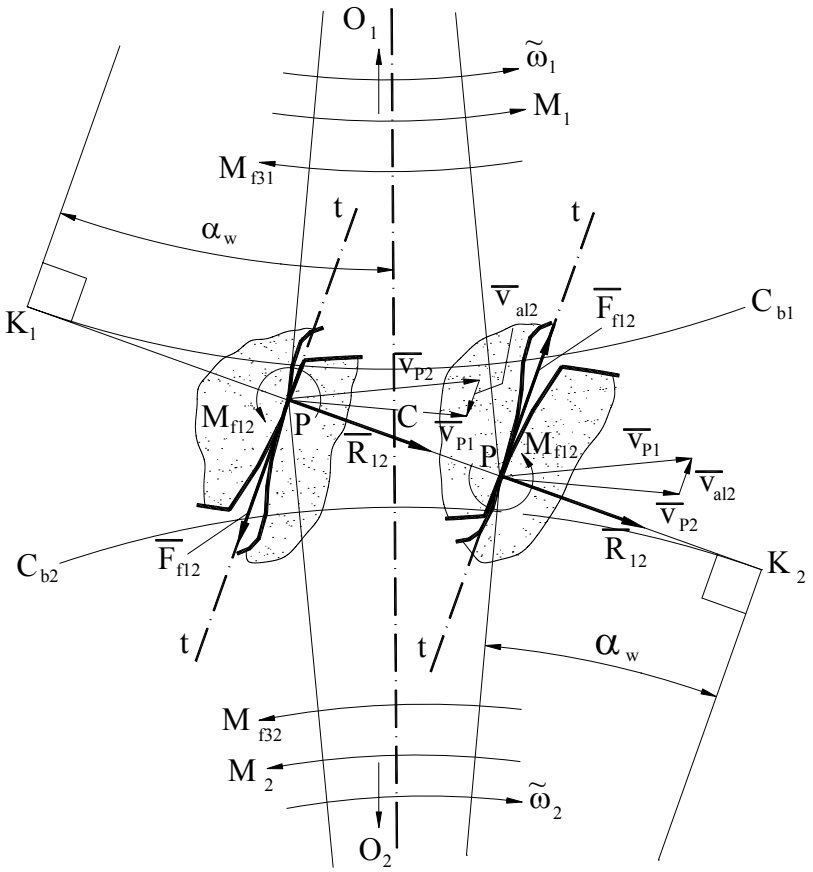


Fig. 4.35

În Fig.4.35 sunt construite triunghiurile de viteze din care se obține $\overline{v}_{al2}$, conform acestei ecuații. Se observă că în cazul în care punctul P se găseşte pe segmentul K_1C, viteza $\overline{v}_{al2}$ este orientată în sensul $K_2 \rightarrow O_2$, iar dacă P se află pe segmentul CK_2, $\overline{v}_{al2}$ este orientată în sensul $K_1 \rightarrow O_1$. Momentul de frecare M_{f12} este orientat în sensul vitezei unghiulare

$$\tilde{\omega}_{12} = \tilde{\omega}_1 - \tilde{\omega}_2,$$

care la angrenajul exterior are sensul $\tilde{\omega}_1$.

Ne propunem să determinăm reacțiunile din cuplele cinematice şi momentul motor M_1.

Pentru început, se consideră cazul angrenării monopare, când punctul de contact se află pe segmentul K_1C (faza intrării în angrenare).

Se scrie ecuația forțelor pentru elementul 2

$$\sum \overline{F}(2) = 0; \quad \overline{R}_{12} + \overline{F}_{f12} + \overline{R}^{r}_{32} = 0 .$$

Având în vedere că $\overline{R}_{12}$ şi $\overline{F}_{f12}$ sunt perpendiculare, rezultă

$$\left|R^{r}_{32}\right| = \sqrt{R^2_{12} + F^2_{f12}} = \left|R_{12}\right|\sqrt{1+\mu^2_P} . \tag{4.88}$$

Se scrie ecuația scalară de momente, pentru roata 2, în raport cu punctul O_2,

$$\sum M_{O_2}(2) = 0; \quad \left|R_{12}\right| \cdot O_2K_2 - \left|F_{f12}\right| \cdot K_2P - \left|M_{f12}\right| - \left|M_{f32}\right| - \left|M_2\right| = 0 .$$

Notând $r_{b2} = O_2K_2$ şi $\rho_2 = K_2P$, şi ținând seama de expresiile precizate anterior pentru $\left|F_{f12}\right|$, $\left|M_{f12}\right|$, $\left|M_{f32}\right|$ şi $\left|R^{r}_{32}\right|$, se obține

$$\left|R_{12}\right| = \frac{\left|M_2\right|}{r_{b2} - \mu_P \cdot \rho_2 - f_P - r_{O_2}\sqrt{1+\mu^2_B}\sin\varphi_{02}} . \tag{4.89}$$

Se scrie în continuare, ecuația de momente pentru elementul 1 în raport cu punctul O_1, având în vedere că orientările reacțiunilor şi ale momentelor de frecare din cupla P se inversează

$$\sum M_{O_1}(1) = 0; \quad \left|R_{12}\right| \cdot O_1K_1 - \left|F_{f12}\right| \cdot K_1P + \left|M_{f12}\right| + \left|M_{f31}\right| - \left|M_1\right| = 0$$

Din această ecuație rezultă $\left|M_1\right|$,

$$\left|M_1\right| = \left|R_{12}\right|\left(r_{b1} - \mu_P\rho_1 + f_P + r_{01}\sqrt{1+\mu^2_B}\sin\varphi_{01}\right) \tag{4.90}$$

Cunoscând $\left|M_1\right|$ se poate determina randamentul instantaneu, caracteristic acestei faze

$$\eta_{mi} = \frac{\left|M_2\right|\omega_2}{\left|M_1\right|\omega_1} = \frac{r_{b2} - \mu_P\rho_2 - f_P - r_{O_2}\sqrt{1+\mu^2_P}\sin\varphi_{O_2}}{r_{b1} - \mu_P\rho_1 + f_P + r_{O_1}\sqrt{1+\mu^2_P}\sin\varphi_{O_1}} \cdot \frac{1}{i_{12}} . \tag{4.91}$$

În această formulă, razele de bază se înlocuiesc prin expresiile,

$$r_{b1} = \frac{L}{(1+i_{12})\,tg\alpha_w}, \quad r_{b2} = \frac{i_{12} \cdot L}{(1+i_{12})\,tg\alpha_w},$$

în care $L = K_1K_2 = a\sin\alpha_w$, iar $\rho_2 = L - \rho_1$.

Rezultă o expresie în care randamentul depinde de o singură variabilă, ρ_1

$$\eta_{mi} = \frac{i_{12}L - \left(\mu_P(L-\rho_1) + f_P + r_{O_2}\sqrt{1+\mu^2_P}\sin\varphi_{O_2}\right)(1+i_{12})\,tg\alpha_w}{i_{12}L + \left(-\mu_P\rho_1 + f_P + r_{O_1}\sqrt{1+\mu^2_P}\sin\varphi_{O_1}\right)i_{12}(1+i_{12})\,tg\alpha_w} . \tag{4.92}$$

Dacă punctul P se găseşte pe segmentul CK_2 (faza ieşirii din angrenare), se schimbă sensul forţei de frecare $\overline{F}_{f12}$ şi în consecinţă se modifică semnul care intervine în formule, înaintea acestei forţe. Astfel, randamentul instantaneu pentru angrenarea monopară, în faza ieşirii din angrenare, se calculează cu formula

$$\eta_{mo} = \frac{i_{12}L - \left(-\mu_P\left(L-\rho_1\right) + f_P + r_{O_2}\sqrt{1+\mu_P^2}\sin\varphi_{O_2}\right)\left(1+i_{12}\right)\mathrm{tg}\alpha_w}{i_{12}L + \left(\mu_P\rho_1 + f_P + r_{O_1}\sqrt{1+\mu_P^2}\sin\varphi_{O_1}\right)i_{12}\left(1+i_{12}\right)\mathrm{tg}\alpha_w}. \qquad (4.93)$$

Se consideră, în continuare, cazul angrenării bipare, în ipoteza că reacţiunea $\overline{R}_{12}$ se repartizează egal pe cele două perechi de dinţi care angrenează simultan, una pe segmentul K_1C, în punctul P_{bi} iar cealaltă pe segmentul CK_2, în punctul P_{bo} (Fig.4.36). Punctele P_{bi} şi P_{bo} sunt separate de distanţa p_b – pasul de bază,

$$p_b = \pi m\cos\alpha_0 .$$

Se scrie ecuaţia de forţe pentru elementul 2,

$$\sum\overline{F}(2) = 0; \qquad \frac{\overline{R}_{12}}{2} + \overline{F}_{f12} + \frac{\overline{R}_{12}}{2} - \overline{F}_{f12} + \overline{R}_{32}^{r} = 0 ,$$

din care rezultă

$$\left|R_{32}^{r}\right| = \left|R_{12}\right|. \qquad (4.94)$$

Se scrie ecuaţia de momente pentru elementul 2 în raport cu punctul O_2, $M_{O_2}(2) = 0$;

$$\frac{\left|R_{12}\right|}{2}\left(r_{b2} - \mu_P\rho_{2i} - f_P - r_{O_2}\sin\varphi_{O_2}\right) + \frac{\left|R_{12}\right|}{2}\left(r_{b2} + \mu_P\rho_{2o} - f_P - r_{O_2}\sin\varphi_{O_2}\right) - \left|M_2\right| = 0$$

Având în vedere că $\rho_{2i} - \rho_{2o} = p_b$, din această ecuaţie se obţine $\left|R_{12}\right|$,

$$\left|R_{12}\right| = \frac{\left|M_2\right|}{r_{b2} - \mu_P\dfrac{p_b}{2} - f_P - r_{O_2}\sin\varphi_{O_2}}. \qquad (4.95)$$

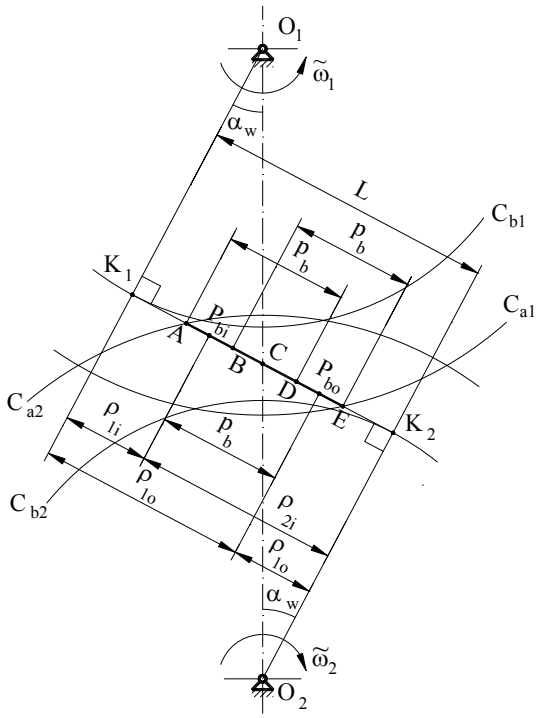


Fig. 4.36

Se scrie ecuația de momente pentru elemntul 1 în raport cu punctul O_1, $M_{O_1}(1) = 0$;

$$\frac{|R_{12}|}{2}\left(r_{b1} - \mu_P \rho_{1i} + f_P + r_{O_1} \sin\varphi_{O_1}\right) + \frac{|R_{12}|}{2}\left(r_{b1} + \mu_P \rho_{1o} + f_P + r_{O_1} \sin\varphi_{O_1}\right) - |M_1| = 0 .$$

Între ρ_{1i} şi ρ_{1o} există relația $\rho_{1o} - \rho_{1i} = p_b$, astfel că din această ecuație se obține $|M_1|$,

$$|M_1| = |R_{12}|\left(r_{b1} + \mu_P \frac{p_b}{2} + f_P + r_{O_1} \sin\varphi_{O_1}\right). \qquad (4.96)$$

Pe baza relațiilor (4.95) şi (4.96) se determină randamentul instantaneu pentru angrenarea bipară

$$\eta_b = \frac{|M_2|\omega_2}{|M_1|\omega_1} = \frac{r_{b2} - \mu_P \frac{p_b}{2} - f_P - r_{O_2} \sin\varphi_{O_2}}{r_{b1} + \mu_P \frac{p_b}{2} + f_P + r_{O_1} \sin\varphi_{O_1}} \cdot \frac{1}{i_{12}} .$$

Înlocuind razele de bază cu expresiile lor, rezultă

$$\eta_b = \frac{i_{12}L - \left(\mu_P \frac{p_b}{2} + f_P + r_{O_2} \sin\varphi_{O_2}\right)\left(1 + i_{12}\right) tg\alpha_w}{i_{12}L + \left(\mu_P \frac{p_b}{2} + f_P + r_{O_1} \sin\varphi_{O_1}\right) i_{12}\left(1 + i_{12}\right) tg\alpha_w}. \tag{4.97}$$

Se observă că randamentul angrenajului în faza de angrenare bipară este constant deoarece în expresia sa nu intervine variabila ρ_1.

Randamentul global, pentru o perioadă de timp $t_b - t_a$, în care randamentul instantaneu are aceeaşi expresie, se calculează în funcție de puterile $|P_1|$ şi $|P_2|$,

$$\eta_g = \frac{\int_{t_a}^{t_b} |P_2| dt}{\int_{t_a}^{t_b} |P_1| dt} = \frac{\int_{t_a}^{t_b} |P_2| dt}{\int_{t_a}^{t_b} \frac{|P_2|}{\eta} dt}.$$

Puterea rezistentă $|P_2| = |M_2|\omega_2$ este constantă iar timpul se exprimă în funcție de viteza punctului de contact pe dreapta de angrenare, $v_P = \omega_1 r_{b1} = \omega_2 r_{b2}$, de asemenea constantă,

$$t = \frac{\rho_1}{v_P}; \qquad dt = \frac{1}{v_P} d\rho_1$$

$$\rho_{1a} = t_a v_P; \qquad \rho_{1b} = t_b v_P$$

Cu aceste observații, randamentul global devine

$$\eta_g = \frac{\int_{\rho_{1a}}^{\rho_{1b}} d\rho_1}{\int_{\rho_{1a}}^{\rho_{1b}} \frac{d\rho_1}{\eta}} = \frac{\rho_{1b} - \rho_{1a}}{\int_{t_a}^{t_b} \frac{d\rho_1}{\eta}}. \tag{4.98}$$

În timpul funcționării angrenajului se repetă alternativ angrenarea bipară, care se desfăşoară simultan pe segmentele AB şi DE (Fig.4.36) şi angrenarea monopară, pe segmentul BD. În aceste condiții, randamentul global pentru un ciclu de funcționare este

$$\eta_g = \frac{AB + BC + CD}{\int_{\rho_{1A}}^{\rho_{1B}} \frac{d\rho_1}{\eta_b} + \int_{\rho_{1B}}^{\rho_{1C}} \frac{d\rho_1}{\eta_{mi}} + \int_{\rho_{1C}}^{\rho_{1D}} \frac{d\rho_1}{\eta_{mo}}}.$$

Deoarece η_b este constant, această formulă devine

$$\eta_g = \frac{AB + BC + CD}{\dfrac{AB}{\eta_b} + \displaystyle\int_{\rho_{1B}}^{\rho_{1C}} \frac{d\rho_1}{\eta_{mi}} + \int_{\rho_{1C}}^{\rho_{1D}} \frac{d\rho_1}{\eta_{mo}}}. \tag{4.99}$$

Parametrii care intervin în această formulă se calculează pe baza schemei din Fig.4.36

$$\rho_{1A} = L - \sqrt{r_{a2}^2 - r_{b2}^2}, \quad \rho_{1E} = \sqrt{r_{a1}^2 - r_{b1}^2}, \quad \rho_{1B} = \rho_{1E} - p_b, \quad \rho_{1D} = \rho_{1A} + p_b$$

$$\rho_{1C} = r_{w1} \sin\alpha_w, \qquad AB = \rho_{1B} - \rho_{1A}, \quad BC = \rho_{1C} - \rho_{1B}, \quad CD = \rho_{1D} - \rho_{1C}.$$

Trebuie menționat că valoarea randamentului, obținută prin calcul, este afectată de erorile de apreciere a coeficienților de frecare şi de neglijarea unor pierderi de putere. De aceea este util să se confrunte rezultatele calculate cu cele obținute prin măsurători experimentale.

4.1.3.10. Adoptarea coeficienților de deplasare

Proiectarea unui angrenaj presupune determinarea parametrilor de bază pentru cele două roți m, z_1, x_1, z_2, x_2. Rezolvarea problemei depăşeşte cadrul geometrico-cinematic, implicând aspecte de rezistență, durabilitate, tribologie, transmiterea căldurii etc. Ca orice problemă de proiectare, şi aceasta este una de optimizare, în care funcția obiectiv este în general de natură economică. În cadrul acestei probleme intervin o serie de restricții privind adoptarea coeficienților de deplasare. Acestea se referă la evitarea unor fenomene nedorite sau incompatibile cu angrenarea, care în general au fost studiate în paragrafele anterioare, şi pe care le reamintim.

1) Asigurarea continuității angrenării (par. 4.1.3.6),
2) Evitarea interferenței primare şi secundare (par. 4.1.3.7),
3) Evitarea subtăierii sau menținerea ei în limite admisibile (par. 4.1.3.7),
4) Evitarea ascuțirii dinților prin limitarea arcului de cap $s_a \le (0,2 \div 0,3)m$ (par. 4.1.3.3).

Aceste restricții conduc la formularea unor condiții matematice, de forma

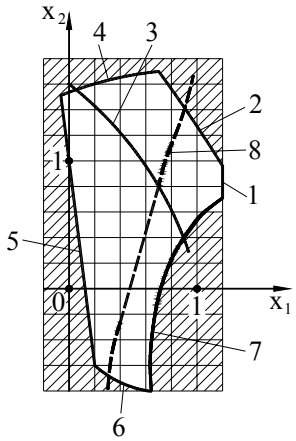
$$f_i(x_1, x_2, z_1, z_2) \le 0, \quad (i=1,n).$$

În cazul în care z_1 şi z_2 au valori precizate, fiecare condiție defineşte două domenii în planul de coordonate Ox_1x_2 - unul admisibil, în care condiția este respectată, şi celălalt – inadmisibil. Cele două domenii sunt separate de curba dată de ecuația,

$$f_i(x_1, x_2, z_1, z_2) = 0.$$

Dacă domeniile admisibile corespunzătoare tuturor condițiilor se intersectează, se obține un domeniu admisibil rezultant, delimitat de un contur

numit **contur de blocare**. În Fig. 4.37 este reprezentat, pentru exemplificare, conturul de blocare construit pentru $z_1 = 14$, $z_2 = 38$, şi se precizează semnificaţia curbelor care îl compun. În acelaşi sistem de coordonate pot fi trasate şi alte curbe care pot oferi date suplimentare privind alegerea coeficienţilor de deplasare. Astfel, în Fig.4.37 se observă curba pe care se egalizează alunecările specifice.



contur de blocare
$z_1 = 14,\ z_2 = 38$

1 → interferenţă secundară roata 1;
2 → $\varepsilon = 1$;
3 → $\varepsilon = 1,2$;
4 → interferenţă secundară roata 2;
5 → subtăiere roata 1;
6 → subtăiere roata 2;
7 → ascuţire roata 1, $s_{a1} = 0,3 \cdot m$;
8 → egalizarea alunecărilor specifice.

Fig. 4.37

4.1.4. Angrenaje paralele formate din roţi dinţate cilindrice cu dinţi înclinaţi

4.1.4.1. Definirea roţii dinţate cilindrice cu dinţi înclinaţi

- **Cremaliera de referinţă cu dinţi înclinaţi**

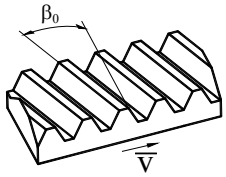


Fig. 4.38

Cremaliera de referinţă cu dinţi înclinaţi este o cremalieră cu flancuri plane având direcţia dinţilor înclinată faţă de axa roţii cu care angrenează (Fig.4.38). Geometria acestei cremaliere este determinată de profilul său în secţiunea normală nn (perpendiculară pe direcţia dinţilor) şi de unghiul de înclinare a dinţilor β_0 (Fig.4.39). Profilul normal este identic cu profilul

cremalierei de referință cu dinți drepți, iar modulul, $\mathbf{m_n}$ - numit **modul normal** este standardizat. Pentru definirea roții dințate este necesar să se cunoască şi parametrii geometrici din secțiunea frontală tt, perpendiculară pe axa roții cu care angrenează cremaliera. Aceşti parametri se exprimă, în funcție de **modulul frontal** $\mathbf{m_t}$, prin relații analoge cu cele existente în cazul secțiunii normale,

$$\begin{aligned} p_{0t} &= \pi \cdot m_t \\ h_{a0} &= h^*_{a0t} \cdot m_t \\ c_0 &= c^*_{0t} \cdot m_t \\ h_{f0} &= (h^*_{f0t} + c^*_{0t}) m_t \end{aligned} \tag{4.100}$$

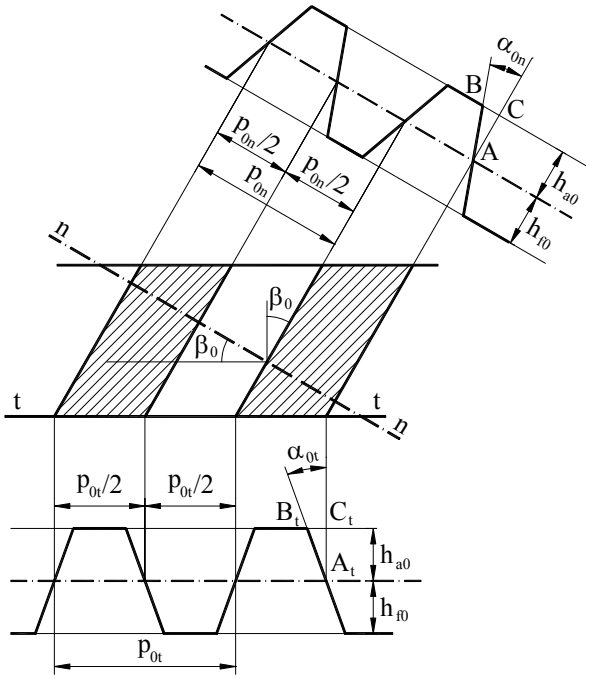


Fig. 4.39

Pentru a face operabile aceste relații trebuie să se facă legătura dintre mărimile m_t, h^*_{a0t}, c^*_{0t} şi m_n, h^*_{a0n}, c^*_{0n}. Din Fig.4.39 rezultă

$$\cos\beta_0 = \frac{p_{0n}}{p_{0t}}.$$

Ținând seama că $p_{0n} = \pi \cdot m_n$ şi $p_{0t} = \pi \cdot m_t$, se ajunge la

$$m_t = \frac{m_n}{\cos\beta_0}. \tag{4.101}$$

Parametrii h_{a0}, c_0, h_{f0} sunt aceeaşi în ambele secţiuni, astfel încât se poate scrie

$$h_{a0} = h^*_{a0n} \cdot m_n = h^*_{a0t} \cdot m_t,$$

de unde rezultă

$$h^*_{a0t} = h^*_{a0n} \frac{m_n}{m_t} = h^*_{a0n} \cdot \cos\beta_0$$

şi, în mod, analog

$$c^*_{0t} = c^*_{0n} \cdot \cos\beta_0.$$

Unghiurile de înclinare ale profilurilor α_{0n} şi α_{0t} sunt diferite în cele două secţiuni. Din triunghiurile ABC şi $A_tB_tC_t$ (Fig.4.39) rezultă

$$tg\alpha_{0n} = \frac{BC}{h_{a0}}; \; tg\alpha_{0t} = \frac{B_tC_t}{h_{a0}}.$$

Între BC şi B_tC_t există relaţia

$$\cos\beta_0 = \frac{BC}{B_tC_t},$$

care conduce la

$$tg\alpha_{0t} = \frac{tg\alpha_{0n}}{\cos\beta_0}. \tag{4.102}$$

■ Parametrii geometrici principali ai roţii dinţate cilindrice cu dinţi înclinaţi

Roţile dinţate cilindrice cu dinţi înclinaţi se definesc din condiţia de angrenare fictivă cu cremaliera de referinţă, fără joc între flancuri şi cu joc radial standardizat. Într-o secţiune frontală, procesul de definire este similar cu cel descris la roţile cilindrice cu dinţi drepţi. Flancurile roţii se obţin ca înfăşurătoare ale flancurilor plane ale cremalierei în mişcarea relativă dintre cele două elemente. Suprafaţa flancurilor este **un elicoid evolventic**. Intersecţia sa cu un plan frontal reprezintă o evolventă deoarece profilul frontal al cremalierei este rectiliniu, iar intersecţia cu un cilindru coaxial cu roata reprezintă o elice cu pas constant (Fig.4.40). Unghiul de înclinare al elicei, în raport cu axa roţii, reprezintă unghiul de înclinare al dinţilor şi are valori diferite în funcţie de cilindrul pe care se măsoară. Pe cilindrul de divizare se reproduce unghiul de

înclinare al dinților cremalierei β_0. Unghiul de înclinare β_y, pe un cilindru oarecare, se determină pe baza schemei din Fig.4.41, în care sunt reprezentate desfăşuratele plane ale celor doi cilindri: cel de divizare şi cel oarecare.

$$tg\beta_0 = \frac{\pi d}{p_z};\ tg\beta_y = \frac{\pi d_y}{p_z}$$

$$tg\beta_y = \frac{d_y}{d} tg\beta_0 \tag{4.103}$$

În aceste relații p_z este pasul constant al elicei, iar d este diametrul de divizare.

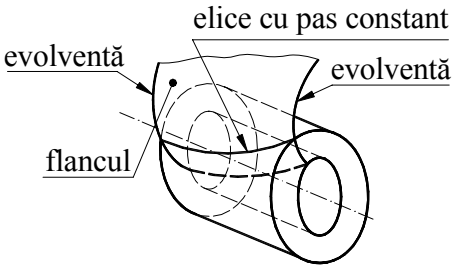


Fig. 4.40

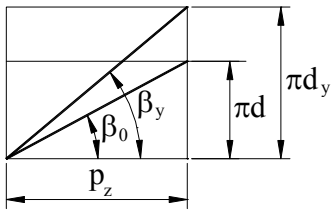


Fig. 4.41

Parametri geometrici în secțiunea frontală a roții se exprimă în funcție de modulul frontal m_t, cu formule analoge cu cele corespunzătoare roții dințate cu dinți drepți. Aceşti parametri trebuie exprimați, în final, în funcție de modulul normal m_n. Pentru aceasta se folosesc relațiile, deduse anterior, care fac legătura dintre parametrii celor două secțiuni ale cremalierei de referință.

- **Deplasarea danturii, X**

$$X = x_t \cdot m_t = x_n \cdot m_n \tag{4.104}$$

Relația arată că cei doi coeficienți de deplasare x_n (normal) şi x_t (frontal) sunt diferiți,

$$x_t = x_n \frac{m_n}{m_t} = x_n \cdot \cos\beta_0 \tag{4.105}$$

- **Pasul de divizare frontal,** p_t

$$p_t = p_{0t} = \pi \cdot m_t = \frac{\pi \cdot m_n}{\cos\beta_0} \tag{4.106}$$

- **Diametrul de divizare, d**

$$d = m_t \cdot z = \frac{m_n \cdot z}{\cos\beta_0} \tag{4.107}$$

• **Înălțimea de divizare a capului dintelui,** h_a

$$h_a = (h^*_{a0t} + x_t)m_t = (h^*_{a0n} + x_n)m_n \tag{4.108}$$

• **Înălțimea de divizare a piciorului dintelui,** h_b

$$h_b = (h^*_{a0t} + c^*_{0t} - x_t)m_t = (h^*_{a0n} + c^*_{0n} - x_n)m_n \tag{4.109}$$

• **Diametrul de cap,** d_a

$$d_a = (z + 2h^*_{a0t} + 2x_t)m_t = (\frac{z}{\cos\beta_0} + 2h^*_{a0n} + 2x_n)m_n \tag{4.110}$$

• **Diametrul ce picior,** d_f

$$d_f = (z - 2h^*_{a0t} - 2c^*_{0t} + 2x_t)m_t = (\frac{z}{\cos\beta_0} - 2h^*_{a0n} - 2c^*_{0n} + 2x_n)m_n \tag{4.111}$$

• **Unghiul de presiune al profilului frontal pe cercul de divizare,** α_{0t}

$$\alpha_{0t} = \mathrm{arctg}\frac{\mathrm{tg}\alpha_{0n}}{\cos\beta_0} \tag{4.112}$$

• **Arcul frontal al dintelui pe cercul de divizare,** s_t

$$s_t = \left(\frac{\pi}{2} + 2x_t\mathrm{tg}\alpha_{0t}\right)m_t = \left(\frac{\pi}{2} + 2x_n \cdot \mathrm{tg}\alpha_{0n}\right)\frac{m_n}{\cos\beta_0} \tag{4.113}$$

• **Arcul frontal al golului dintre dinți pe cercul de divizare,** e_t

$$e_t = \left(\frac{\pi}{2} - 2x_t\mathrm{tg}\alpha_{0t}\right)m_t = \left(\frac{\pi}{2} - 2x_n \cdot \mathrm{tg}\alpha_{0n}\right)\frac{m_n}{\cos\beta_0} \tag{4.114}$$

• **Diametrul de bază,** d_b

$$d_b = m_t z \cdot \cos\alpha_{0t} = m_n \cdot z\frac{\cos\left(\mathrm{arctg}\frac{\mathrm{tg}\alpha_{0n}}{\cos\beta_0}\right)}{\cos\beta_0} \tag{4.115}$$

• **Unghiul de înclinare al dinților pe cilindrul de divizare,** β

$\beta = \beta_0$

• **Unghiul de inclinare al dinților pe cilindrul de bază,** β_b

Aplicând formula (4.103) se obține

$$\beta_b = \mathrm{arctg}\left(\frac{d_b}{d}\mathrm{tg}\beta_0\right).$$

În conformitate cu relația (4.115),

$$\frac{d_b}{d} = \cos\alpha_{0t},$$

astfel că

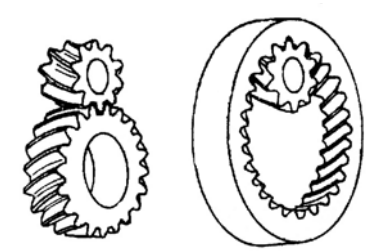
$$\beta_b = \text{arctg}(\cos\alpha_{0t} \cdot \text{tg}\beta_0) = \text{arctg}\left(\text{tg}\beta_0 \cdot \cos\left(\text{arctg}\frac{\text{tg}\alpha_{0n}}{\cos\beta_0}\right)\right). \qquad (4.116)$$

Expresiile menționate arată că roata cilindrică cu dinți înclinați se poate defini complet, din punct de vedere geometric, cu ajutorul parametrilor m_n, z, x_n și β_0.

4.1.4.2. Angrenajul paralel cu dinți înclinați

- **Parametrii geometrici ai angrenajului**

Pentru formarea unui angrenaj paralel, cele două roți trebuie să aibă același modul normal $m_{n1} = m_{n2} = m_n$ și același modul frontal $m_{t1} = m_{t2} = m_t$. Din relația (4.101) rezultă că și unghiul de înclinare a dinților pe cilindrul de divizare trebuie să aibă aceeași valoare $\beta_{01} = \beta_{02} = \beta_0$. În cazul angrenajului exterior înclinarea dinților are sensuri opuse pentru cele două roți (Fig.4.42.a), pe când în cazul angrenajului interior are același sens (Fig.4.42.b).



a) *b)*

Fig. 4.42

Deoarece profilele frontale sunt evolventice, procesul de angrenare, în secțiunea frontală, se desfășoară în același mod ca în cazul angrenajelor cilindrice cu dinți drepți. Ca urmare, determinarea parametrilor geometrici ai angrenajului se face luând în considerare angrenarea în secțiunea frontală, folosind relații similare cu cele de la angrenajele cu dinți drepți. Astfel, unghiul de angrenare α_{wt}, diametrele de rostogolire d_{w1} și d_{w2} și distanța dintre axe a, au expresiile

$$\text{inv}\alpha_{wt} = \text{inv}\alpha_{0t} + 2\frac{x_{t2} \pm x_{t1}}{z_2 \pm z_1}\text{tg}\alpha_{0t} \qquad (4.117)$$

$$d_{w1} = m_t \cdot z_1 \frac{\cos\alpha_{0t}}{\cos\alpha_{wt}} = \frac{m_n \cdot z_1}{\cos\beta_0} \cdot \frac{\cos\alpha_{0t}}{\cos\alpha_{wt}}$$

$$d_{w2} = m_t \cdot z_2 \frac{\cos\alpha_{0t}}{\cos\alpha_{wt}} = \frac{m_n \cdot z_2}{\cos\beta_0} \cdot \frac{\cos\alpha_{0t}}{\cos\alpha_{wt}} \qquad (4.118)$$

$$a = m_t \frac{z_2 \pm z_1}{2} \cdot \frac{\cos\alpha_{0t}}{\cos\alpha_t} = \frac{m_n}{\cos\beta_0} \cdot \frac{z_2 \pm z_1}{2} \cdot \frac{\cos\alpha_{0t}}{\cos\alpha_{wt}} . \tag{4.119}$$

Notând

$$a_0 = m_t \frac{z_2 \pm z_1}{2} = \frac{m_n}{\cos\beta_0} \cdot \frac{z_2 \pm z_1}{2} \tag{4.120}$$

distanța dintre axe se exprimă astfel

$$a = a_0 + y_t \cdot m_t = a_0 + y_n \cdot m_n \tag{4.121}$$

în care

$$y_t = \frac{z_2 \pm z_1}{2}\left(\frac{\cos\alpha_{0t}}{\cos\alpha_{wt}} - 1\right) \tag{4.122}$$

$$y_n = \frac{z_2 \pm z_1}{2\cos\beta_0}\left(\frac{\cos\alpha_{0t}}{\cos\alpha_{wt}} - 1\right). \tag{4.123}$$

Între y_t şi y_n există relația

$$y_t = y_n \cdot \cos\beta_0 . \tag{4.124}$$

În cazul angrenării cu joc radial standardizat, când se practică scurtarea dinților, înălțimea capului şi diametrul de cap se calculează astfel

$$\begin{cases} h_{a1} = m_t(h^*_{a0t} - x_{t1} + y_t) = m_n(h^*_{a0n} - x_{n2} + y_n) \\ h_{a2} = m_t(h^*_{a0t} - x_{t2} + y_t) = m_n(h^*_{a0n} - x_{n1} + y_n) \end{cases} \tag{4.125}$$

$$\begin{cases} d_{a1} = m_t(z_1 + 2h^*_{a0t} - 2x_{t2} + 2y_t) = m_n\left(\dfrac{z_1}{\cos\beta_0} + 2h^*_{a0n} - 2x_{n2} + 2y_n\right) \\ d_{a2} = m_t(z_2 + 2h^*_{a0t} - 2x_{t1} + 2y_t) = m_n\left(\dfrac{z_2}{\cos\beta_0} + 2h^*_{a0n} - 2x_{n1} + 2y_n\right). \end{cases} \tag{4.126}$$

În formulele anterioare semnul (+) se aplică la angrenajele exterioare, iar (-) la angrenajele interoare.

■ Aspecte specifice ale angrenajelor paralele cu dinți înclinați

Aşa cum s-a arătat, cinematica angrenajelor cu dinți înclinați se studiază, în general, în planul frontal. Din această analiză rezultă limitele deplasărilor de profil impuse de interferență, subtăiere şi ascuțire. De asemenea, alunecarea specifică se determină pe baza angrenării frontale.

În ceea ce priveşte interferenţa şi subtăierea, este util de arătat faptul că fenomenul poate fi controlat şi prin unghiul de înclinare a dinţilor β_0. Numărul minim de dinţi la angrenarea cu cremaliera (4.71) este

$$z_{min} = \frac{2(h^*_{a0t} - x_t)}{\sin^2 \alpha_{0t}} = \frac{2(h^*_{a0n} - x_n)\cos\beta_0}{\sin^2 \alpha_{0t}}. \qquad (4.127)$$

Se observă că z_{min} este influenţat de β_0 şi scade cu creşterea acestuia. În cazul unei roţi nedeplasate (x = 0) se obţine

$$z_{min} = \frac{2 \cdot \cos\beta_0}{\sin^2 \alpha_{0t}},$$

iar în tabelul de mai jos se indică valorile pentru α_{0t} şi z_{min} în funcţie de valorile unghiului β_0.

β_0	0^0	10^0	15^0	20^0	25^0	30^0	35^0	40^0	45^0
α_{0t}	20^0	$20^0 17'$	$20^0 39'$	$21^0 11'$	$21^0 53'$	$22^0 48'$	$23^0 57'$	$25^0 25'$	$27^0 41'$
z_{min}	17	13,39	15,53	14,40	13,05	11,53	9,93	8,32	6,75

Se observă că la $\beta_0 = 45^0$ se poate ajunge la o roată cu 7 dinţi fără pericol de interferenţă. Micşorarea numărului minim de dinţi constitue un avantaj al acestor angrenaje deoarece permite reducerea substanţială a gabaritelor.

Unul dintre fenomenele care nu se poate studia numai prin analiza angrenării frontale este continuitatea angrenării. Contactul dintre dinţii elicoidali se produce după o dreaptă generată de punctele de contact din fiecare secţiune frontală. Dreptele de contact sunt conţinute într-un **plan de angrenare**, tangent la cilindrii de bază (Fig.4.43). Zona din planul de angrenare unde se poate situa dreapta de contact este delimitată de cilindrii de cap ai roţilor. Această zonă, notată AEE'A' (Fig.4.43) se numeşte **câmp de angrenare**. O pereche de flancuri începe angrenarea în punctul A, când dreapta de contact are lungimea egală cu zero. Această lungime creşte progresiv până când acoperă întreaga lăţime a roţii, trecând prin A'. După aceea îşi păstrează lungimea constantă până ce ajunge în E, când începe să scadă, iar în E' contactul se întrerupe. Intrarea şi ieşirea treptată din angrenare reprezintă un avantaj important al acestor angrenaje deoarece, în felul acesta, se reduc şocurile şi zgomotul. Se observă că angrenarea dintre două flancuri are loc în timpul deplasării unui punct de contact de la A la E în secţiunea frontală K_1K_2 şi a unui punct de la P la E' în planul frontal $K'_1K'_2$. Ca urmare gradul de acoperire este

$$\varepsilon = \frac{AE + PE'}{p_{bt}} = \frac{g_t}{p_{bt}} + \frac{PE'}{p_{bt}} = \varepsilon_t + \varepsilon_\beta \,. \tag{4.128}$$

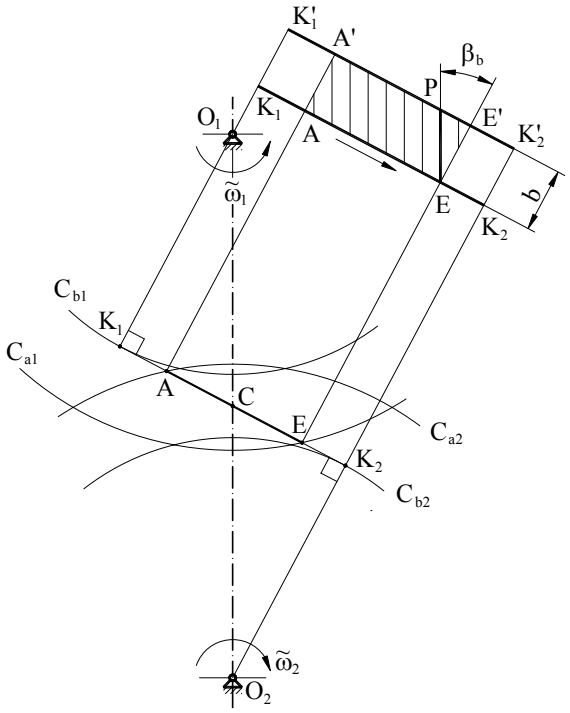


Fig. 4.43

Termenul ε_t este gradul de acoperire corespunzător angrenării frontale şi se calculează ca la angrenajele cu dinţi drepţi. Termenul ε_β - numit **grad de acoperire axial** se determină pe baza schemei din Fig.4.43,

$$\varepsilon_\beta = \frac{b \cdot tg\beta_b}{m_t \cdot \pi \cdot \cos\alpha_{0t}}, \tag{4.129}$$

în care b este lăţimea roţilor. Rezultă că gradul de acoperire al angrenajelor cu dinţi înclinaţi este superior celui de la angrenajele cu dinţi drepţi datorită termenului suplimentar ε_β. Acest fapt constituie un alt avantaj al acestor angrenaje.

4.1.5. Angrenaje concurente

4.1.5.1. Angrenajul analog

Angrenajele concurente sunt mecanisme sferice, iar suprafețele de rostogolire ale roților sunt conuri circulare cu axele suprapuse peste axele de rotație şi cu vârful comun situat în punctul de intersecție al acestora, O (Fig.4.44). Suprafețele de cap şi de picior sunt, de asemenea, conuri.

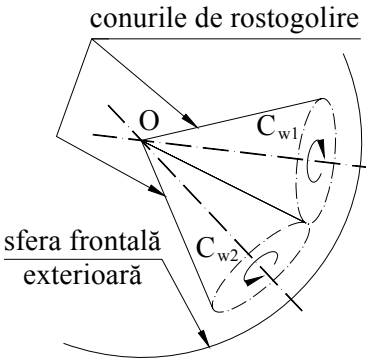


Fig. 4.44

Procesul de angrenare se studiază într-o secțiune sferică, având centrul în punctul O, care constituie suprafața frontală a angrenajului. Să considerăm sfera frontală exterioară, care delimitează roata în zona diametrelor mari. Intersecția acestei sfere cu conurile de rostogolire reprezintă cercurile de rostogolire C_{w1} şi C_{w2}. Deoarece suprafața sferică nu este desfăşurabilă în plan, studiul angrenării pe sfera frontală este incomod. De aceea, aceasta se înlocuieşte cu două conuri frontale (aproximația Tredgold) având generatoarele perpendiculare pe

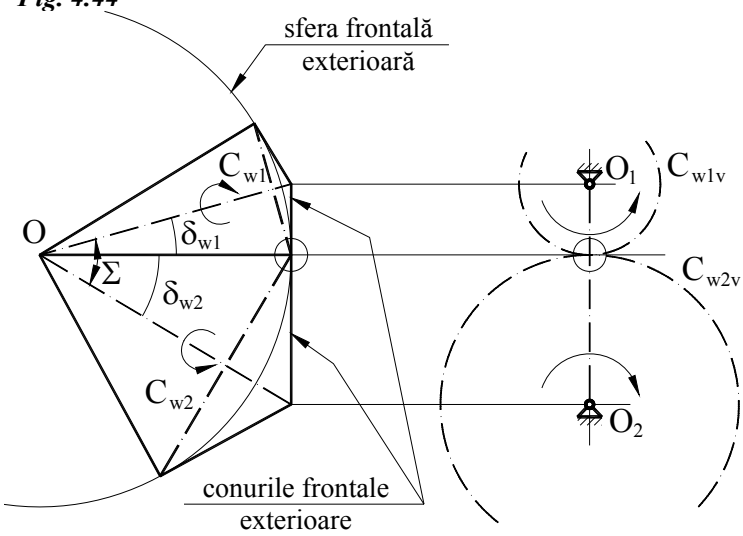


Fig. 4.45

generatoarele conurilor de rostogolire (Fig.4.45). Cele două conuri frontale sunt tangente la sfera frontală după cercurile de rostogolire, iar suprafețele lor sunt foarte apropiate, în această zonă, de suprafața sferică. Prin desfăşurarea în plan

a conurilor frontale exterioare, cercurile de rostogolire C_{w1} şi C_{w2} se transformă în alte două cercuri tangente C_{w1v} şi C_{w2v}. Acestea reprezintă cercurile de rostogolire ale unui angrenaj cu axe paralele, numit **angrenaj analog**.

Dacă unghiul $\delta_{w2} = \frac{\pi}{2}$, conul de rostogolire devine plan şi se obţine un angrenaj roată conică - roată plană (Fig.4.46). Suprafaţa frontală a roţii plane este un cilindru care conţine cercul de rostogolire C_{w2}. Prin desfăşurarea plană a cilindrului frontal, cercul de rostogolire se transformă într-o dreaptă. În felul acesta angrenajul analog este format dintr-o roată cilindrică şi o cremalieră.

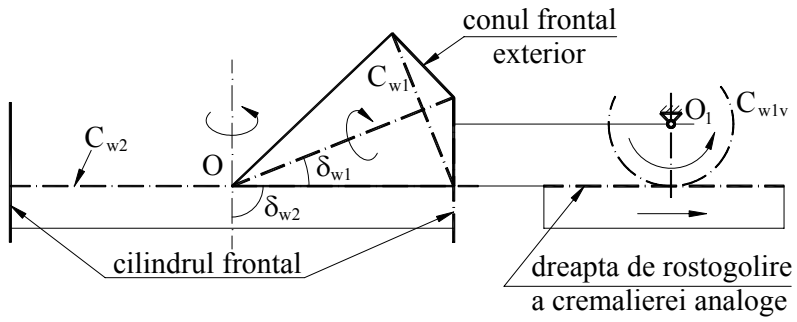


Fig. 4.46

4.1.5.2. Definirea roţii dinţate conice cu dinţi drepţi

Elementul de referinţă al sistemului de roţi conice este roata plană de referinţă. În cazul roţilor conice cu dinţi drepţi, roata plană de referinţă are flancurile plane, iar direcţia dinţilor este radială (Fig.4.47). Roata conică se defineşte din condiţia de angrenare cu roata plană de referinţă. Angrenajul de definire este asociat unui angrenaj analog format dintr-o roată cilindrică şi o cremalieră (Fig.4.48). Cremaliera analogă roţii plane de referinţă este cremaliera de referinţă cu dinţi drepţi care permite definirea roţii cilindrice analoge cu roata conică. Trebuie precizat că dreapta de rostogolire a cremalierei de referinţă analoge corespunde întotdeauna unui plan de rostogolire aparţinând roţii plane, iar dreapta de referinţă are drept corespondent un con de referinţă.

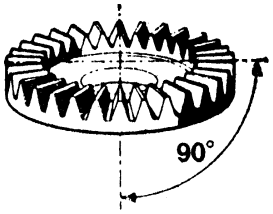


Fig. 4.47

Deoarece unghiul la vârf al conului de referință depinde de deplasarea de profil X, înseamnă că geometria roții plane este determinată de valoarea acestei deplasări.

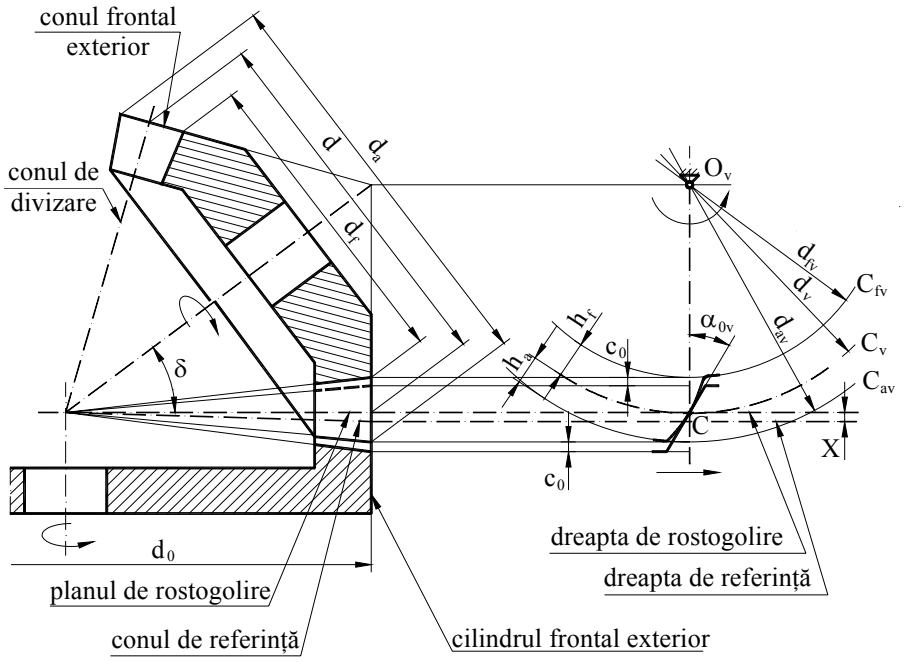


Fig. 4.48

Dantura roții conice, în secțiunea conului frontal, este similară cu dantura roții cilindrice analoge. Parametri X, p, d, h_a, h_f, c_0 se exprimă, în funcție de modulul roții plane de referință, care este şi al cremalierei de referință analoge, cu formulele specifice roții cilindrice cu dinți drepți. Diametrele de cap şi de picior se deduc pe baza schemei din Fig.4.48,

$$\begin{aligned} d_a &= d + 2h_a \cdot \cos\delta = m(z + 2h^*_{a0} \cdot \cos\delta + 2x \cdot \cos\delta) \\ d_f &= d - 2h_f \cdot \cos\delta = m(z - 2h^*_{a0} \cdot \cos\delta - 2c^*_0 \cdot \cos\delta + 2x \cdot \cos\delta), \end{aligned} \qquad (4.130)$$

în care δ este semiunghiul la vârf al conului de divizare.

În cazul roților conice se practică şi o modificare a cremalierei de referință analoge care constă în schimbarea raportului dintre grosimea dintelui şi lățimea golului pe dreapta de referință, care, în mod obişnuit, sunt egale. Această modificare se numeşte corijare tangențială şi are scopul de a realiza o dimensionare mai bună a danturii în raport cu solicitările la care este supusă.

Studiul funcționării unui angrenaj conic reclamă cunoaşterea parametrilor ce caracterizează roata cilindrică analogă: d_v - diametrul de divizare, z_v - numărul de dinți, d_{av}, d_{fv} - diametrele de cap şi de picior,

$$d_v = \frac{d}{\cos\delta} = \frac{m \cdot z}{\cos\delta} \tag{2.131}$$

$$z_v = \frac{d_v}{m} = \frac{z}{\cos\delta} \tag{2.132}$$

$$\begin{cases} d_{av} = d_v + 2h_a = (z_v + 2h_{a0}^* + 2x)m \\ d_{fv} = d_v - 2h_f = (z_v - 2h_{a0}^* - 2c_0^* + 2x)m \end{cases} \tag{2.133}$$

Interesează, de asemenea, parametrii roții plane de referință: d_0 - diametrul roții plane (a cilindrului frontal exterior), z_0 - numărul de dinți,

$$d_0 = \frac{d}{\sin\delta} = \frac{m \cdot z}{\sin\delta} \tag{2.134}$$

$$z_0 = \frac{d_0}{m} = \frac{z}{\sin\delta} \tag{2.135}$$

Se precizează că numerele de dinți z_v şi z_0, care se referă la elemente dințate fictive, au, de regulă, valori fracționare.

4.1.5.3. Angrenajul concurent format din roți conice cu dinți drepți

Angrenajele formate din roți conice definite cu ajutorul unei roți plane de referință cu flancuri plane se numesc **angrenaje octoidale**. Denumirea se explică prin aceea că linia lor de angrenare, pe o sferă frontală, are forma unei octoide (o curbă în forma cifrei opt). Angrenajele octoidale, care prezintă avantaje tehnologice importante, au raport de transmitere riguros constant numai dacă $x_1 + x_2 = 0$. Ca urmare, în practică, se utilizează angrenaje zero ($x_1 + x_2 = 0$) sau zero deplasate ($x_1 = -x_2$). În consecință cercurile de divizare şi de rostogolire ale roților cilindrice analoge coincid, iar conurile de rostogolire se suprapun peste conurile de divizare, astfel încât,

$$\delta_{w1} = \delta_1 \text{ şi } \delta_{w2} = \delta_2,$$

iar unghiul dintre axele de rotație este

$$\Sigma = \delta_1 + \delta_2.$$

Raportul de transmitere se poate calcula cu una din expresiile (4.7), (4.9),

$$i_{12} = \frac{\sin\delta_2}{\sin\delta_1} = \frac{z_2}{z_1} = \frac{d_2}{d_1}. \qquad (4.136)$$

În cazul angrenajelor ortogonale ($\Sigma = 90^0$), care au cea mai mare utilizare practică, raportul de transmitere se poate exprima şi în felul următor:

$$i_{12} = tg\delta_2 = \frac{1}{tg\delta_1}.$$

Problematica legată de cinematica angrenării care include gradul de acoperire, fenomenul de interferenţă şi subtăierea, alunecarea relativă şi ascuţirea profilelor se rezolvă pe angrenajul cilindric analog. Trebuie precizat că raportul de transmitere al acestui angrenaj i_{12v} este diferit de i_{12},

$$i_{12v} = \frac{z_{2v}}{z_{1v}} = \frac{z_2 \cdot \cos\delta_1}{z_1 \cdot \cos\delta_2} = i_{12}\frac{\cos\delta_1}{\cos\delta_2} \qquad (4.137)$$

În cazul angrenajelor ortogonale ($\Sigma = 90^0$), $i_{12v} = i_{12}^2$.

4.1.5.4. Angrenaje concurente cu dinţi înclinaţi şi curbi

Roţile dinţate conice cu dinţi înclinaţi se definesc cu ajutorul roţii plane de referinţă cu dinţi înclinaţi. Această roată are flancurile plane, iar liniile flancurilor, în planul de rostogolire, sunt drepte tangente la un cerc, de rază r_0, cu centrul pe axa roţii (Fig.4.49.a). Roţile conice definite astfel sunt octoidale, iar liniile flancurilor, pe conul de divizare, sunt elici conice cu pas constant. Unghiul de înclinare al dinţilor roţii plane β_{0y}, format între linia flancului şi rază, este variabil cu raza r_{0y} a cercului pe care se măsoară,

$$\sin\beta_{0y} = \frac{r_0}{r_{0y}}.$$

În felul acesta, fiecare secţiune cilindrică frontală a roţii plane este analogă cu o cremalieră de referinţă cu dinţi înclinaţi. Calculul parametrilor geometrici se face pentru secţiunea conului suplimentar exterior, iar elementele standardizate se consideră modulul frontal m_t şi unghiul de presiune al profilului în secţiunea normală α_0. În mod similar, fiecare secţiune conică frontală a roţii conice este analogă cu o roată cilindrică cu dinţi înclinaţi. Geometria acestei roţi, în planul frontal, este definită de cremaliera de referinţă analogă cu roata plană.

Fenomenele de interferenţă, de subtăiere, de ascuţire şi de alunecare a profilelor se studiază pe angrenajul cilindric analog în secţiunea frontală, în care

aceste fenomene se manifestă cel mai nefavorabil. Trebuie subliniat că gradul de acoperire este superior celui obținut la angrenajele cu dinți drepți.

Roțile dințate cu dinți curbi se definesc cu ajutorul unor roți plane de referință având liniile flancurilor în planul de rostogolire - curbe.

În funcție de forma acestor linii există mai multe tipuri de danturi curbe.

- **Dantura în arc de cerc** (Fig.4.49.b). Liniile flancurilor care mărginesc fiecare gol sunt arce de cerc concentrice. Un caz particular al acestei danturi, folosit frecvent în practică, este dantura **zerol**, care are unghiul de înclinare al liniei medii a golului $\beta_{0m} = 0$.

- **Dantura paloidă** (Fig.4.49.c). Liniile flancurilor au forma unor evolvente generate cu ajutorul unui cerc de bază C_b , concentric cu roata plană.

- **Dantura eloidă** (Fig.4.49.d). Liniile flancurilor sunt epicicloide alungite, descrise de un punct A solidar cu un cerc generator C_g , care se rostogoleşte peste un cerc de bază C_b , concentric cu roata.

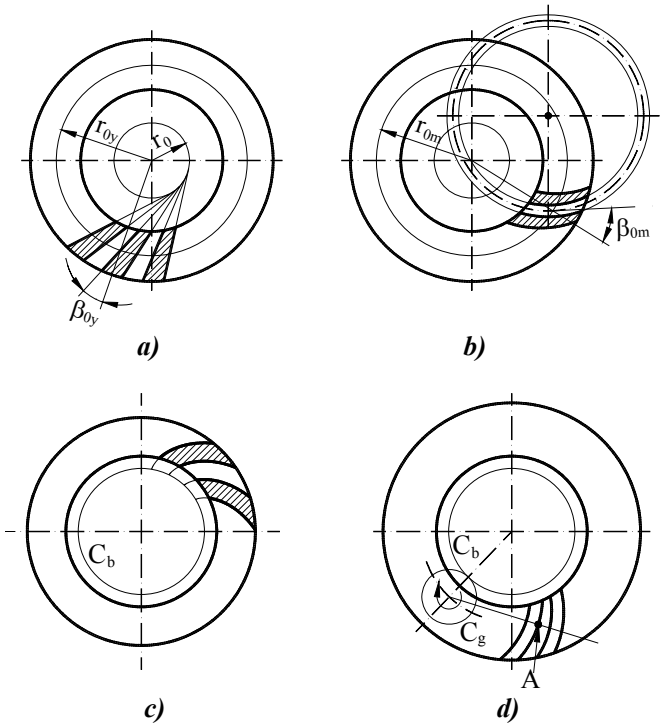


Fig. 4.49

4.1.6. Angrenaje melcate

Angrenajele melcate sunt angrenaje încrucişate, cu unghiul dintre axe $\Sigma = 90^0$, formate din două elemente dinţate numite **melc** şi **roată melcată**.

Melcul este un element dinţat cu flancuri elicoidale şi cu un număr mic de dinţi (1 - 4), constituind elementul de referinţă pentru roata melcată. El are aspectul unui şurub astfel că numărul de dinţi se mai numeşte număr de spire sau de începuturi, ca în cazul şuruburilor. Melcul poate fi interpretat şi ca o roată dinţată cilindrică cu dinţi înclinaţi. Melcul poate fi **cilindric**, dacă suprafeţele de cap şi de picior sunt cilindrice, sau **globoidal** - dacă sunt globoidale.

Elementele geometrice ale melcului de referinţă cilindric (Fig.4.50) se definesc în raport cu cilindrul de referinţă. Linia de referinţă a flancului este o elice de referinţă. Definirea geometrică a melcului se face în secţiunea axială, iar **modulul axial** $\mathbf{m_x}$, este standardizat. În acestă secţiune grosimea dintelui pe generatoarea cilindrului de referinţă este egală cu lăţimea golului, iar parametrii danturii p_0, h_{a0}, h_{f0}, c_0 se exprimă în funcţie de modulul axial (m_x) la fel ca în cazul cremalierei de referinţă cu dinţi drepţi. Diametrul de referinţă d_0 se exprimă prin relaţia

$$d_0 = q \cdot m_x$$

în care q se numeşte **coeficient diametral** şi are valori întregi, standardizate în funcţie de valoarea modulului axial m_x. Unghiul de înclinare al dintelui pe cilindrul de referinţă β_0 se calculează ca la roţile cilindrice cu dinţi înclinaţi (Fig.4.51)

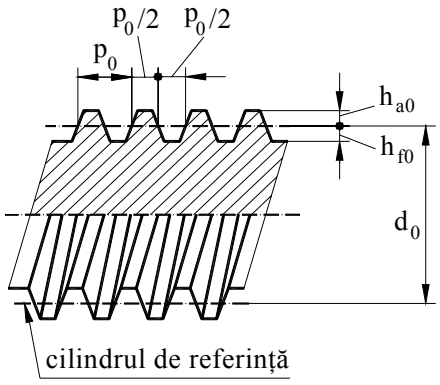


Fig. 4.50

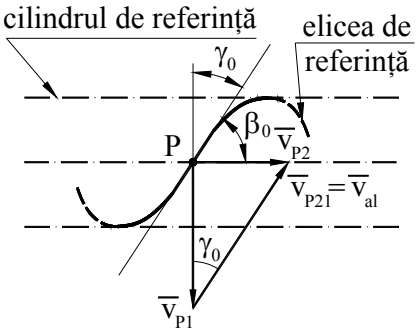


Fig. 4.51

$$tg\beta_0 = \frac{\pi \cdot d_0}{p_z} = \frac{\pi \cdot q \cdot m_x}{p_0 \cdot z_1} = \frac{q}{z_1}. \qquad (4.138)$$

în care p_z este pasul elicei de referință iar z_1 este numărul de începuturi al melcului. Se observă că unghiul β_0 este determinat dacă se cunosc parametrii q şi z_1. Uneori, în locul unghiului β_0 se foloseşte unghiul $\gamma_0 = \pi/2 - \beta_0$, format de elicea de referință cu un plan perpendicular pe axa melcului (Fig.4.51).

Forma flancului şi, deci, a profilului axial depinde de tipul melcului care, la rândul său, este legat de procedeul de prelucrare. Melcii se prelucrează prin procedee specifice şuruburilor: semifabricatul execută o mişcare de rotație, iar scula - o mişcare de translație paralelă cu axa de rotație. În felul acesta se obține o suprafață elicoidală având pasul egal cu deplasarea sculei la o rotație a semifabricatului. Geometria melcului depinde de tipul sculei (cuțit sau freză) şi de aşezarea ei în procesul de prelucrare. Astfel, de exemplu, dacă se foloseşte un cuțit cu muchiile aşchietoare rectilinii poziționate într-un plan axial, se obține un melc de tip ZA (arhimedic) având profilul axial rectiliniu şi profilul frontal de forma spiralei lui Arhimede.

Roata melcată se defineşte din condiția de angrenare cu melcul de referință. Prelucrarea ei se face cu o sculă (freză melc) care are muchiile aşchietoare pe o suprafață identică cu flancul melcului de referință conjugat. Ca urmare, flancurile roții şi ale melcului sunt suprafețe de înfăşurare reciprocă, având contact liniar. În Fig.4.52 este reprezentat angrenajul melcat cilindric în două secțiuni: o secțiune care conține axa melcului şi este perpendiculară pe axa roții melcate (axială pentru melc şi frontală mediană pentru roată) şi altă

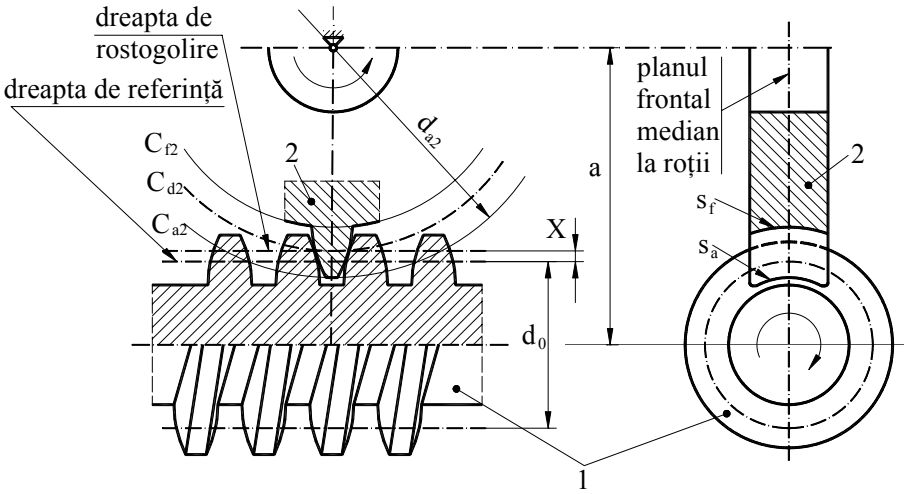


Fig. 4.52

secțiune, care conține axa roții şi este perpendiculară pe axa melcului (axială pentru roată şi frontală pentru melc). Pentru a majora lungimea liniilor de contact dintre flancuri, suprafețele de cap şi de picior ale roții - notate s_a şi s_f se construiesc sub formă globoidală (sunt generate de arce de cerc care se rotesc în jurul axei roții). Angrenarea dintre melcul de referință şi roata melcată poate fi concepută, în secțiunea frontală medie a roții, ca o angrenare cremalieră - roată dințată cilindrică. Această interpretare porneşte de la observația că, odată cu rotația melcului, profilul său axial se deplasează paralel cu axa de rotație. În consecință, parametri geometrici ai roții, în această secțiune, se determină în acelaşi mod ca în cazul definirii roții dințate cilindrice cu dinți drepți cu ajutorul cremalierei de referință.

Mişcarea relativă dintre elementele angrenajului convențional roată dințată - cremalieră este determinată de rostogolirea cercului convențional de divizare al roții C_{d2} peste dreapta convențională de rostogolire a cremalierei. Distanța dintre dreapta de rostogolire a cremalierei şi generatoarea cilindrului de referință a melcului este deplasarea danturii $X = x \cdot m_x$. Trebuie remarcat că numai roata poate avea dantură deplasată, deoarece melcul este element de referință. Distanța dintre axe, atât la definirea roții, cât şi la funcționare, este

$$a_0 = \frac{d_0}{2} + \frac{d_2}{2} + X = \left(\frac{q}{2} + \frac{z_2}{2} + x\right) m_x \qquad (4.139)$$

în care d_2 este diametrul de divizare al roții.

Raportul de transmitere al angrenajului melcat

$$i_{12} = \frac{z_2}{z_1}$$

are valori mari în raport cu alte angrenaje deoarece numărul de începuturi ale melcului (z_1) este mic.

Studiul fenomenelor de interferență, subtăiere şi ascuțire a dinților se face pe baza asimilării cu un angrenaj cremalieră - roată cilindrică. Deşi acest angrenaj nu este, în general, evolventic, relațiile deduse la angrenajele evolventice se pot folosi cu aproximație. Gradul de acoperire al angrenajului melcat este mai mare decât al angrenajului convențional cu cremalieră datorită contactului pe lățimea roții melcate.

Angrenajele melcate au, în general, viteze mari de alunecare între flancuri. Pentru a evalua viteza de alunecare se consideră un punct P situat pe elicea de referință, în secțiunea frontală medie a roții (Fig.4.51). Se scrie ecuația de viteze

$$\overline{v}_{P2} = \overline{v}_{P1} + \overline{v}_{P21},$$

în care $\overline{v}_{P21} = \overline{v}_{al.}$ este tangentă la elicea de referință, iar $\overline{v}_{P1}$ şi $\overline{v}_{P2}$ sunt perpendiculare pe razele punctului P corespunzătoare melcului şi roții melcate. Din triunghiul vitezelor (Fig.4.51) rezultă

$$v_{al} = \frac{v_{P1}}{\cos\gamma_0} = \frac{\omega_1 \cdot d_0}{2\cos\gamma_0} \tag{4.140}$$

Pentru calculul randamentului se poate folosi, cu apoximație, formula de la mecanismele cu şurub, care, cu notațiile angrenajului melcat, este

$$\eta = \frac{tg\gamma_0}{tg(\gamma_0 + \varphi)}, \tag{4.141}$$

în care φ este unghiul de frecare dintre flancuri. Această formulă nu ține seama de pierderile de putere din cuplele de rotație, astfel că, randamentul real este mai mic decât cel calculat cu relația (4.141).

4.1.7. Angrenaje cilindrice cu axe încrucişate (elicoidale)

Angrenajul cilindric cu axe încrucişate este format din două roți cilindrice cu dinți înclinați definite în acelaşi fel ca şi roțile care formează angrenajele paralele. Pentru a înțelege funcționarea angrenajului să considerăm două cremaliere de referință, cu unghiurile de înclinarea ale dinților $\beta_{01} \neq \beta_{02}$, aşezate astfel ca dinții uneia să pătrundă în golurile dintre dinții celeilalte. Astfel, flancurile se suprapun. Desigur, ambele cremaliere trebuie să aibă acelaşi modul normal. Se presupune că fiecare cremalieră angrenează, imaginar, cu o roată cu dinți înclinați. În Fig.4.53 sunt reprezentate cele două angrenaje prin suprafețele lor de rostogolire. Dacă se imprimă roții 1 o mişcare de rotație, aceasta se transmite prin intermediul cremalierelor 1' - 2', care formează un mecanism de familia f = 4 (Fig.4.54), la roata 2. Contactul dintre flancurile

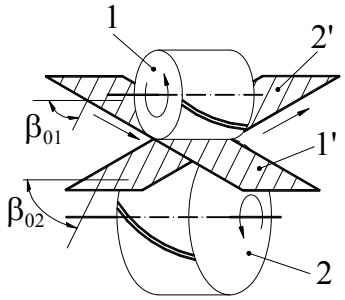


Fig. 4.53

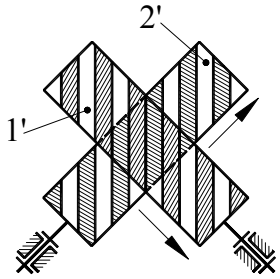


Fig. 4.54

fiecărui angrenaj roată dințată - cremalieră se realizează după o dreaptă. Cele două drepte, conținute în planul care formează flancul comun al cremalierelor se intersectează într-un punct. Rezultă că în acest punct sunt tangente şi flancurile roților. Deci, suprimând cremalierele, mişcarea se poate transmite şi în mod direct între cele două roți, prin intermediul flancurilor dinților care formează un contact punctual. Trebuie remarcat că, deşi transmiterea mişcării se realizează cu raport de transmitere constant, flancurile dinților nu sunt suprafețe de înfăşurare reciprocă.

Elementele geometrice ale angrenajului sunt distanța dintre axe a, definită ca lungimea perpendicularei comune pe cele două axe şi unghiul dintre axe, Σ.

Angrenajul elicoidal se utilizează cel mai frecvent ca angrenaj zero ($x_1 = x_2 = 0$) şi, uneori, ca angrenaj zero deplasat ($x_1 - x_2 = 0$). În ambele cazuri distanța dintre axe este suma razelor de divizare,

$$a = \frac{d_1}{2} + \frac{d_2}{2} = m_n \left(\frac{z_1}{\cos\beta_{01}} + \frac{z_2}{\cos\beta_{02}} \right). \tag{4.142}$$

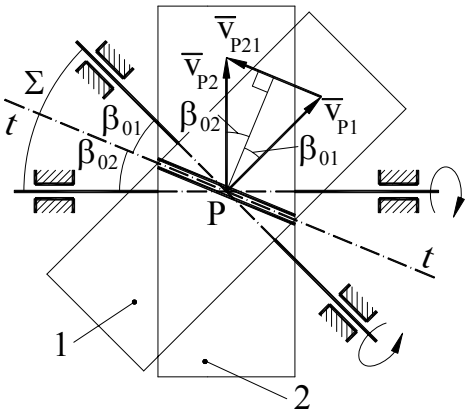


Fig. 4.55

Se consideră cei doi cilindri de divizare tangenți, proiectați pe un plan paralel cu axele roților (Fig.4.55), în care apar unghiurile Σ, β_{01} şi β_{02} în adevărata mărime, de unde rezultă

$$\Sigma = \beta_{01} + \beta_{02}.$$

În aplicațiile practice axele sunt, de regulă, perpendiculare, $\Sigma = \frac{\pi}{2}$.

Dacă exprimăm numerele de dinți în funcție de diametrele de divizare (4.107), raportul de transmitere se poate scrie astfel

$$i_{12} = \frac{z_2}{z_1} = \frac{d_2 \cdot \cos\beta_{02}}{d_1 \cdot \cos\beta_{01}}. \tag{4.143}$$

În cazul $\Sigma = \frac{\pi}{2}$ formula devine

$$i_{12} = \frac{z_2}{z_1} = \frac{d_2}{d_1} \mathrm{tg}\beta_{01}.$$

Pe baza ecuației de viteze pentru un punct de contact P,

$$\overline{v}_{P2} = \overline{v}_{P1} + \overline{v}_{P21},$$

se construieşte triunghiul vitezelor (Fig.4.55) în care $\overline{v}_{P1}$ şi $\overline{v}_{P2}$ sunt perpendiculare pe axele roților, iar $\overline{v}_{P21} = \overline{v}_{al.}$ este paralelă cu direcția comună a dinților , tt. Din acest triunghi rezultă

$$v_{al} = v_{P1} \cdot \sin\beta_{01} + v_{P2} \cdot \sin\beta_{02} = \frac{d_1}{2}\omega_1 \cdot \sin\beta_{01} + \frac{d_2}{2}\omega_2 \cdot \sin\beta_{02}. \qquad (4.144)$$

4.1.8. Angrenaje hipoide

Aşa cum am arătat la clasificarea generală, angrenajele hipoide au axele încrucişate şi sunt formate din roți conice. Formarea angrenajului hipoid, legată de definirea şi prelucrarea roților componente, se poate face în două moduri.

În primul caz se consideră două roți plane de referință cu axele paralele, aşezate în aşa fel ca dinții uneia să pătrundă în golurile dintre dinții celeilalte (Fig.4.56). Se presupune că fiecare roată plană defineşte o roată conică cu care poate angrena. Rotația roții 1 se transmite, prin angrenajele imaginare 1 - 1', 1' - 2', 2' - 2 la roata 2. Trebuie precizat că angrenajul roților plane 2 - 2' este un fel de angrenaj cu axe paralele, astfel încât, liniile flancurilor trebuie să fie profile de înfăşurare reciprocă. Dintre roțile plane cu dinți curbi numai cele cu dantură paloidă, care au liniile flancurilor în evolventă, satisfac această condiție. În timp ce angrenajele 1 - 1' şi 2 - 2' au contact liniar, flancurile roților 1 şi 2 formează

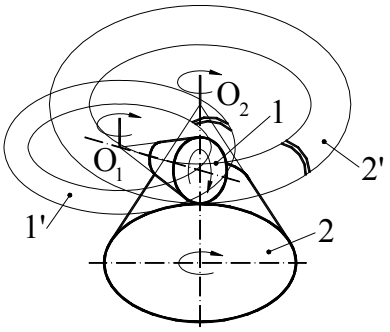


Fig. 4.56

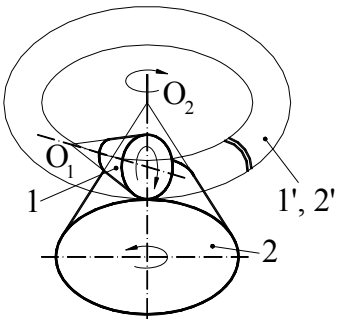


Fig. 4.58

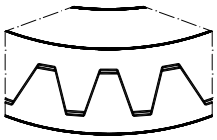


Fig. 4.57

un contact punctual. Astfel, mişcarea se poate transmite şi în mod direct, prin angrenarea celor două roți paloide.

Un alt mod de formare al angrenajului hipoid presupune definirea roților componente cu ajutorul unor roți

plane având dinţii întrepătrunşi, cu flancuri congruente (Fig.4.57). Angrenajele de definire pot fi ambele încrucişate sau unul concurent şi unul încrucişat ca în Fig.4.58). Dantura roţilor poate fi înclinată sau curbă.

Raportul de transmitere al angrenajului hipoid se exprimă în mod similar cu cel al angrenajului elicoidal

$$i_{12} = \frac{z_2}{z_1} = \frac{d_{m2} \cdot \cos\beta_{02}}{d_{m1} \cdot \cos\beta_{01}}, \tag{4.145}$$

în care d_{m1} şi d_{m1} sunt diametrele de divizare într-o secţiune frontală medie, iar β_{01} şi β_{02}, unghiurile de înclinare ale flancurilor în aceeaşi secţiune.

4.1.9. Precizia angrenajelor

4.1.9.1. Problema jocului dintre flancuri

Precizia angrenajelor beneficiază de un înalt grad de standardizare ceea ce simplifică problema stabilirii valorilor indicilor de precizie. Indicii de precizie sunt abaterile pentru diverşi parametri care, în ansamblul lor, caracterizează precizia roţilor şi a angrenajului.

În cazul angrenajelor cilindrice există 12 trepte de precizie şi trei criterii de precizie: criteriul de **precizie cinematică**, criteriul de **funcţionare lină** şi criteriul de **contact dintre dinţi** (STAS 6273-81). Fiecare criteriu este asociat cu un complex de indici de precizie de natură să asigure cerinţele unei funcţionări corecte după criteriul respectiv. Alegerea treptei de precizie şi a criteriului de precizie se face în funcţie de destinaţia angrenajului şi de condiţiile de funcţionare specifice. Cunoscând treapta şi criteriul de precizie, se determină, din tabele, toleranţele pentru indicii de precizie care interesează. În felul acesta se elimină necesitatea determinării prin calcul a preciziei funcţionale după procedeul utilizat la alte tipuri de mecanisme.

O problemă importantă care intervine la proiectarea unui angrenaj este cea a jocului dintre flancuri. În calculul geometric al angrenajului teoretic, jocul dintre flancuri se consideră nul. Această ipoteză nu poate fi admisă practic, deoarece angrenajul real prezintă abateri geometrice şi dimensionale, precum şi deformaţii termice, care pot conduce la blocare. Din această cauză trebuie să se asigure un joc minim garantat. Această cerinţă se poate rezolva în două moduri: prin modificare deplasărilor de profil şi prin mărirea distanţei dintre axe.

- **Modificarea deplasărilor de profil**

Se consideră un angrenaj cilindric paralel cu dinţi drepţi fără joc între flancuri (Fig.4.59). Se efectuează o modificare a coeficientului de deplasare a

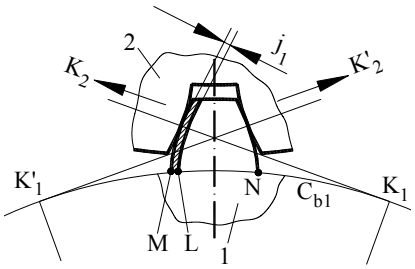


Fig. 4.59

roții 1, de la valoarea x_1 la valoarea ($x_1 + x_{s1}$). Ca urmare, profilul dintelui se modifică, la rândul său. Dacă inițial profilul este mărginit de evolventele care se sprijină pe cercul de bază în M şi N, după modificare el este format de evolventele care încep în punctele L şi N. În felul acesta se obține jocul între flancuri j_l măsurat pe dreapta de angrenare K_1K_2. Procesul de generare a evolventelor din M şi L, prin rostogolirea dreptei de angrenare peste cercul de bază C_{b1}, conduce la egalitatea

$$j_l = \widehat{ML},$$

în care $\widehat{ML}$ este

$$\widehat{ML} = \widehat{MN} - \widehat{LN} = s_{b1} - s_{b1x}.$$

Arcele de bază ale dintelui s_{b1} şi s_{b1x} se exprimă după formula (4.35) cu $\alpha_y = \alpha_b = 0$,

$$s_{b1} = m \cdot z_1 \cos\alpha_0 \left(\frac{\pi}{2z_1} + \frac{2x_1 tg\alpha_0}{z_1} + inv\alpha_0 \right)$$

$$s_{b1x} = m \cdot z_1 \cos\alpha_0 \left(\frac{\pi}{2z_1} + \frac{2(x_1 + x_{s1}) \cdot tg\alpha_0}{z_1} + inv\alpha_0 \right)$$

şi se calculează j_l,

$$j_l = s_{b1} - s_{b1x} = -2m \cdot x_{s1} \sin\alpha_0 . \qquad (4.146)$$

În ipoteza că se face o modificare similară pentru roata 2, jocurile j_l şi j_l se cumulează obținând

$$j = j_l + j_2 = -2m(x_{s1} + x_{s2}) \sin\alpha_0 . \qquad (4.147)$$

Dacă jocul j este prestabilit, se calculează $(x_{s1} + x_{s2})$

$$x_{s1} + x_{s2} = -\frac{j}{2m \cdot \sin\alpha_0} . \qquad (4.148)$$

Se observă că suma corecțiilor coeficienților de deplasare trebuie să fie negativă. Practic, se operează corecții negative şi egale pentru cele două roți.

■ **Majorarea distanței dintre axe**

Ca şi în cazul precedent, se consideră, inițial, un angrenaj fără joc între flancuri caracterizat prin distanța dintre axe a, care se majorează la valoarea a_j. Prin această operație se obține un angrenaj cu joc între flancuri (Fig.4.60), care are unghiul de angrenare α_{wj} diferit de cel inițial, rezultând din formula (4.39),

$$\cos\alpha_{wj} = \frac{a_0}{a_j}\cos\alpha_0 .$$

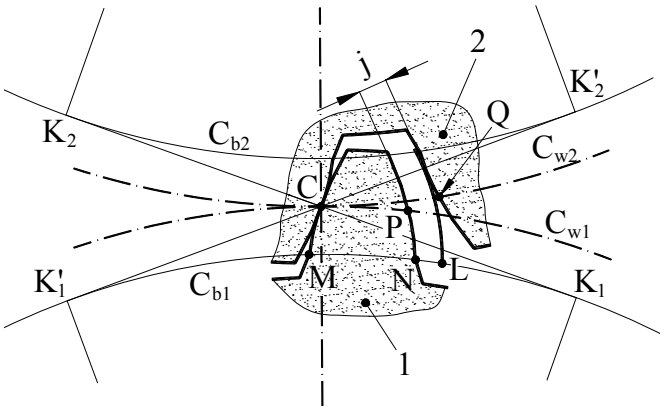


Fig. 4.60

În acest angrenaj arcul de divizare al dintelui roții a, $s_{w1j} = \widehat{CP}$, este mai mic decât arcul de divizare al golului roții 2, $e_{w2j} = \widehat{CQ}$. Diferența $(e_{w2j} - s_{w1j})$ este arcul descris de un punct de pe cercul de rosogolire al roții 1, pentru a străbate jocul, iar unghiul corespunzător de rotație al roții este

$$\varphi_j = \frac{2(e_{w2j} - s_{w1j})}{d_{w1j}} .$$

Dacă se menține roata 2 fixă şi se roteşte roata 1 astfel încât profilul care începe în N străbate jocul ajungând tangent la profilul roții 2, unghiul de rotație se poate scrie

$$\varphi_j = \frac{2\widehat{NL}}{d_{b1}} = \frac{2\overline{j}}{d_{b1}} .$$

Egalând cele două expresii ale unghiului φ_j se obține

$$j = \frac{d_{b1}(e_{w2j} - s_{w1j})}{d_{w1j}}. \qquad (4.149)$$

Parametrii care intervin în această relație au expresiile

$$d_{b1} = m \cdot z_1 \cos\alpha_0$$

$$d_{w1j} = m \cdot z_1 \frac{\cos\alpha_0}{\cos\alpha_{wj}}$$

$$e_{w2j} = m \cdot z_2 \frac{\cos\alpha_0}{\cos\alpha_{wj}} \left(\frac{\pi}{2z_2} - \frac{2x_2 tg\alpha_0}{z_2} - inv\alpha_0 + inv\alpha_{wj} \right)$$

$$s_{w1j} = m \cdot z_1 \frac{\cos\alpha_0}{\cos\alpha_{wj}} \left(\frac{\pi}{2z_1} + \frac{2x_1 tg\alpha_0}{z_1} + inv\alpha_0 - inv\alpha_{wj} \right).$$

Înlocuind în formula (4.149) se ajunge la relația

$$j = m \cdot \cos\alpha_0((z_1 + z_2)(inv\alpha_{wj} - inv\alpha_0) - 2(x_1 + x_2)tg\alpha_0), \qquad (2.150)$$

din care se poate determina unghiul de angrenare α_{wj} prin intermediul funcției $inv\alpha_{wj}$,

$$inv\alpha_{wj} = inv\alpha_0 + \frac{2(x_1 + x_2)}{(z_1 + z_2)} tg\alpha_0 + \frac{j}{(z_1 + z_2) \cdot m \cdot \cos\alpha_0}. \qquad (4.151)$$

Cunoscând unghiul de angreanre, se poate calcula distanța dintre axe modificată

$$a_j = a_0 \frac{\cos\alpha_0}{\cos\alpha_{wj}}. \qquad (4.152)$$

4.1.9.2. Bazele geometrice ale măsurării danturii

În cadrul operației de control a roților dințate unii parametri nu se pot măsura în mod direct datorită specificului lor şi al aparatelor de măsură. Ca urmare, se adoptă, în vederea măsurării, anumite cote care nu fac parte dintre parametri principali ai angrenajului, dar abaterile lor reflectă gradul de percizie al acestuia. Pentru a efectua această operație este nevoie să se calculeze valorile nominale ale cotelor de măsurare.

- **Coarda de divizare şi coarda constantă**

Arcul de divizare al dintelui este un parametru important pentru aprecierea preciziei roții. El nu se poate măsura direct, fiind vorba de un arc, şi

atunci se măsoară coarda de divizare. Valoarea ei s_{cd}, precum şi distanţa de la coarda de divizare la vârful dintelui, h_{cd}, care interesează în operaţia de măsurare, se determină pe baza schemei din Fig.4.61,

$$s_{cd} = d \cdot \sin\frac{\varphi}{2} = d \cdot \sin\left(\frac{s}{d}\right) = m \cdot z \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2z} + 2\frac{x}{z}\,tg\alpha_0\right)$$

$$h_{cd} = h_a + \frac{d}{2}\left(1 - \cos\left(\frac{s}{d}\right)\right) = h_a + \frac{m \cdot z}{2}\left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{2z} + 2\frac{x}{z}\,tg\alpha_0\right)\right) \quad (4.153)$$

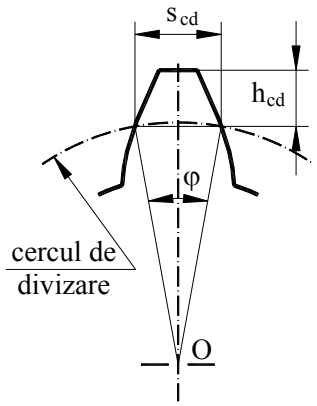


Fig. 4.61

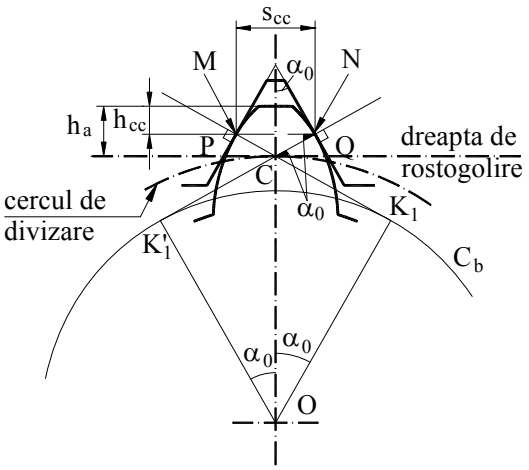


Fig. 4.62

Un alt parametru de control este coarda constantă, care se măsoară între punctele de tangenţă ale profilelor dintelui cu profilele golului cremalierei de referinţă, $s_{cc} = MN$ (Fig.4.62). Dreptele K_1M şi $K_1'N$, perpendiculare pe profilele cremalierei în punctele de contact şi tangente la cercul de bază al roţii, sunt desigur dreptele de angrenare, iar intersecţia lor cu axa dintelui este punctul de rostogolire C. Prin acest punct trec cercul de divizare al roţii şi dreapta de rostogolire a cremalierei. Cu aceste precizări, urmărind Fig.4.62, se poate scrie

$$s_{cc} = 2MC\cos\alpha_0 = 2PC\cos^2\alpha_0 = PQ\cos^2\alpha_0 .$$

Segmentul PQ este lăţimea de rostogolire a golului cremalierei e_{w0} (Fig.4.16), asfel încât rezultă

$$s_{cc} = m\left(\frac{\pi}{2} + 2x\,tg\alpha_0\right)\cos^2\alpha_0 . \quad (4.154)$$

Segmentul h_{cc}, care precizează poziţia coardei constante, este

$$h_{cc} = h_a - \frac{e_{w0}}{2}\cos\alpha_0 \sin\alpha_0 . \qquad (4.155)$$

Aşa cum rezultă din (4.154), coarda constantă nu depinde de numărul de dinţi ai roţii ci numai de modul şi de coeficientul de deplasare, proprietate care explică denumirea.

■ Cota peste dinţi

Cota peste dinţi este segmentul delimitat de două profile antiomoloage, pe normala lor comună. Această cotă se poate măsura cu uşurinţă, folosind instrumente cu fălci plane, paralele (şublere, micrometre, etc.) (Fig.4.63). Numărul de dinţi (n) peste care se face măsurătoarea, se determină astfel ca limitele cotei să cadă pe profilele de cap, şi este indicat în tabele, în funcţie de numărul de dinţi [35]. Normala comună MN este tangentă la cercul de bază, fiind egală cu arcul $\widehat{M_b N_b}$ peste care se rulează pentru generarea profilelor. În aceste condiţii, cota peste dinţi este

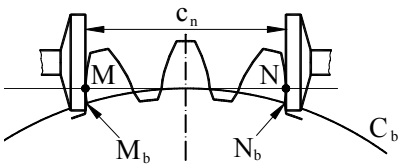


Fig. 4.63

$$c_n = (n-1)p_b + s_b ,$$

$$c_n = m\cos\alpha_0\left((n-1)\pi + \frac{\pi}{2} + 2x\,\mathrm{tg}\alpha_0 + z\cdot \mathrm{inv}\alpha_0\right). \qquad (4.156)$$

■ Cota peste role

Această cotă este distanţa dintre generatoarele unor role de diametru cunoscut d_r, dispuse în goluri diametral opuse ale roţilor (Fig.4.65a, b). Pentru determinarea cotei c_r, se calculează preliminar diametrul cercului pe care se află centrul rolei când este tangentă cu profilele golului (Fig.4.64). Pentru acesta, se consideră o evolventă echidistantă cu profilul NR, care trece prin centrul rolei, notată LQ. Pe baza schemei din Fig.4.64 se determină unghiul α_Q, prin intermediul funcţiei involută

$$\mathrm{inv}\alpha_Q = \theta_Q = \frac{2LP}{d_b} = \frac{2(LN-PN)}{d_b} = \frac{2\left(\frac{d_r}{2} - \frac{s_b}{2}\right)}{d_b} = \frac{d_r - s_b}{d_b} =$$

$$= \frac{d_r - s_b}{d_b} = \frac{d_r - \left(\frac{\pi}{2} - 2x\,tg\alpha_0 - z \cdot inv\alpha_0\right) m\cos\alpha_0}{mz\cos\alpha_0}. \qquad (4.157)$$

Cunoscând α_Q, se determină d_Q din triunghiul OQK

$$d_Q = \frac{r_b}{\cos\alpha_Q} = mz\frac{\cos\alpha_0}{\cos\alpha_Q}. \qquad (4.158)$$

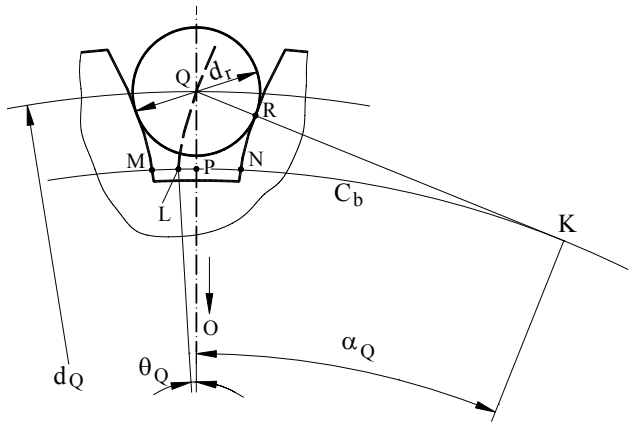


Fig. 4.64

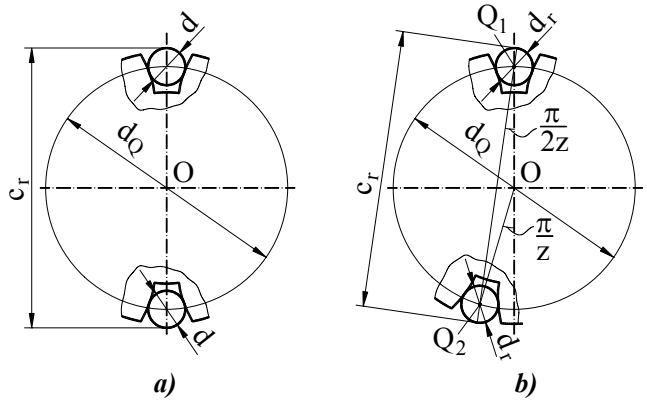


Fig. 4.65

În cazul în care numărul de dinți este par, rolele se aşează ca în Fig.4.65a, iar cota c_r este

$$c_r = d_Q + d_r. \qquad (5.159)$$

Dacă numărul de dinți este impar, intervine situația din Fig.4.65b, iar cota c_r este

$$c_r = Q_1Q_2 + d_r = d_Q \cos\frac{\pi}{2z} + d_r . \qquad (4.160)$$

4.2. MECANISME COMPLEXE CU ROȚI DINȚATE

4.2.1. Mecanisme complexe cu axe fixe

Mecanismele complexe cu roți dințate cu axe fixe se formează prin legarea în serie a mecanismelor elementare, astfel încât elementul condus al unui angrenaj component este cuplat (solidarizat) cu elementul conducător al angrenajului următor. Mecanismele obținute în felul acesta se mai numesc **trenuri de angrenaje**.

4.2.1.1. Analiza cinematică

Raportul de transmitere al unui mecanism complex se defineşte cu ajutorul expresiilor(*)

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_n}, \qquad (4.161)$$

$$\tilde{i}_{12} = \frac{\tilde{\omega}_1}{\tilde{\omega}_n} . \qquad (4.162)$$

în care cu 1 se notează elementul conducător şi cu n – elementul condus.

Expresia (4.161) nu ține seama de sensurile de rotație ale elementelor 1 şi n, şi are aplicabilitate generală. Expresia (4.162) se aplică numai dacă axele de rotație ale elementelor 1 şi n sunt paralele, deci sensurile de rotație sunt comparabile şi pot fi asociate convențional cu semnele vitezelor unghiulare. În mod evident, raportul de transmitere $\tilde{i}_{1n}$ este pozitiv când roțile 1 şi n se rotesc în acelaşi sens şi negativ când se rotesc în sensuri opuse.

Raportul de transmitere i_{1n} al unui mecanism complex, se calculează ca produsul rapoartelor de transmitere ale mecanismelor elementare componente, considerate scalari fără semn.

Pentru a verifica această regulă, se consideră un tren de roți dințate format din angrenajele 1-2, $2'-3$, $3'-4 \ldots (n-1)'-n$, în care roțile 2 şi $2'$, 3 şi

(*) *În cadrul acestui capitol, vitezele unghiulare, raportul de transmitere şi momentele se notează* ω, i_{1n}, *M, dacă sunt scalari fără semn, şi* $\tilde{\omega}$, $\tilde{i}_{1n}$, $\widetilde{M}$, *dacă sunt scalari cu semn.*

3',… sunt cuplate, formând un singur element, (Fig.4.66). Făcând produsul rapoartelor de transmitere parțiale, exprimate prin formulele de definiție, se obține

$$i_{12}\cdot i_{23}\cdot\ldots\cdot i_{n-1,n}=\frac{\omega_1}{\cancel{\omega_2}}\cdot\frac{\cancel{\omega_2}}{\cancel{\omega_3}}\cdot\ldots\cdot\frac{\cancel{\omega_{n-1}}}{\omega_n}=\frac{\omega_1}{\omega_n}=i_{1n}\,.$$

Raportul de transmitere al fiecărui angrenaj component, $(k-1)'-k$, se calculează cu formula (4.9),

$$i_{k-1,k}=\frac{z_k}{z_{(k-1)'}}\,, \tag{4.163}$$

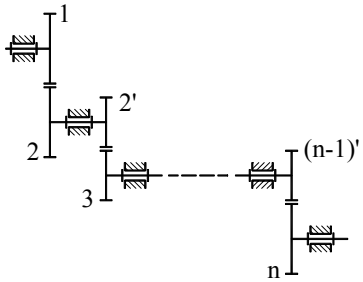


Fig. 4.66

în care z_k şi $z_{(k-1)'}$ reprezintă numerele de dinți ale roților. În afară de această formulă generală, valabilă pentru toate tipurile de angrenaje, se pot folosi şi formule specifice, exprimate în funcție de alți parametri constructivi.

Raportul de transmitere $\tilde{i}_{1n}$ se calculează în mod diferit în funcție de structura mecanismului complex. Dacă acesta este format numai din angrenaje paralele, se aplică următoarea regulă.

Raportul de transmitere $\tilde{i}_{1n}$ este egal cu produsul rapoartelor parțiale, luate fiecare, cu semnul său. Raportul de transmitere parțial al angrenajului $(k-1)'-k$, este

$$\tilde{i}_{k-1,k}=\pm\frac{z_k}{z_{(k-1)'}}\,, \tag{4.164}$$

în care semnul (-) corespunde angrenajelor exterioare, iar (+), celor interioare. Pentru exemplificare, raportul de transmitere al mecanismului din Fig.4.67 este

$$\tilde{i}_{14}=\tilde{i}_{12}\cdot\tilde{i}_{23}\cdot\tilde{i}_{34}=\left(-\frac{z_2}{z_1}\right)\left(+\frac{z_3}{z_2'}\right)\left(-\frac{z_4}{z_3'}\right)=\frac{z_2z_3z_4}{z_1z_2'z_3'}\,.$$

Dacă mecanismul complex este format din angrenaje de tipuri diferite (paralele, concurente, încrucişate), dar elementele 1 şi n au axele paralele, raportul de transmitere $\tilde{i}_{1n}$ se determină în două etape. În prima etapă se determină raportul i_{1n}, după regula indicată anterior, iar în etapa a doua se stabileşte semnul, prin analiza transmiterii mişcării din aproape în aproape. Se consideră, pentru exemplificare, mecanismul din Fig.4.68. Raportul i_{14}, este

$$i_{14} = i_{12} \cdot i_{23} \cdot i_{34} = \frac{z_2 z_3 z_4}{z_1 z_2' z_3'} .$$

Pentru stabilirea semnului, se consideră un sens de rotație pentru roata 1 (real sau arbitrar), care se pune în evidență pe desen, prin viteza punctului de pe periferia roții, cel mai apropiat de observator. Imaginând transmiterea mişcării în angrenajul 1-2, se stabileşte sensul de rotație pentru roata 2. Procedând similar pentru angrenajele $2'-3$ şi $3'-4$, se stabileşte sensul de rotație pentru roata 4. Aşa cum se observă (Fig.4.68), roțile 1 şi 4 se rotesc în sensuri diferite, deci raportul de transmitere global $\tilde{i}_{14}$ este negativ şi are expresia

$$\tilde{i}_{14} = -i_{14} = -\frac{z_2 z_3 z_4}{z_1 z_2' z_3'} .$$

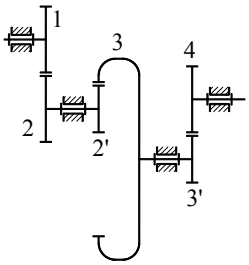


Fig. 4.67

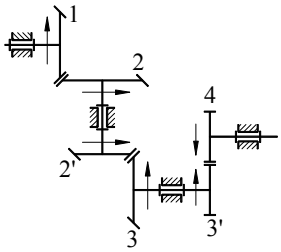


Fig. 4.68

4.2.1.2. Randamentul, transmiterea momentelor

Randamentul unui mecanism complex se defineşte conform cu (2.107), ca fiind raportul dintre puterea utilă $P_u = P_n$ şi puterea motoare $P_m = P_1$,

$$\eta = \frac{P_n}{P_1} . \qquad (4.165)$$

În cazul legării în serie, randamentul mecanismului complex se determină ca produsul randamentelor mecanismelor componente.

Pentru verificare, se consideră mecanismul din Fig. 4.66, şi se face produsul randamentelor parțiale:

$$\eta_{12} \cdot \eta_{23} \cdot \ldots \cdot \eta_{n-1,n} = \frac{\cancel{P_2}}{P_1} \cdot \frac{\cancel{P_3}}{\cancel{P_2}} \cdot \ldots \cdot \frac{P_n}{\cancel{P_{n-1}}} = \frac{P_n}{P_1} = \eta .$$

Valorile randamentelor parțiale se încadrează, în funcție de tipul angrenajului, între limitele indicate în Tab. 4.1. Aceste valori au în vedere numai pierderile de putere în angrenare, astfel încât valorile globale, care țin seama şi de pierderile din lagăre, sunt ceva mai mici.

Relația dintre momentul rezistent $\left(M_n, \tilde{M}_n\right)$ şi momentul motor $\left(M_1, \tilde{M}_1\right)$, se stabileşte având în vedere că

$$P_1 = M_1\omega_1 = \tilde{M}_1\tilde{\omega}_1$$
$$P_n = M_n\omega_n = -\tilde{M}_n\tilde{\omega}_n .$$

Tabelul 4.1

Tipul angrenajului		Randamentul
paralel	cilindric cu dinți drepți	0,98 – 0,995
	cilindric cu dinți înclinați	
	roată cilindrică - cremalieră	
	cilindric interior	
concurent	conic cu dinți drepți	0,98 – 0,99
	conic cu dinți înclinați	
	conic cu dinți curbi în arc de cerc (zerol)	
încrucişat	melcat	0,3 – 0,9
	elicoidal	0,7 - 97

Introducând aceste expresii în formula (4.165) se obțin relațiile

$$M_1 = \frac{1}{\eta \cdot i_{1n}} M_n \tag{4.166}$$

$$\tilde{M}_1 = -\frac{1}{\eta \cdot \tilde{i}_{1n}} \tilde{M}_n . \tag{4.167}$$

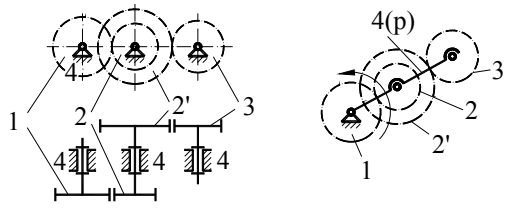
Relația (4.166), care nu ia în considerare sensurile momentelor, are aplicabilitate generală, pe când relația (4.167) se aplică numai când elementul 1 şi elementul 2 au axe paralele.

4.2.2. Mecanisme planetare

4.2.2.1. Structura mecanismelor planetare

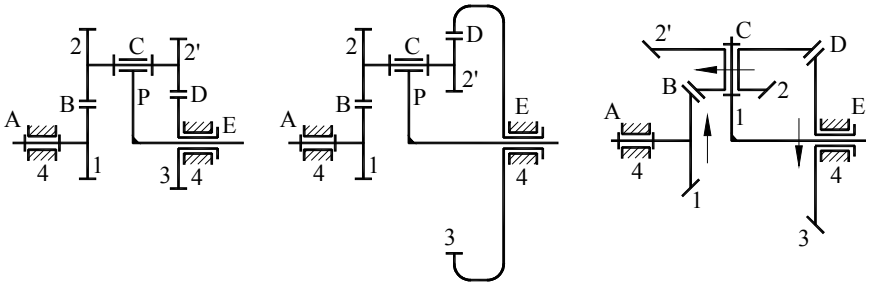
Mecanismele planetare pot fi **simple** sau **complexe**. Un mecanism planetar simplu, se obține pornind de la un mecanism format din roți dințate cu

axe fixe, dacă elementului fix i se imprimă o mişcare de rotaţie în jurul axei uneia dintre roţi. Această transformare este ilustrată în Fig.4.69, în care sunt reprezentate mecanismul cu axe fixe iniţial (Fig.4.69.a) şi mecanismul planetar simplu (Fig.4.69.b). Roata 1, care se roteşte în jurul unei axe fixe, se numeşte **roată centrală** sau **solară**. Celelalte roţi 2-2' şi 3, care se rotesc în jurul unor axe mobile, se numesc **sateliţi**, iar elementul 4(P) iniţial fix, care se roteşte în jurul unei axe fixe, care coincide cu axa roţii centrale, se numeşte **portsatelit**. În aplicaţiile practice se întâlnesc în special mecanismele planetare simple, cu revenire, care conţin două roţi centrale coaxiale. Cele mai reprezentative mecanisme de acest fel, sunt cele din Fig.4.70. În aceste mecanisme roţile centrale sunt notate 1 şi 3, sateliţii, 2-2', iar portsatelitul, P. Roţile centrale şi portsatelitul poartă denumirea de **elemente de bază**.



a) *b)*

Fig. 4.69



a) *b)* *c)*

Fig. 4.70

Mecanismele planetare simple pot fi **diferenţiale**, atunci când ambele roţi centrale sunt mobile (Fig.4.70.a, b, c) sau **planetare propriuzise**, când una dintre roţile centrale este fixă. În Fig.4.71 este reprezentat un mecanism planetar propriuzis, obţinut prin fixarea roţii centrale 3 a mecanismului diferenţial din Fig.4.70.b. Între cele două categorii de mecanisme se înregistrează şi o diferenţă funcţională; mecanismele diferenţiale au gradul de mobilitate $M = 2$ iar

planetarele propriuzise $M = 1$. Mecanismele din Fig.4.70.a şi 4.70.b sunt plane, iar cel din Fig. 4.70.c este sferic, astfel că formula de calcul a gradului de mobilitate este

$$M = 3(n-1) - 2C_5 - C_4 .$$

Pentru mecanismele diferențiale (Fig.4.70.a, b, c),

n = 5(1, 2- 2', 3, 4, P)

C_5 = 4(A, C, E-dublă)

C_4 = 2(B, D),

rezultând M = 2.

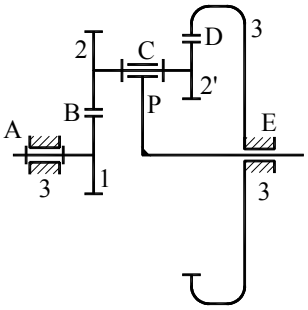


Fig. 4.71

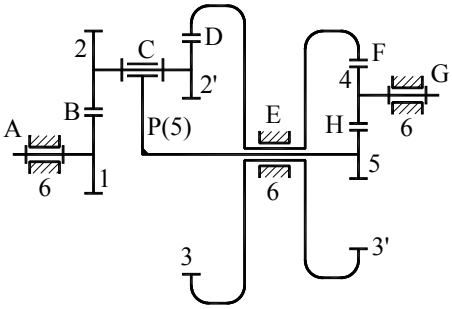


Fig. 4.72

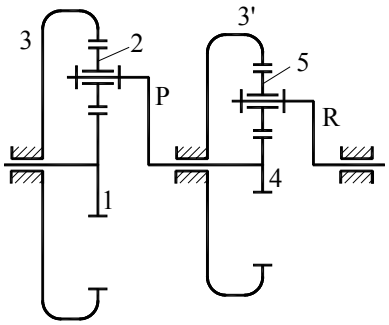


Fig. 4.73

Pentru mecanismele planetare (Fig.4.71),

n = 4(1, 2- 2', 3, P(4))

C_5 = 3(A, C, E)

C_4 = 2(B, D),

rezultând $M = 1$.

Dacă între două elemente de bază ale unui mecanism diferențial se interpune un tren de roți dințate cu axe fixe, se obține un diferențial cu închidere, care are gradul de mobilitate M = 1. În cazul diferențialului cu închidere din Fig.4.72,

n = 6(1, 2, 3, 4, 5(P), 6)

C_5 = 5(A, C, E-dublă, G)

C_4 = 4(B, D, F, H),

rezultând M = 1.

Mecanismele planetare complexe se obțin prin legarea în diverse moduri, a unor mecanisme planetare simple. În Fig.4.73 este reprezentat un mecanism planetar complex, obținut prin legarea în serie, a două planetare simple propriuzise.

4.2.2.2. Analiza cinematică

Analiza cinematică a unui mecanism planetar simplu, se bazează pe observația că în ipoteza adoptării portsatelitului ca element de referință, mecanismul planetar se transformă într-un mecanism cu axe fixe. În această ipoteză se poate scrie expresia de definiție a raportului de transmitere $\tilde{i}_{13}^{P}$ al mecanismului cu axe fixe, format din angrenajele 1-2, 2'-3 (Fig.4.70),

$$\tilde{i}_{13}^{P} = \frac{\tilde{\omega}_{1P}}{\tilde{\omega}_{3P}}$$

în care $\tilde{\omega}_{1P}$ şi $\tilde{\omega}_{3P}$ sunt vitezele relative ale roților 1 şi 3 față de portsatelit,

$$\tilde{\omega}_{1P} = \tilde{\omega}_1 - \tilde{\omega}_P$$

$$\tilde{\omega}_{3P} = \tilde{\omega}_3 - \tilde{\omega}_P .$$

Introducând aceste relații în expresia raportului de transmitere $\tilde{i}_{13}^{P}$, se obține

$$\tilde{i}_{13}^{P} = \frac{\tilde{\omega}_1 - \tilde{\omega}_P}{\tilde{\omega}_3 - \tilde{\omega}_P} . \qquad (4.168)$$

Relația (4.168), numită formula lui Willis, descrie comportarea cinematică a mecanismului planetar. Pentru a face aplicabilă această formulă, valoarea raportului $\tilde{i}_{13}^{P}$ trebuie determinată în funcție de tipul angrenajelor şi de numerele de dinți ale roților. Astfel, pentru mecanismele din Fig.4.70, $\tilde{i}_{13}^{P}$ se determină după reguluile de la par. 4.2.1.1, aşa cum se arată în continuare.

• **mecanismul din Fig. 4.70.a**

$$\tilde{i}_{13}^{P} = \left(-\frac{z_2}{z_1}\right)\left(-\frac{z_3}{z_2'}\right) = \frac{z_2 z_3}{z_1 z_2'}.$$

• **mecanismul din Fig. 4.70.b**

$$\tilde{i}_{13}^{P} = \left(-\frac{z_2}{z_1}\right)\left(\frac{z_3}{z_2'}\right) = -\frac{z_2 z_3}{z_1 z_2'}.$$

• **mecanismul din Fig. 4.70.c**

$$\tilde{i}_{13}^{P} = -i_{13}^{P} = -\frac{z_2 z_3}{z_1 z_2'}.$$

Se observă că formula lui Willis conține vitezele unghiulare ale elementelor de bază $\tilde{\omega}_1$, $\tilde{\omega}_3$ şi $\tilde{\omega}_P$. Dacă mecanismul este diferențial ($M = 2$), două dintre aceste viteze (corespunzătoare elementelor conducătoare), sunt cunoscute, iar cea de a treia (corespunzătoare elementului condus), se calculează folosind formula lui Willis. Dacă mecanismul este planetar propriuzis ($M = 1$), una dintre viteze (corespunzătoare roții centrale fixe) este zero, una (corespunzătoare elementului conducător) este cunoscută, iar cea de a treia (corespunzătoare elementului condus), se obține din formulă. Mecanismul planetar propriuzis, având un element conducător şi un element condus, are un raport de transmitere propriu. Dacă ne referim la mecanismul din Fig.4.71, care are roata centrală $3-$fixă $(\tilde{\omega}_3 = 0)$, mişcarea se poate transmite în sensul $1 \to P$ sau în sensul $P \to 1$, cu rapoartele de transmitere

$$\tilde{i}_{1P} = \frac{\tilde{\omega}_1}{\tilde{\omega}_P} \quad \text{sau} \quad \tilde{i}_{P1} = \frac{\tilde{\omega}_P}{\tilde{\omega}_1}.$$

Aplicând formula lui Willis în condițiile date, rezultă

$$\tilde{i}_{13}^{P} = \frac{\tilde{\omega}_1 - \tilde{\omega}_P}{-\tilde{\omega}_P},$$

$$\tilde{i}_{1P} = \frac{\tilde{\omega}_1}{\tilde{\omega}_P} = 1 - \tilde{i}_{13}^{P}, \tag{4.169}$$

$$\tilde{i}_{P1} = \frac{\tilde{\omega}_P}{\tilde{\omega}_1} = \frac{1}{1 - \tilde{i}_{13}^{P}}. \tag{4.170}$$

În cazul mecanismului diferențial cu închidere, din Fig.4.72, se scrie formula lui Willis pentru mecanismul diferențial, şi expresia de definiție a raportului de transmitere pentru mecanismul cu axe fixe, având în vedere că portsatelitul P este solidar cu roata 5

$$\begin{cases} \tilde{i}_{13}^{P} = \dfrac{\tilde{\omega}_1 - \tilde{\omega}_P}{\tilde{\omega}_3 - \tilde{\omega}_P} \\ \tilde{i}_{53} = \dfrac{\tilde{\omega}_P}{\tilde{\omega}_3}. \end{cases} \tag{4.171}$$

Raportul $\tilde{i}_{13}^{P}$ se calculează cu formula indicată la mecanismul din Fig.4.70.b, iar raportul $\tilde{i}_{53}$ este

$$\tilde{i}_{53} = \left(-\frac{z_4}{z_5}\right)\left(\frac{z_3'}{z_4}\right) = -\frac{z_3'}{z_5}.$$

În cazul mecanismului complex din Fig.4.73, se scrie formula lui Willis pentru fiecare mecanism planetar component

$$\tilde{\omega}_{13}^{P} = \frac{\tilde{\omega}_1 - \tilde{\omega}_P}{\tilde{\omega}_3 - \tilde{\omega}_P}, \quad \tilde{\omega}_{43}^{R} = \frac{\tilde{\omega}_4 - \tilde{\omega}_R}{\tilde{\omega}_3' - \tilde{\omega}_R}.$$

Având în vedere că roțile 3 şi 3' sunt fixe $\left(\tilde{\omega}_3 = \tilde{\omega}_3' = 0\right)$, iar elementele 4 şi P sunt solidare $\left(\tilde{\omega}_4 = \tilde{\omega}_P\right)$, formulele devin

$$\begin{cases} \tilde{i}_{13}^{P} = \dfrac{\tilde{\omega}_1 - \tilde{\omega}_P}{-\tilde{\omega}_P} \\ \tilde{i}_{43'}^{R} = \dfrac{\tilde{\omega}_P - \tilde{\omega}_R}{-\tilde{\omega}_R} \end{cases} \tag{4.172}$$

Rapoartele de transmitere $\tilde{i}_{13}^{P}$ şi $\tilde{i}_{43'}^{R}$ se calculează astfel

$$\tilde{i}_{13}^{P} = \left(-\frac{z_2}{z_1}\right)\left(\frac{z_3}{z_2}\right) = -\frac{z_3}{z_1}$$

$$\tilde{i}_{43'}^{R} = \left(-\frac{z_5}{z_4}\right)\left(\frac{z_3'}{z_5}\right) = -\frac{z_3'}{z_4}.$$

În sistemul (4.172) figurează parametrii $\tilde{\omega}_1$, $\tilde{\omega}_P$ şi $\tilde{\omega}_R$. Dacă se cunoaşte unul dintre ei, - corespunzător elementului conducător, ceilalți doi se pot determina. Dacă mişcarea se transmite, de exemplu, de la elementul 1 la portsatelitul R, se calculează raportul de transmitere al mecanismului complex $\tilde{i}_{1R}$

$$\tilde{i}_{1R} = \frac{\tilde{\omega}_1}{\tilde{\omega}_R} = \left(1 - \tilde{i}_{13}^{P}\right)\left(1 - \tilde{i}_{43'}^{R}\right). \tag{4.173}$$

4.2.2.3. Transmiterea momentelor, randamentul

Se consideră un mecanism planetar simplu, de tipul celor din Fig.4.70, cu roțile centrale 1 şi 3 şi portsatelitul P. În cazul în care roata 3 devine fixă, se obține un planetar propriuzis, cu un grad de mobilitate, care poate transmite mişcarea de rotație în sensul $1 \to P$ sau $P \to 1$.

• **Cazul** $1 \to P$.

Se scrie ecuația de echilibru de momente pentru întreg mecanismul şi ecuația specifică trenului de roți dințate cu axe fixe (4.167), dintre roțile 1 şi 3,

$$\begin{cases} \tilde{M}_1 + \tilde{M}_3 + \tilde{M}_P = 0 \\ \tilde{M}_1 = -\dfrac{1}{\eta_0^k \tilde{i}_{13}^P} \tilde{M}_3 . \end{cases} \tag{4.174}$$

În aceste ecuații $\tilde{M}_1$ este momentul motor, $\tilde{M}_P$ este momentul util (rezistent), iar $\tilde{M}_3$ este momentul de reacțiune din legătura rigidă, formată între elementele 3 şi batiu. Parametrul η_0 este randamentul mecanismului cu axe fixe şi se calculează, aşa cum s-a arătat, ca produs al randamentelor angrenajelor componente. Exponentul k are valoarea +1, dacă în mecanismul cu axe fixe elementul 1 este conducător iar elementul 3 este condus şi –1 în caz contrar. Elementul 1 este conducător, dacă momentul $\tilde{M}_1$ şi viteza unghiulară relativă în raport cu portsatelitul $\tilde{\omega}_{1P} = \tilde{\omega}_1 - \tilde{\omega}_P$, au acelaşi sens. Pe de altă parte, momentul $\tilde{M}_1$ are acelaşi sens cu $\tilde{\omega}_1$, deoarece elementul 1 este element conducător în mecanismul planetar. Prin urmare, k = +1 dacă $\tilde{\omega}_1$ şi $(\tilde{\omega}_1 - \tilde{\omega}_P)$ au acelaşi sens, adică

$$\frac{\tilde{\omega}_1 - \tilde{\omega}_P}{\tilde{\omega}_1} > 0$$

sau:

$$\frac{\tilde{\omega}_1 - \tilde{\omega}_P}{\tilde{\omega}_1} = 1 - \frac{1}{\tilde{i}_{1P}} = 1 - \frac{1}{1 - \tilde{i}_{13}^P} = \frac{\tilde{i}_{13}^P}{\tilde{i}_{13}^P - 1} > 0 .$$

Soluțiile acestei inecuații sunt:

$\tilde{i}_{13}^P < 0$ sau $\tilde{i}_{13}^P > 1$.

În mod similar, $k = -1$ dacă este verificată inecuația

$$\frac{\tilde{i}_{13}^P}{\tilde{i}_{13}^P - 1} < 0 ,$$

care are soluțiile

$$0 < \tilde{i}_{13}^P < 1 .$$

Rezultatele acestei analize sunt date în tabelul următor

k	$\tilde{i}_{13}^{P}$
+1	$\tilde{i}_{13}^{P} < 0$ sau $\tilde{i}_{13}^{P} > 1$
-1	$0 < \tilde{i}_{13}^{P} < 1$

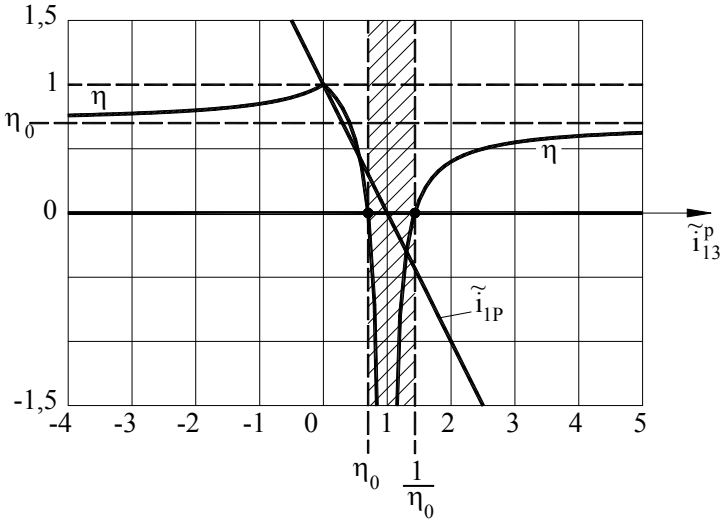


Fig. 4.74

Cu aceste precizări, din sistemul (4.174) se poate determina momentul motor $\tilde{M}_1$ în funcție de momentul rezistent $\tilde{M}_P$

$$\tilde{M}_1 = -\frac{1}{1-\eta_0^k \tilde{i}_{13}^P}\tilde{M}_P . \qquad (4.175)$$

Se poate determina de asemenea, randamentul mecanismului planetar

$$\eta = \frac{P_u}{P_m} = -\frac{\tilde{M}_P \tilde{\omega}_P}{\tilde{M}_1 \tilde{\omega}_1} .$$

Introducând în această formulă, $\tilde{M}_1$ (4.175) şi expresia raportului de transmitere $\tilde{i}_{1P}$ (4.169), se obține

$$\eta = \frac{1-\eta_0^k \tilde{i}_{13}^P}{1-\tilde{i}_{13}^P} . \qquad (4.176)$$

În Fig.4.74 sunt reprezentate diagramele $\eta\left(\tilde{i}_{13}^{P}\right)$ (4.176) şi $\tilde{i}_{1P}\left(\tilde{i}_{13}^{P}\right)$ (4.169). Din studiul acestor diagrame se pot desprinde câteva observații interesante.

1) Randamentul rezultă negativ în intervalul $\tilde{i}_{13}^{P} \in \left[\eta_0, \frac{1}{\eta_0}\right]$, ceea ce arată că mecanismul se autoblochează, iar în apropierea acestui interval randamentul este foarte mic.

2) Randamentul mecanismului planetar este superior valorii η_0 pentru $\tilde{i}_{13}^{P} < 0$ şi inferior pentru $\tilde{i}_{13}^{P} > \frac{1}{\eta_0}$, iar când $\left|\tilde{i}_{13}^{P}\right|$ tinde la infinit, randamentul tinde la η_0.

3) În punctul $\tilde{i}_{13}^{P} = 0$, $\eta = 1$, dar raportul de transmitere $\tilde{i}_{13}^{P} = 0$ nu poate fi obținut practic.

• **Cazul** $P \to 1$

Se utilizează acelaşi sistem de ecuații (4.174), în care $\tilde{M}_P$ este momentul motor iar $\tilde{M}_1$ este momentul rezistent. Printr-un raționament similar cu cel expus la cazul precedent, se ajunge la următoarele valori pentru exponentul k,

k	$\tilde{i}_{13}^{P}$
+1	$0 < \tilde{i}_{13}^{P} < 1$
-1	$\tilde{i}_{13}^{P} < 0$ sau $\tilde{i}_{13}^{P} > 1$

Momentul motor $\tilde{M}_P$ se exprimă în funcție de momentul $\tilde{M}_1$

$$\tilde{M}_P = -\left(1 - \eta_0^k i_{13}^P\right)\tilde{M}_1, \tag{4.177}$$

iar randamentul este

$$\eta = -\frac{\tilde{M}_P \tilde{\omega}_P}{\tilde{M}_1 \tilde{\omega}_1} \tag{4.178}$$

$$\eta = \frac{1 - \tilde{i}_{13}^{P}}{1 - \eta_0^k \tilde{i}_{13}^{P}}. \tag{4.179}$$

În Fig.4.75 sunt reprezentate diagramele $\eta\left(\tilde{i}_{13}^{P}\right)$ - (4.179) şi $\tilde{i}_{P1}\left(\tilde{i}_{13}^{P}\right)$ - (4.170), din care rezultă că în punctul $\tilde{i}_{13}^{P} = 1$, $\eta = 0$, ceea ce înseamnă că mecanismul este la limita autoblocării, iar în apropierea acestui punct, randamentul este foarte mic. Observațiile 2) şi 3) de la cazul precedent sunt valabile şi aici.

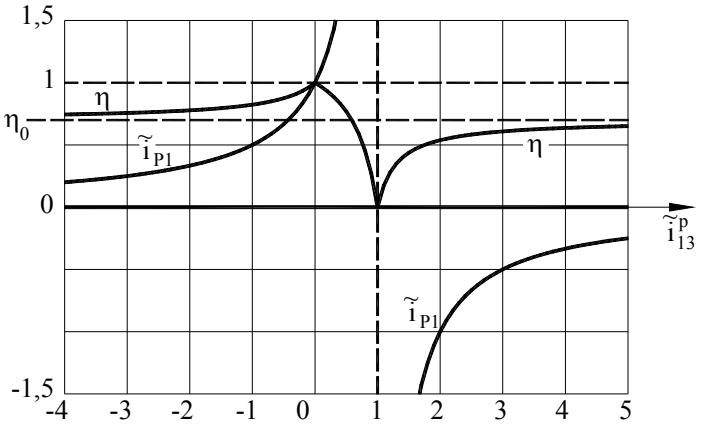


Fig. 4.75

4.2.2.4. Diferențialul de automobil

O aplicație consacrată a mecanismelor planetare este reprezentată de diferențialul de automobil (Fig.4.76). Portsatelitul P, construit sub forma unei carcase, primește mișcarea de la motor printr-un angrenaj hipoid, prin intermediul cutiei de viteze. Viteza unghiulară a portsatelitului este repartizată la cele două roți centrale 1 şi 3, cuplate cu roțile de rulare ale autovehiculului. Mecanismul în ansamblu, poate fi interpretat ca un diferențial cu închidere, prin intermediul roților de rulare şi a şoselei. În felul acesta, se pune de acord gradul

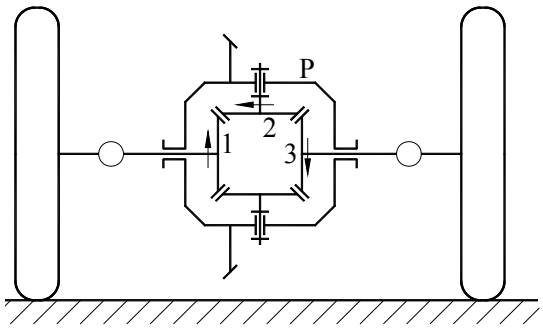


Fig. 4.76

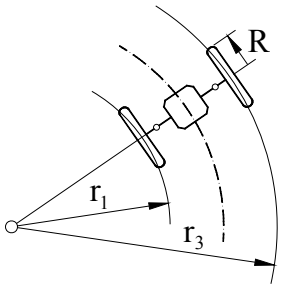


Fig. 4.77

de mobilitate ($M = 1$) cu faptul că există un singur element conducător – portsatelitul. Vom studia funcționarea diferențialului în regim de deplasare în curbă şi pe o traiectorie rectilinie a maşinii.

• Deplasarea în curbă

În cazul acestui mecanism, care are $z_1 = z_3$, raportul de transmitere $\tilde{i}_{13}^{P}$ este

$$\tilde{i}_{13}^{P} = -\left(\frac{z_2}{z_1}\right)\left(\frac{z_3}{z_2}\right) = -\frac{z_3}{z_1} = -1,$$

iar formula lui Willis (4.168) capătă forma

$$\tilde{\omega}_P = \frac{\tilde{\omega}_1 + \tilde{\omega}_3}{2}. \qquad (4.180)$$

Roțile de rulare se deplasează pe două curbe, asimilate cu nişte cercuri de raze r_1 şi r_3 (Fig.4.77). Datorită existenței lanțului cinematic de închidere prin şosea, vitezele unghiulare ale roților de rulare sunt proporționale cu aceste raze

$$\frac{\tilde{\omega}_1}{\tilde{\omega}_3} = \frac{r_1}{r_3}. \qquad (4.181)$$

Din sistemul (4.180), (4.181) se determină vitezele unghiulare ale roților de rulare $\tilde{\omega}_1$ şi $\tilde{\omega}_3$, în funcție de viteza unghiulară a portsatelitului

$$\tilde{\omega}_1 = \frac{2\tilde{\omega}_P r_1}{r_1 + r_3}; \qquad \tilde{\omega}_3 = \frac{2\tilde{\omega}_P r_3}{r_1 + r_3}.$$

Trebuie remarcat că viteza unghiulară a portsatelitului, fiind egală cu viteza medie a roților de rulare, intervine direct în calculul vitezei de rulare a vehicolului v_r,

$$v_r = \omega_P \cdot R,$$

în care R este raza roților de rulare.

Pentru analiza transmiterii momentelor, se foloseşte sistemul de ecuații (4.174), care în ipoteza $\tilde{i}_{13}^{P} = -1$, are forma

$$\begin{cases} \tilde{M}_1 + \tilde{M}_3 + \tilde{M}_P = 0 \\ \tilde{M}_1 = \dfrac{\tilde{M}_3}{\eta_0^k} \end{cases} \qquad (4.182)$$

Exponentul k = +1, dacă în mecanismul cu axe fixe 1-2, 2-3, roata 1 este conducătoare şi roata 3 – condusă, adică $\tilde{M}_1$ şi $\tilde{\omega}_{1P} = \tilde{\omega}_1 - \tilde{\omega}_P$ au acelaşi sens, iar $\tilde{M}_3$ şi $\tilde{\omega}_{3P} = \tilde{\omega}_3 - \tilde{\omega}_P$ au sensuri opuse. Pe de altă parte, roțile 1 şi 3

sunt conduse în mecanismul diferențial, deci $\tilde{\omega}_1$ şi $\tilde{M}_1$ au sensuri opuse ca şi $\tilde{\omega}_3$ şi $\tilde{M}_3$. Rezultă că valoarea k = +1 corespunde condițiilor,

$$\frac{\tilde{\omega}_1 - \tilde{\omega}_P}{\tilde{\omega}_1} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{r_3}{r_1}\right) < 1$$

$$\frac{\tilde{\omega}_3 - \tilde{\omega}_P}{\tilde{\omega}_P} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{r_1}{r_3}\right) > 1,$$

care sunt satisfăcute când $r_1 < r_3$, adică virajul se execută cu roata 1 la interior şi cu roata 3 la exterior. Desigur, $k = -1$ când $r_1 > r_3$, iar virajul se execută în partea opusă.

Din sistemul (4.182) se determină $\tilde{M}_P$,

$$\tilde{M}_P = -\tilde{M}_1 - \tilde{M}_3 = -\tilde{M}_1\left(1 + \eta_0^k\right) = -\tilde{M}_3\left(1 + \frac{1}{\eta_0^k}\right). \qquad (4.183)$$

Randamentul mecanismului, fără a ține seama de pierderile de putere dintre roțile de rulare şi şosea, este

$$\eta = -\frac{P_u}{P_m} = -\frac{\tilde{M}_1\omega_1 + \tilde{M}_3\omega_3}{\tilde{M}_P\omega_P}.$$

Având în vedere relațiile vitezelor unghiulare (4.180), (4.181) şi a momentelor (4.182), se ajunge la formula,

$$\eta = \frac{2\left(r_1 + r_3\eta_0^k\right)}{\left(1 + \eta_0^k\right)\left(r_1 + r_3\right)} \qquad (4.184)$$

în care $\eta_0 = \eta_{12} \cdot \eta_{23}$.

• Deplasarea rectilinie

În această ipoteză, lanțul cinematic de închidere impune condiția,

$$\tilde{\omega}_1 = \tilde{\omega}_3,$$

care împreună cu formula lui Willis (4.180) conduce la relațiile

$$\tilde{\omega}_1 = \tilde{\omega}_3 = \tilde{\omega}_P. \qquad (4.185)$$

Prin urmare, diferențialul se comportă ca un cuplaj (legătură rigidă) iar între elementele sale nu există mişcări relative. În consecință $\eta_0 = 1$, iar din relațiile (4.183) şi (4.184) rezultă

$$\tilde{M}_P = -\tilde{M}_1 - \tilde{M}_3 = -2\tilde{M}_1 = -2\tilde{M}_3, \qquad (4.186)$$

$$\eta = 1.$$

Observaţie

Pentru a realiza deplasarea autovehiculului din poziţia statică, momentele M_1 şi M_3 trebuie să îndeplinească condiţia,

$$M_1 + M_3 > M_{tr}, \tag{4.187}$$

în care M_{tr} este momentul de tracţiune, care însumează toate rezistenţele la deplasare, între care este importantă cea generată de forţa de greutate, dacă maşina se află în pantă. Dacă una dintre roţi, de exemplu roata 1, patinează, momentul M_1 este limitat de momentul de patinare M_{pat}. Din (4.186) rezultă $M_1 = M_3$ şi deci

$$M_1 + M_3 = 2M_{pat}.$$

Deoarece momentul de patinare este redus ca valoare, condiţia (4.187) nu este îndeplinită. În acest caz roata 1 se roteşte în gol iar roata 3 rămâne fixă, având ca rezultat staţionarea maşinii. Pentru a evita acestă situaţie, unele autovehicule sunt prevăzute cu un sistem de cuplare a roţilor centrale. În acest caz, momentele M_1 şi M_3 pot avea valori diferite, iar dacă roata 3 are aderenţă, momentul M_3 nu este limitat, astfel încât condiţia (4.187) este satisfăcută.

Capitolul **5**

DINAMICA MECANISMELOR ŞI MAŞINILOR

5.1. ANALIZA DINAMICĂ

5.1.1. Modele dinamice

Analiza dinamică studiază mişcarea mecanismelor ca rezultat al acţiunii forţelor aplicate, dintre care cele mai importante sunt forţele de acţionare (motoare) şi cele tehnologice (rezistente). În acest context mecanismul trebuie considerat în conexiune cu motorul şi cu procesul de lucru, formând un ansamblu care se numeşte **maşină**. În structura unei maşini, pe lângă motor (M) şi mecanismul de lucru (ML), intervine, uneori, şi o transmisie (T) (Fig.5.1) care modifică viteza motorului în raport cu cerinţele mecanismului de lucru. Pentru simplificare, transmisia poate fi înglobată în mecanismul de lucru, astfel încât, în cele ce urmează, maşina este concepută ca fiind formată din două componente.

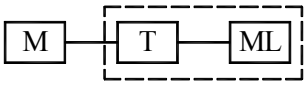


Fig. 5.1

Desigur, cunoscând starea de mişcare a maşinii, determinată prin analiza dinamică, se pot calcula forţele de inerţie şi forţele de legătură cu o precizie superioară în raport cu valorile obţinute prin analiza cinetostatică.

Analiza comportării maşinii se poate simplifica dacă aceasta se înlocuieşte printr-un model dinamic. Modelul este format dintr-un element al mecanismului de lucru, în mişcare de rotaţie sau de translaţie, numit **element de reducere** sau chiar dintr-un punct material (**punct de reducere**). Modelului i se atribuie proprietăţi masice (mase, momente de inerţie) şi dinamice (forţe aplicate) determinate, astfel încât, elementul de reducere să aibă aceeaşi mişcare ca în cadrul mecanismului.

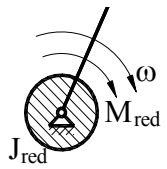


Fig. 5.2

În cele ce urmează se prezintă modelul dinamic cu element de reducere în mişcare de rotaţie, care are cea mai mare aplicabilitate. De regulă, ca element de reducere se adoptă elementul conducător al mecanismului de lucru.

Momentul de inerţie al modelului numit **moment de inerţie redus** (J_{red}) se determină din condiţia de egalitate a energiei cinetice a modelului cu energia cinetică a maşinii

$$E_{c\ model} = E_{c\ maşină},$$

în care termenul $E_{c\ maşină}$ se calculează prin însumarea energiilor cinetice corespunzătoare elementelor mobile, astfel încât, în cazul unui mecanism plan, se obţine

$$\frac{1}{2}J_{red}\omega^2 = \sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{2}\left(m_i v_{G_i}^2 + J_{G_i}\omega_i^2\right). \tag{5.1}$$

În această relaţie ω este viteza unghiulară a elementului de reducere, iar m_i este masa elementului de ordin i, v_{G_i} - viteza centrului de masă, J_{G_i} - momentul de inerţie al elementului în raport cu o axă care trece prin centrul de masă şi este perpendiculară pe planul mişcării şi ω_i - viteza unghiulară a elementului. Din egalitatea (5.1) rezultă J_{red},

$$J_{red} = \sum_{i=1}^{n-1}\left(m_i\left(\frac{v_{G_i}}{\omega}\right)^2 + J_{G_i}\left(\frac{\omega_i}{\omega}\right)^2\right). \tag{5.2}$$

Mărimile m_i şi J_{G_i} sunt constante, iar rapoartele $\frac{v_{G_i}}{\omega}$ şi $\frac{\omega_i}{\omega}$ sunt funcţii de transmitere de ordinul 1, care depind de parametrul de poziţie al elementului de reducere – unghiul φ. Prin urmare, momentul de inerţie redus este funcţie de parametrul φ şi are caracter periodic, deoarece şi funcţiile de transmitere sunt periodice. Formula (5.2) arată, de asemenea, că J_{red} este strict pozitiv, $J_{red} > 0$, aşa cum se observă din diagrama $J_{red}(\varphi)$ din Fig.5.3. Perioada funcţiei $J_{red}(\varphi)$ se numeşte ciclu geometric şi este notată φ_g (Fig.5.3). În unele cazuri particulare momentul de inerţie redus poate fi constant. Astfel, în cazul unui mecanism complex format din roţi dinţate cu axe fixe, J_{red} are expresia

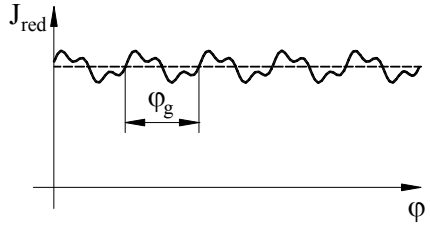


Fig. 5.3

$$J_{red} = \sum_{i=1}^{n-1} J_{G_i}\left(\frac{\omega_i}{\omega}\right).$$

deoarece centrele de masă se găsesc pe axele de rotație, iar $v_{G_i} = 0$. Fiecare raport $\left(\frac{\omega_i}{\omega}\right)$ reprezintă inversul unui raport de transmitere şi este constant, astfel că $J_{red} = ct.$

Forțele aplicate care acționează asupra mecanismului de lucru se înlocuiesc, în cadrul modelului, cu un **moment redus (M_{red})** care se determină din egalitatea puterilor

$$P_{model} = P_{mecanism},$$

sau

$$M_{red}\omega = \sum_{j=1}^{n-1}\left(\overline{F}_j\overline{v}_j + M_j\omega_j\right), \tag{5.3}$$

în care $\overline{F}_j$ şi M_j sunt componentele torsorului rezultant care acționează asupra elementului j, iar $\overline{v}_j$ şi ω_j sunt viteza punctului de reducere al torsorului şi viteza unghiulară a elementului. Din relația (5.3) se deduce

$$M_{red} = \sum_{j=1}^{n-1}\left(\overline{F}_j\frac{\overline{v}_j}{\omega} + M_j\frac{\omega_j}{\omega}\right). \tag{5.4}$$

Expresia momentului redus (5.4) arată că acesta depinde de parametrul de poziție φ, prin intermediul funcțiilor de transmitere $\frac{\overline{v}_j}{\omega}$ şi $\frac{\omega_j}{\omega}$, dar poate depinde şi de viteza unghiulară (ω) sau de timp (t) prin intermediul parametrilor $\overline{F}_j$ şi M_j. În procesul de analiză dinamică este util să se cunoască, separat, momentul redus al forțelor motoare M_{red}^m, în care componenta principală este momentul dezvoltat de motor şi momentul redus al forțelor rezistente M_{red}^r, în care componenta principală este dată de forța tehnologică.

În cazul modelului cu element de reducere în mişcare de translație intervin parametrii m_{red} (masa redusă) şi F_{red} (forța redusă) care se determină similar cu J_{red} şi M_{red}.

5.1.2. Fazele funcționării maşinii

Funcționarea unei maşini se desfăşoară în trei faze: pornire, regim şi oprire, care se pun în evidență pe o diagramă $\omega(\varphi)$ sau $\omega(t)$ (Fig.5.4). Fazele de pornire şi de oprire sunt tranzitorii, pe când în faza de regim se execută operația

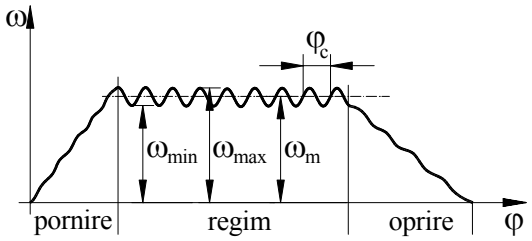


Fig. 5.4

tehnologică specifică maşinii respective. În această fază viteza unghiulară are o variație periodică între două valori extreme ω_{max} şi ω_{min}. Faza de regim este caracterizată prin următorii parametri:

• **Ciclul cinematic φ_c** - perioada funcției $\omega(\varphi)$ care, de regulă, este egal cu ciclul geometric.

• **Viteza unghiulară medie ω_m** - media aritmetică între ω_{max} şi ω_{min}.

$$\omega_m = \frac{\omega_{max} + \omega_{min}}{2} \tag{5.5}$$

• **Gradul de neuniformitate δ** - definit cu formula

$$\delta = \frac{\omega_{max} - \omega_{min}}{\omega_m} \tag{5.6}$$

Ne propunem să analizăm condițiile de instalare a fiecărei faze. Pentru aceasta se scrie ecuația energiei cinetice sub formă finită

$$E_C - E_{C_0} = L, \tag{5.7}$$

în care E_C şi E_{C_0} reprezintă energia cinetică a maşinii la un moment dat şi la un moment anterior numit moment inițial, iar L este lucrul mecanic dezvoltat de forțele aplicate în perioada dintre cele două momente. Lucrul mecanic L se poate exprima

$$L = L_m - L_r,$$

în care L_m este lucrul mecanic motor (al forțelor motoare) şi L_r este lucrul mecanic rezistent (al forțelor rezistente). Aplicând modelul dinamic cu element de reducere în mişcare de rotație, ecuația (5.7) devine

$$\frac{1}{2}J_{red}\omega^2 - \frac{1}{2}J_{red0}\omega_0^2 = L_m - L_r, \tag{5.8}$$

în care ω şi J_{red} caracterizează modelul la un moment dat, iar ω_0 şi J_{red0} corespund momentului inițial. Dacă perioada pentru care se scrie ecuația

energiei cinetice se adoptă egală cu ciclul geometric, $J_{red} = J_{red0}$, iar ecuația se particularizează astfel

$$\frac{1}{2} J_{red} \left(\omega^2 - \omega_0^2 \right) = L_m - L_r . \tag{5.9}$$

În faza de pornire, viteza unghiulară creşte astfel încât $\omega > \omega_0$. În această ipoteză, din ecuația (5.9) rezultă $L_m > L_r$. Deci, pentru a realiza pornirea maşinii, lucrul mecanic motor trebuie să fie mai mare decât lucrul mecanic rezistent. De regulă maşina se porneşte în gol, cu mecanismul de lucru decuplat ($L_r = 0$), iar apoi se cuplează în sarcină treptat, cu ajutorul unui cuplaj de fricțiune.

În faza de oprire $\omega < \omega_0$, iar $L_m < L_r$. Rezultă că, pentru a realiza oprirea, lucrul mecanic rezistent trebuie să fie mai mare decât lucrul mecanic motor. Practic, oprirea maşinii se efectuează prin oprirea motorului ($L_m = 0$) şi prin introducerea unor dispozitive de frânare care majorează lucrul mecanic rezistent.

În faza de regim viteza unghiulară are o variație periodică, deci $\omega = \omega_0$ ceea ce conduce la $L_m = L_r$. Înseamnă că, pentru instalarea fazei de regim, lucrul mecanic motor şi lucrul mecanic rezistent trebuie să se echilibreze periodic.

5.1.3. Ecuațiile mişcării maşinii

Se consideră ecuația energiei cinetice (5.8) în care L_m şi L_r se determină cu ajutorul relațiilor

$$L_m = \int_{\varphi_0}^{\varphi} M_{red}^m d\varphi , \; L_r = \int_{\varphi_0}^{\varphi} M_{red}^r d\varphi . \tag{5.10}$$

Astfel, ecuația (5.8) devine

$$\frac{1}{2} J_{red} \omega^2 - \frac{1}{2} J_{red0} \omega_0^2 = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \left(M_{red}^m - M_{red}^r \right) d\varphi \tag{5.11}$$

şi reprezintă ecuația mişcării maşinii sub formă finită.

Ecuația energiei cinetice, sub formă diferențială, este

$$dE_C = dL . \tag{5.12}$$

Exprimând dL sub forma $dL = M_{red} d\varphi$, se poate scrie

$$dE_C = M_{red} d\varphi .$$

sau

$$\frac{d}{d\varphi}\left(E_C\right) = M_{red}$$

Având în vedere expresia energiei cinetice,

$$E_C = \frac{1}{2} J_{red}\omega^2$$

se obține, prin derivare, ecuația diferențială a mişcării maşinii,

$$\omega J_{red}\frac{d\omega}{d\varphi} + \frac{1}{2}\omega^2\frac{dJ_{red}}{d\varphi} = M_{red}^m - M_{red}^r . \qquad (5.13)$$

Dacă derivata $\frac{d\omega}{d\varphi}$ se expimă astfel,

$$\frac{d\omega}{d\varphi} = \frac{d\omega}{dt}\cdot\frac{dt}{d\varphi} = \frac{d\omega}{dt}\cdot\frac{1}{\omega}$$

rezultă o altă formă a ecuației de mişcare,

$$J_{red}\frac{d\omega}{dt} + \frac{1}{2}\omega^2\frac{dJ_{red}}{d\varphi} = M_{red}^m - M_{red}^r . \qquad (5.14)$$

În expresiile ecuațiilor de mişcare figurează trei funcții $J_{red}(\varphi)$, $M_{red}^m(\varphi,\omega,t)$, $M_{red}^r(\varphi,\omega,t)$ care trebuie cunoscute în vederea rezolvării ecuațiilor. Determinarea şi caracterizarea funcției $J_{red}(\varphi)$ au fost prezentate în paragraful precedent (5.1.1). Funcția $M_{red}^m(\varphi,\omega,t)$ se numeşte **caracteristica mecanică a motorului**, iar funcția $M_{red}^r(\varphi,\omega,t)$ - **caracteristica mecanică a mecanismului de lucru** sau **a procesului tehologic**. Caracteristicile mecanice se determină, de regulă, pe cale experimentală şi sunt cunoscute sub forma unor diagrame. Ele sunt specifice fiecărei maşini, atât în ce priveşte tipul variabilei (φ, ω sau t), cât şi forma lor. În Fig.5.5 se prezintă caracteristicile mecanice pentru cele mai uzuale motoare, iar în Fig.5.6 se arată câteva caracteristici mecanice specifice unor procese de lucru.

Se observă că motoarele uzuale (electrice şi termice) au caracteristici care depind de parametrul ω. Numai motorul cu element elastic are caracteristica funcție de poziție (φ). Caracteristicile mecanismelor de lucru depind, de regulă, de poziție (φ). Fac excepție maşinile de tip pompă centrifugă, ventilator, la care caracteristica depinde de viteză (ω). În cazul maşinilor de ridicat $M_{red}^r = ct$, iar parametrul independent poate fi considerat oricare dintre variabilele φ sau ω.

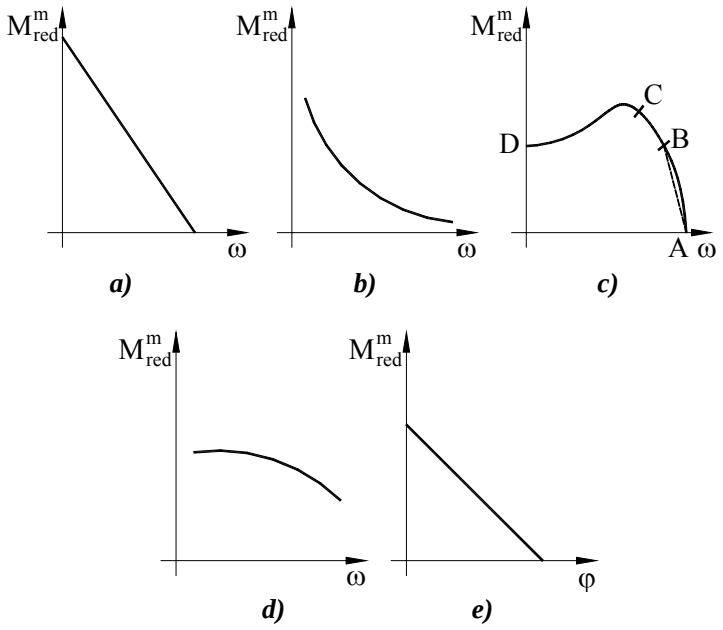


Fig. 5.5

a) *motor electric de curent continuu cu excitaţie în paralel;* ***b)*** *motor electric de curent continuu cu excitaţie în serie;* ***c)*** *motor electric asincron;* ***d)*** *motor cu ardere internă;* ***e)*** *motor cu element elastic.*

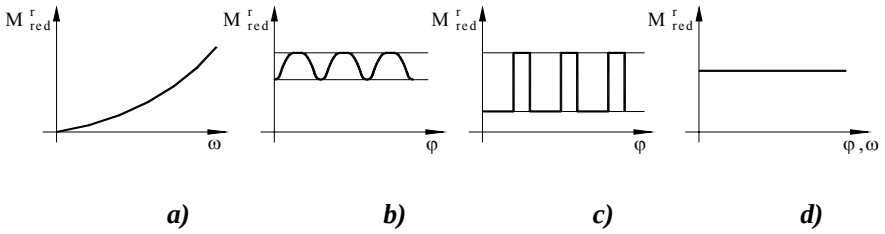


Fig. 5.6

a) *pompă centrifugă, ventilator;* ***b)*** *mecanism de lucru cu cuple inferioare sau cu camă;* ***c)*** *maşină cu efect de lovire (ciocan);* ***d)*** *maşină de ridicat.*

5.1.4. Rezolvarea ecuațiilor de mişcare

Prin rezolvarea ecuațiilor de mişcare se determină legea de mişcare a elementului de reducere, exprimată sub una din formele $\varphi(t)$, $\omega(t)$ sau $\omega(\varphi)$. Caracterul matematic al ecuațiilor de mişcare, care determină modul de rezolvare, depinde de tipul parametrilor independenți (φ, ω sau t) care intervin în cele două caracteristici. Este important, de asemenea, dacă momentul de inerție redus este constant sau variabil. În aplicațiile tehnice se întâlnesc trei grupe tipice de maşini, care vor fi studiate în continuare.

- $M_{red}^{m}(\omega)$, $M_{red}^{r}(\omega)$, $J_{red} = ct$
- $M_{red}^{m}(\omega)$, $M_{red}^{r}(\varphi)$
- $M_{red}^{m}(\varphi)$, $M_{red}^{r}(\varphi)$.

5.1.4.1. Cazul $M_{red}^{m}(\omega)$, $M_{red}^{r}(\omega)$, $J_{red} = ct$

Maşinile din această grupă sunt formate din motoare electrice sau termice care acționează pompe centrifugale, ventilatoare, generatoare electrice, maşini de ridicat, etc. Pentru analiza dinamică se foloseşte ecuația (5.14) scrisă în ipoteza $J_{red} = ct$, $\frac{dJ_{red}}{d\varphi} = 0$,

$$J_{red}\frac{d\omega}{dt} = M_{red}^{m}(\omega) - M_{red}^{r}(\omega). \tag{5.15}$$

Această ecuație diferențială se rezolvă prin separarea variabilelor

$$dt = J_{red}\frac{d\omega}{M_{red}^{m}(\omega) - M_{red}^{r}(\omega)}$$

$$t - t_0 = J_{red}\int_{\omega_0}^{\omega}\frac{d\omega}{M_{red}^{m}(\omega) - M_{red}^{r}(\omega)}. \tag{5.16}$$

În felul acesta se obține funcția $t(\omega)$ şi, implicit, funcția $\omega(t)$. Dacă interesează funcția $\varphi(t)$ se scrie ecuația

$$\omega(t) = \frac{d\varphi}{dt},$$

care se integrează prin separarea variabilelor

$$d\varphi = \omega(t)dt$$

$$\varphi - \varphi_0 = \int_{\omega_0}^{\omega} \omega(t)dt\,. \qquad (5.17)$$

Se poate obține, de asemenea, funcția $\omega(\varphi)$ prin eliminarea parametrului t între ecuațiile

$$\begin{aligned} \omega &= \omega(t) \\ \varphi &= \varphi(t). \end{aligned} \qquad (5.18)$$

Pentru rezolvarea practică a problemei, caracteristicile mecanice se aproximează, prin interpolare, cu funcții analitice. Operațiile de integrare ((5.16), (5.17)), de inversare a funcției $t(\omega)$ sau de eliminare a parametrului t, menționate anterior, se efectuează analitic – dacă acest lucru este posibil sau, mai comod, pe cale numerică.

Din relația (5.16) se observă că atunci când t tinde la infinit, viteza unghiulară tinde la o valoare care rezultă din ecuația

$$M_{red}^{m}(\omega) - M_{red}^{r}(\omega) = 0 \qquad (5.19)$$

Soluția se obține, grafic, prin intersecția curbelor care reprezintă caracteristicile mecanice (Fig.5.7) şi se numeşte viteză unghiulară **nominală** (ω_n). Teoretic, viteza unghiulară nominală este atinsă după un timp infinit, dar practic viteza unghiulară tinde asimptotic la valoarea nominală şi se apropie foarte mult de aceasta într-un timp scurt.

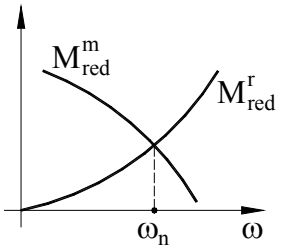


Fig. 5.7

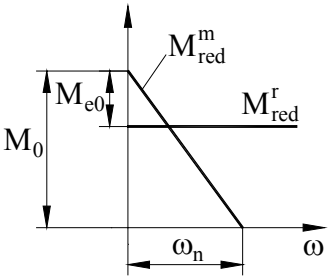


Fig. 5.8

Pentru exemplificare, se consideră cazul unei maşini de ridicat acționată cu un motor electric de curent continuu cu excitație în paralel. Caracteristica motorului se aproximează cu o dreaptă (Fig.5.8) de ecuație

$$M_{red}^{m} = M_0 - m \cdot \omega\,, \qquad (5.20)$$

în care M_0 este momentul de pornire, iar m – panta dreptei. Caracteristica mecanismului de lucru este o dreaptă paralelă cu abscisa, $M_{red}^{r} = ct.$ Viteza nominală rezultă din ecuația

$$M_0 - m \cdot \omega = M_{red}^{r},$$

şi are valoarea

$$\omega_n = \frac{M_0 - M_{red}^{r}}{m} = \frac{M_{e0}}{m}, \tag{5.21}$$

în care M_{e0} este momentul excedentar la pornire (Fig.5.8). Aplicând formula (5.16) se obține

$$t - t_0 = J_{red} \int_{\omega_0}^{\omega} \frac{d\omega}{M_0 - m \cdot \omega - M_{red}^{m}} = J_{red} \int_{\omega_0}^{\omega} \frac{d\omega}{M_{e0} - m \cdot \omega} =$$

$$= \frac{J_{red}}{M_{e0}} \int_{\omega_0}^{\omega} \frac{d\omega}{1 - \frac{\omega}{\omega_n}} = -\frac{\omega_n J_{red}}{M_{e0}} \int_{\omega_0}^{\omega} \frac{d\left(1 - \frac{\omega}{\omega_n}\right)}{1 - \frac{\omega}{\omega_n}}.$$

Astfel, ecuația se poate rezolva analitic, ajungând la soluția $t = t(\omega)$,

$$t - t_0 = -\frac{\omega_n \cdot J_{red}}{M_{e0}} \left(\ln\left(1 - \frac{\omega}{\omega_n}\right) - \ln\left(1 - \frac{\omega_0}{\omega_n}\right) \right). \tag{5.22}$$

Funcția $t(\omega)$ se poate inversa analitic, după cum urmează,

$$ln\left(\frac{1 - \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega_0}{\omega_n}} \right) = -\frac{M_{e0}(t - t_0)}{\omega_n \cdot J_{red}} = a$$

$$\frac{\omega_n - \omega}{\omega_n - \omega_0} = e^{a}$$

$$\omega = \omega_n - (\omega_n - \omega_0)e^{a}. \tag{5.23}$$

Dacă momentul inițial coincide cu momentul pornirii ($t_0 = 0,\ \omega_0 = 0$) se obține

$$\omega = \omega_n (1 - e^b), \tag{5.24}$$

în care

$$b = -\frac{M_{e0} \cdot t}{\omega_n J_{red}}.$$

Funcția $\varphi(t)$ se obține prin integrarea funcției $\omega(t)$. În ipoteza $t_0 = 0,\ \varphi_0 = 0$ rezultă

$$\varphi = \int_0^t \omega_n (1 - e^b) = \omega_n t + \frac{\omega_n^2 J_{red}}{M_{e0}} (e^b - 1). \tag{5.25}$$

Funcția $\varepsilon(t)$ se obține prin derivarea funcției $\omega(t)$

$$\varepsilon = \frac{d\omega(t)}{dt} = \frac{M_{e0}}{J_{red}} \cdot e^b. \tag{5.26}$$

În Fig.5.9 se prezintă diagramele $\varphi(t)$, $\omega(t)$ şi $\varepsilon(t)$ obținute pentru un caz numeric, iar în Fig.5.10 se arată diagramele $\omega(\varphi)$ şi $\varepsilon(\varphi)$. Pentru a compara forma curbelor s-au folosit aceleaşi scări în ambele diagrame. Se remarcă faptul că, viteza de regim, pentru maşinile din această grupă, este, practic, constantă, $\omega \cong \omega_n = ct.$ Ecuațiile legii de mişcare permit determinări utile privitoare la faza de pornire. Astfel, dacă se consideră că faza de pornire este terminată când este îndeplinită condiția

$$\frac{\omega}{\omega_n} = q$$

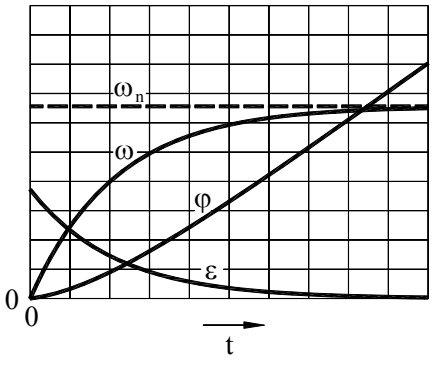


Fig. 5.9

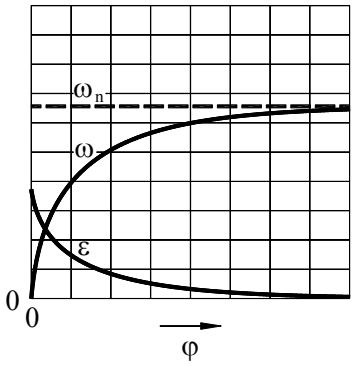


Fig. 5.10

în care q are o valoare apropiată de unitate, se poate calcula timpul de pornire t_p. Se aplică formula (5.22) cu $t_0 = 0,\ \omega_0 = 0$, obținând

$$t_p = -\frac{\omega_n J_{red}}{M_{e0}} \ln\left(1 - \frac{\omega}{\omega_n}\right) = -\frac{\omega_n J_{red}}{M_{e0}} \ln(1-q). \tag{5.27}$$

Dacă, de exemplu, $q = 0,99$ se obține

$$t_p = 4,6 \frac{\omega_n J_{red}}{M_{e0}}$$

În cazul în care timpul de pornire este limitat se poate calcula, din formula (5.27), parametrul M_{e0} în vederea alegerii unui motor corespunzător.

5.1.4.2. Cazul $M^m_{red}(\omega)$, $M^r_{red}(\varphi)$

În această categorie intră maşinile cu motoare electrice sau termice asociate cu mecanisme de lucru cu cuple inferioare sau cu came, cum sunt compresoarele şi pompele cu piston, presele cu excentric, maşinile din industria textilă şi din industria de prelucrare a produselor alimentare, etc. Pentru analiza dinamică se foloseşte ecuația (5.13),

$$\omega J_{red}(\varphi)\frac{d\omega}{d\varphi} + \frac{1}{2}\omega^2 \frac{dJ_{red}(\varphi)}{d\varphi} = M^m_{red}(\omega) - M^r_{red}(\varphi). \tag{5.28}$$

Caracteristicile $M^m_{red}(\omega)$ şi $M^r_{red}(\varphi)$ se aproximează prin funcții analitice sau prin funcții de interpolare puse la dispoziție de programe utilitare. Menționăm că $M^r_{red}(\varphi)$ este o funcție periodică aşa cum rezultă din Fig.5.6.b,c. Ecuația (5.28) se poate pune sub formă generală

$$\frac{d\omega}{d\varphi} + f(\varphi, \omega) = 0, \tag{5.29}$$

şi se rezolvă numai prin metode numerice, determinând funcția $\omega = \omega(\varphi)$. Pentru rezolvare este necesară cunoaşterea unei perechi de valori inițiale (φ_0, ω_0). Prin derivare numerică, se determină funcția $\varepsilon(\varphi)$,

$$\varepsilon(\varphi) = \frac{d\omega}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\omega(\varphi)}{d\varphi} \cdot \omega(\varphi). \tag{5.30}$$

În Fig.5.11 se prezintă un exemplu numeric de integrare a ecuației de mişcare pentru o maşină care lucrează prin efect de lovire, acționată electric. Caracteristica motoare $M^m_{red}(\omega)$ este de tipul celei din Fig.5.5.a, aproximată printr-o dreaptă. Funcțiile $M^r_{red}(\varphi)$ şi $J_{red}(\varphi)$ sunt reprezentate prin graficele

din Fig.5.11 împreună cu funcția $\omega(\varphi)$ obținută prin rezolvarea ecuației de mişcare şi cu graficul $\varepsilon(\varphi)$ obținut prin derivare numerică. Ca valori inițiale s-au luat $\varphi_0 = 0,\ \omega_0 = 0$, astfel încât curbele $\omega(\varphi)$ şi $\varepsilon(\varphi)$ sunt trasate atât pentru faza de pornire, cât şi pentru cea de regim.

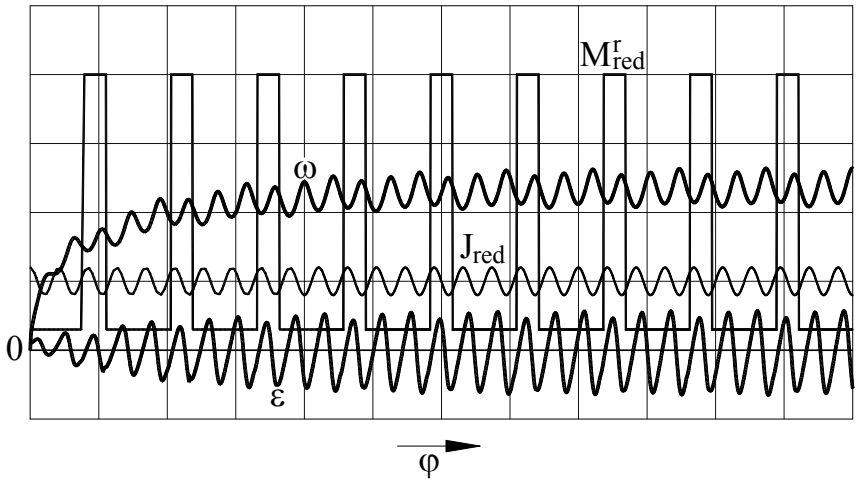


Fig. 5.11

5.1.4.3. Cazul $M^m_{red}(\varphi)$, $M^r_{red}(\varphi)$

Acest caz se întâlneşte la mecanismele acționate de motoare cu elemente elastice (arcuri) şi are aplicații tehnice limitate. Un domeniu reprezentativ în care intervine această acționare este cel al aparatelor electrice de conectare.

Analiza dinamică se efectuează pe baza ecuației de mişcare scrisă sub formă finită (5.11),

$$\frac{1}{2}J_{red}(\varphi)\omega^2 - \frac{1}{2}J_{red0}\omega_0^2 = \int_{\varphi_0}^{\varphi}\left(M^m_{red}(\varphi) - M^r_{red}(\varphi)\right)d\varphi .$$

Din această ecuație se determină funcția $\omega(\varphi)$,

$$\omega(\varphi) = \sqrt{\frac{2\int_{\varphi_0}^{\varphi}\left(M^m_{red}(\varphi) - M^r_{red}(\varphi)\right) + J_{red0}\omega_0^2}{J_{red}(\varphi)}} . \qquad (5.31)$$

Ca şi în celelalte cazuri studiate, funcţiile iniţiale $M_{red}^{m}(\varphi)$, $M_{red}^{r}(\varphi)$ şi $J_{red}(\varphi)$ se cunosc. Caracteristica motorului cu arc $M_{red}^{m}(\varphi)$ este liniară dacă elementul de reducere este elementul motor (asupra căruia acţionează direct arcul). Altfel, funcţia $M_{red}^{m}(\varphi)$ îşi pierde liniaritatea datorită rapoartelor de viteze care intervin în formula (5.4) şi care nu sunt constante. Pentru aplicarea formulei (5.31) trebuie să se mai cunoască valorile J_{red0} şi ω_0 corespunzătoare poziţiei iniţiale $\varphi = \varphi_0$. Dacă poziţia iniţială este cea de staţionare, $\omega_0 = 0$, iar formula (5.31) devine

$$\omega(\varphi) = \sqrt{\frac{2\int_{\varphi_0}^{\varphi}\left(M_{red}^{m}(\varphi) - M_{red}^{r}(\varphi)\right)}{J_{red}(\varphi)}}. \qquad (5.32)$$

Integrala care intervine în formulele (5.31) şi (5.32) se calculează, de regulă, prin metode numerice. Acceleraţia unghiulară, ca funcţie de parametrul φ, se determină cu ajutorul relaţiei (5.30). Dacă interesează exprimarea legii de mişcare în funcţie de timp, se scrie ecuaţia

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt},$$

care se rezolvă prin separarea variabilelor

$$dt = \frac{d\varphi}{\omega(\varphi)}$$

$$t - t_0 = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\omega(\varphi)}. \qquad (5.33)$$

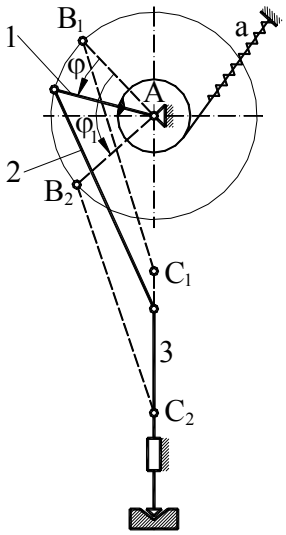


Fig. 5.12

În felul acesta se obţine funcţia $t(\varphi)$ şi implicit funcţia $\varphi(t)$ cu ajutorul căreia se determină funcţiile $\omega(t)$ şi $\varepsilon(t)$.

Pentru exemplificare, se consideră mecanismul manivelă – piston (Fig.5.12) utilizat în construcţia unui întrerupător de înaltă tensiune. Elementul conducător 1 este acţionat de arcul a şi transmite mişcarea la elementul 3 solidar cu contactul mobil al întrerupătorului. Mecanismul se blochează în poziţia "deschis" AB_1C_1 cu arcul tensionat. Pentru închiderea contactului se eliberează sistemul de blocare, iar arcul roteşte elementul 1 cu

unghiul φ_1, până ce mecanismul ajunge în poziția AB_2C_2. Caracteristica arcului este liniară, astfel încât, momentul motor are expresia

$$M_{red}^{m} = M_0 - k\varphi\,, \tag{5.34}$$

în care M_0 este momentul inițial corespunzător contactului deschis, iar k este o constantă care depinde de rigiditatea arcului. Dacă se neglijează frecarea, momentul rezistent se consideră nul. Momentul de inerție redus se determină conform cu relația (5.2) aplicată mecanismului manivelă – piston. Introducând expresia (5.34) în formula (5.32) şi calculând analitic integrala din această formulă, se obține $\omega(\varphi)$

$$\omega(\varphi) = \sqrt{\frac{2M_0\varphi - k\phi^2}{J(\varphi)}}\,. \tag{5.35}$$

În Fig.5.13 sunt reprezentate funcțiile inițiale $M_{red}^{m}(\varphi)$ şi $J_{red}(\varphi)$ precum şi diagramele rezultate $\omega(\varphi)$ şi $\varepsilon(\varphi)$ pentru un caz numeric. Trecând la variabila t, pe baza relației (5.33), s-au obținut funcțiile $\varphi(t)$, $\omega(t)$ şi $\varepsilon(t)$ reprezentate în Fig.5.14. În această aplicație interesează şi timpul de comutare, în care mecanismul se deplasează între cele două poziții. Acest parametru se determină folosind relația (5.33) cu limitele de integrare $\varphi_0 = 0$ şi $\varphi = \varphi_1$,

$$t = \int_0^{\varphi_1} \frac{d\varphi}{\omega(\varphi)}\,. \tag{5.36}$$

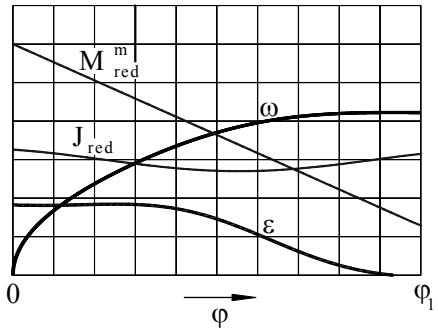


Fig. 5.13

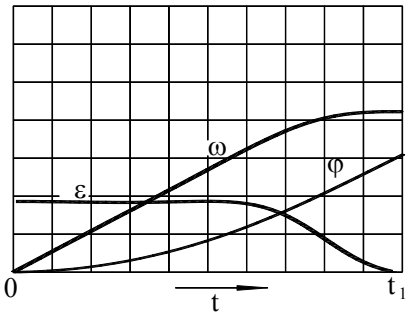


Fig. 5.14

5.1.5. Uniformizarea mişcării maşinii

Mişcarea neuniformă a elementului conducător, care este specifică maşinilor cu $M_{red}^{m}(\omega)$, $M_{red}^{r}(\varphi)$ (par. 5.1.4.2), constituie un neajuns deoarece este o sursă de suprasolicitări, de vibraţii şi poate aduce prejudicii calităţii procesului tehnologic. Caracterul neuniform al mişcării maşinii se apreciază prin valoarea gradului de neuniformitate δ (5.6). Cu cât δ este mai mic, mişcarea se consideră mai uniformă. De aceea gradul de neuniformitate are un interval de valori recomandate, stabilit în funcţie de tipul maşinii aşa cum rezultă din tabelul următor.

Tipul maşinii	δ
Pompe	0,2 – 0,033
Maşini agricole	0,2 – 0,02
Maşini unelte	0,05 – 0,002
Maşini textile	0,1 – 0,01
Prese, ştanţe	0,1 – 0,25
Motoare auto	0,01 – 0,001
Generatoare c.a.	0,005 – 0,003
Motoare aviaţie	< 0,005

Asigurarea gradului de neuniformitate necesar poate fi interpretată ca o problemă de sinteză dinamică, iar rezolvarea sa trebuie integrată în procesul de proiectare al maşinii.

Se consideră ecuaţia energiei cinetice, aplicată unei maşini, scrisă pentru perioada corespunzătoare poziţiilor în care viteza unghiulară a elementului de reducere trece prin valori extreme,

$$\frac{1}{2}J_{red1}\omega_{max}^{2} - \frac{1}{2}J_{red2}\omega_{min}^{2} = L, \tag{5.37}$$

în care J_{red1} şi J_{red2} sunt valorile momentului de inerţie redus în poziţiile menţionate. Din relaţiile (5.5) şi (5.6) se deduce

$$\omega_{max}^{2} = \omega_{m}^{2}\left(1+\frac{\delta}{2}\right)^{2} \cong \omega_{m}^{2}\left(1+\delta\right)$$

$$\omega_{min}^{2} = \omega_{m}^{2}\left(1-\frac{\delta}{2}\right)^{2} \cong \omega_{m}^{2}\left(1-\delta\right).$$

Introducând aceste expresii în ecuaţia (5.37) se obţine

$$\delta = \frac{L - \frac{1}{2}\omega_m^2\left(J_{red1} - J_{red2}\right)}{\frac{1}{2}\omega_m^2\left(J_{red1} + J_{red2}\right)}. \tag{5.38}$$

Să presupunem, acum, că momentul de inerție redus se majorează cu o cantitate constantă J_C. În această ipoteză J_{red1} devine ($J_{red1} + J_C$), iar J_{red2} devine ($J_{red2} + J_C$). Dacă introducem aceste valori în formula (5.38), aceasta devine

$$\delta = \frac{L - \frac{1}{2}\omega_m^2\left(J_{red1} - J_{red2}\right)}{\frac{1}{2}\omega_m^2\left(J_{red1} + J_{red2} + 2J_C\right)}. \tag{5.39}$$

Se observă că efectul majorării momentului de inerție redus este micşorarea parametrului δ, deci îmbunătățirea uniformității. Soluția practică pentru a majora momentul de inerție redus constă în montarea, pe unul dintre arborii maşinii, a unei piese în formă de disc, numită **volant**. Prin urmare, problema uniformizării mişcării se reduce la determinarea momentului de inerție al volantului.

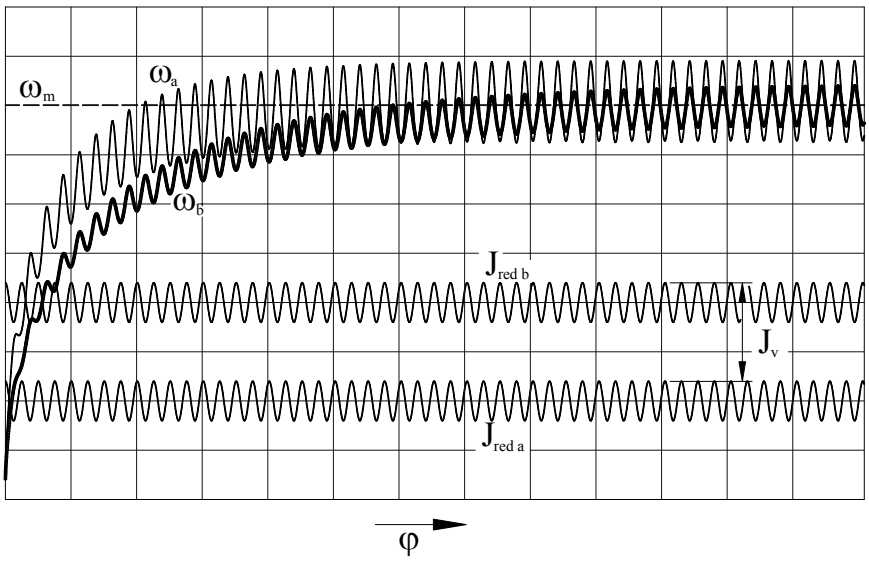


Fig. 5.15

Influența volantului asupra funcționării unei mașini rezultă, sugestiv, din Fig.5.15. În această figură sunt trasate diagramele $\omega_a(\varphi)$ şi $\omega_b(\varphi)$ obținute prin integrarea ecuației de mişcare (par. 5.1.4.2), considerând aceleaşi caracteristici mecanice $M^m_{red}(\omega)$ şi $M^r_{red}(\varphi)$, dar momente de inerție reduse diferite $J_{red\ a}(\varphi)$ şi $J_{red\ b}(\varphi) = J_{red\ a}(\varphi) + J_V$ (J_V - momentul de inerție al volantului).

Din analiza celor două diagrame se pot trage următoarele concluzii.

1) În cazul maşinii prevăzută cu volant, amplitudinea oscilațiilor vitezei unghiulare $\omega_b(\varphi)$ este mai mică decât în cazul maşinii fără volant $\omega_a(\varphi)$. În consecință şi gradul de neuniformitate se reduce.

2) Viteza unghiulară medie ω_m se menține aceeaşi pentru cele două cazuri.

3) Timpul de pornire, considerat până în momentul în care oscilațiile vitezei unghiulare se stabilizează, instalându-se faza de regim, este mai mare la maşina prevăzută cu volant în raport cu cea fără volant.

Pentru determinarea momentului de inerție al volantului se cunosc mai multe metode, elaborate în condițiile în care tehnica de calcul modernă era necunoscută. Aceste metode, având caracter preponderent grafic, apelează la multe ipoteze aproximative, iar utilizarea lor nu se mai justifică astăzi. Considerăm că cea mai simplă cale de rezolvare a problemei constă în integrarea numerică a ecuației de mişcare, în mod repetat, pentru diverse valori atribuite momentului de inerție J_V. În felul acesta se obține funcția $\delta(J_V)$ şi, implicit, $J_V(\delta)$ care permite determinarea valorii J_V pentru orice δ impus. În Fig.5.16 se reprezintă diagrama $J_V(\delta)$ trasată pentru maşina analizată în Fig.5.15. Această diagramă arată că eficiența montării volantului pentru reducerea gradului de neuniformitate este determinată de ordinul de mărime al momentului de inerție J_V. Se observă că, în partea a doua a diagramei δ scade foarte puțin cu creşterea lui J_V. De altfel odată cu creşterea lui J_V se măresc timpul şi momentul necesar de pornire, cu consecințe nefavorabile asupra funcționării

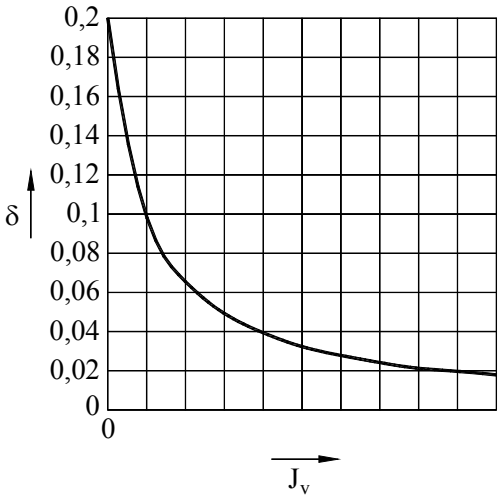


Fig. 5.16

motorului. În aceste condiții nu este judicios să se adopte un volant cu moment de inerție foarte mare, ci să se înlocuiască motorul cu un altul mai puternic.

5.1.6. Comportarea energetică a maşinii

Se scrie ecuația energiei cinetice, sub formă finită, aplicată unei maşini

$$E_C - E_{C_0} = L, \tag{5.7}$$

care arată că variația energiei cinetice într-un interval de timp finit este egală cu lucrul mecanic dezvoltat de forțele care acționează asupra maşinii în acelaşi interval. Variația energiei cinetice se exprimă utilizând modelul dinamic cu element de reducere în mişcare de rotație,

$$E_C - E_{C_0} = \frac{1}{2} J_{red}\omega^2 - \frac{1}{2} J_{red0}\omega_0^2,$$

iar lucrul mecanic are forma

$$L = L_m - L_r$$

$$L_r = L_u + L_f,$$

în care L_m este lucrul mecanic motor, L_r - lucrul mecanic rezistent, L_u - lucrul mecanic util (al forțelor tehnologice) şi L_f - lucrul mecanic al forțelor de frecare. Cu aceste precizări ecuația energiei cinetice devine

$$L_m = L_u + L_f + \left(E_C - E_{C_0}\right). \tag{5.40}$$

Relația (5.40) se numeşte ecuația bilanțului energetic, deoarece arată modul în care este folosit în maşină lucrul mecanic motor, care se transformă în trei componente: lucrul mecanic util, lucrul mecanic de frecare şi variația energiei cinetice. Dacă $L_m > L_u + L_f$, variația energiei cinetice este pozitivă şi mişcarea maşinii se accelerează iar dacă $L_m < L_u + L_f$, variația energiei cinetice este negativă, iar mişcarea este decelerată. Variația energiei cinetice poate fi interpretată ca lucrul mecanic al forțelor de inerție, L_i, astfel că ecuația (5.40) se poate scrie

$$L_m = L_u + L_f \pm L_i. \tag{5.41}$$

Ecuația bilanțului energetic se poate exprima şi în funcție de puteri. Prin derivarea ecuației (5.41), în raport cu timpul, se obține expresia

$$P_m = P_u + P_f \pm P_i. \tag{5.42}$$

Dacă intervalul pentru care se scrie ecuația energiei cinetice corespunde unui ciclu cinematic, variația energiei cinetice este nulă, iar ecuația (5.40) devine

$$L_m = L_u + L_f . \tag{5.43}$$

Aşa cum am arătat (subcap. 2.2.4.), eficiența energetică a maşinii se apreciază cu ajutorul **randamentului mecanic** definit ca **raportul dintre lucrul mecanic util şi lucrul mecanic motor pentru un ciclu al mişcării de regim**,

$$\eta = \frac{L_u}{L_m} \tag{5.44}$$

În mod similar se defineşte randamentul instantaneu în funcție de puteri

$$\eta = \frac{P_u}{P_m} \tag{5.45}$$

Aprecieri privitoare la domeniul de variație al randamentului şi la modalitățile de îmbunătățire a valorii sale, sunt prezentate în subcap. 2.2.4. Procedeele de calcul al randamentului sunt arătate pentru fiecare categorie de mecanisme, în subcap. 2.2.4. (pentru mecanismele cu bare), 2.2.5. (pentru mecanismele cu şurub), 3.5.2., 3.5.3., 3.5.4. (pentru mecanismele cu came), 4.1.3.9. (pentru mecanismele elementare cu roți dințate), 4.2.1.2. (pentru mecanismele complexe formate din roți dințate cu axe fixe) şi 4.2.2.3. (pentru mecanismele planetare).

5.2. ANALIZA ELASTODINAMICĂ

5.2.1. Considerații generale

Analiza elastodinamică este o extindere a analizei dinamice luând în considerare şi deformațiile elastice ale elementelor. Asupra sistemului elastic format din elementele unei maşini acționează forțe variabile periodic, care îl scot din starea de echilibru producând o mişcare vibratorie. Această mişcare se suprapune peste mişcarea de bază (obținută în ipoteza rigidității elementelor) şi poate perturba funcționarea maşinii, în special la viteze mari. De aceea, caracteristicile şi efectele vibrațiilor trebuie cunoscute şi stăpânite.

Prima etapă în analiza elastodinamică este schematizarea sistemului real în vederea obținerii unui model fizic simplificat. Elementele mecanismelor, luate individual sau grupate în lanțuri cinematice, se caracterizează prin proprietăți masice, elastice şi de amortizare. În cadrul modelului elastodinamic fiecare dintre aceste proprietăți sunt preluate de elemente separate: **mase**

concentrate, elemente elastice (arcuri) şi amortizoare. Proprietăţile elastice se pun în evidenţă prin relaţia dintre forţa elastică F_e şi deformaţia elastică x. Dacă această relaţie este de proporţionalitate

$$F_e = -k \cdot x \tag{5.46}$$

elementul elastic este **liniar**, iar parametrul k se numeşte **constantă elastică**. În legătură cu semnificaţia parametrilor F_e şi x trebuie făcute câteva precizări. Se consideră, în acest scop, un element elastic 1 (Fig.5.17) cu capătul A fix şi capătul B mobil, reprezentat în poziţia de echilibru (Fig.5.17.a) şi într-o poziţie tensionată (Fig.5.17.b). Forţa elastică F_e este cea care acţionează, în punctul B, din partea elementului elastic 1 asupra elementului 2, iar deformaţia x este deplasarea punctului B în raport cu poziţia de echilibrare. Dacă ambele extremităţi ale arcului sunt mobile, forţele elastice F_{eA} şi F_{eB} au expresiile

$$\begin{cases} F_{eA} = -k(x_A - x_B) \\ F_{eB} = -k(x_B - x_A), \end{cases} \tag{5.47}$$

în care x_A şi x_B reprezintă coordonatele punctelor A şi B măsurate astfel încât la $x_A = x_B$, elementul să fie detensionat. O mare parte dintre sistemele tehnice pot fi considerate elastic liniare. Caracterul neliniar este provocat de existenţa unor jocuri pronunţate, de prestrângeri sau de unele materiale cum ar fi cauciucul, fonta, aluminiul, etc.

Amortizarea se manifestă prin disiparea energiei mecanice a vibraţiilor datorită frecărilor dintre elemente şi a frecărilor interne. În cadrul procesului vibrator intervin întotdeauna forţe de amortizare care au caracter rezistent – se opun vitezei de deplasare $\dot{x}$ (Fig.5.18). Relaţia de calcul a forţei de amortizare F_a, depinde de tipul amortizării. În cazul mecanismelor se întâlneşte, de regulă, amortizarea **vâscoasă**, caracterizată prin relaţia

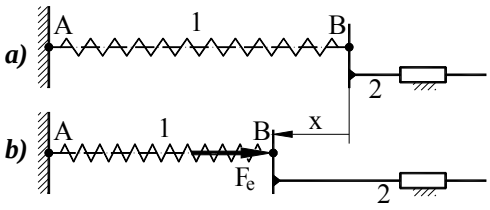


Fig. 5.17

$$F_a = -c \cdot \dot{x} \tag{5.48}$$

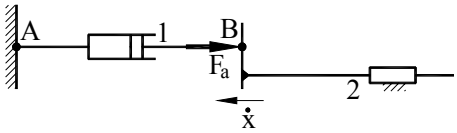


Fig. 5.18

Precizăm că forţa de amortizare acţionează din partea amortizorului asupra elementului cu care acesta este legat, iar $\dot{x}$ este viteza punctului de conexiune, în ipoteza că celălalt capăt al amortizoului este fix (Fig.5.18).

Dacă amortizorul are ambele extremități mobile, forțele de amortizare F_{aA} şi F_{aB} se calculează cu formulele

$$\begin{cases} F_{aA} = -c(\dot{x}_A - \dot{x}_B) \\ F_{aB} = -c(\dot{x}_B - \dot{x}_A) \end{cases} \tag{5.49}$$

Adoptarea modelului este o problemă foarte importantă deoarece acesta trebuie să reproducă suficient de bine comportarea vibratorie a maşinii (mecanismului), dar, în acelaşi timp, nu trebuie să fie complicat şi dificil de analizat. Complexitatea modelului depinde, în mare măsură, de **numărul de grade de libertate** – numărul de parametri (coordonate generalizate) necesar pentru determinarea poziției sistemului. Pentru reducerea numărului de grade de libertate, numărul de mase concentrate şi de elemente elastice trebuie să fie, de asemenea, cât mai mic. În acest scop, o parte dintre masele şi deformațiile sistemului real se neglijează, luându-se în considerare numai cele care au o influență concludentă asupra fenomenului vibrator.

În etapa următoare se elaborează modelul matematic prin care se stabilesc ecuațiile de mişcare. Aceste ecuații descriu comportarea dinamică a modelului fizic, făcând legătura dintre forțele aplicate şi parametrii cinematici (deplasări, viteze, accelerații). Se pot utiliza, în acest scop, ecuațiile diferențiale ale mişcării maşinii (5.13, 5.14) deduse pornind de la ecuațiile energiei cinetice (par.5.1.3) sau ecuațiile lui Lagrange. În cazul în care caracteristicile masice (mase, momente de inerție) sunt constante se foloseşte principiul lui D'Alambert. Precizăm că modelul poate conține şi mase (momente de inerție) reduse, care au caracter variabil în timp (par.5.1.1). O problemă importantă legată de elaborarea ecuațiilor de mişcare este formularea funcțiilor prin care se exprimă forțele aplicate (caracteristicile mecanice – par.5.1.3). Aceste forțe sunt variabile şi reprezintă **excitația sistemului**. Menționăm că excitația se poate constitui şi din unele deplasări cu caracter periodic, impuse sistemului şi, deci, cunoscute. Desigur, în ecuațiile de mişcare intervin şi forțele specifice modelului elastodinamic: elastice şi de amortizare. Prin integrarea ecuațiilor de mişcare se obțin legile de mişcare ale maselor concentrate care constituie **răspunsul sistemului elastic** la excitațiile date.

Analiza elastodinamică a mecanismelor (maşinilor) urmăreşte, în principal, două obiective. Primul dintre ele constă în determinarea abaterilor cinematice care se manifestă la elementele de execuție şi sunt cauzate de deformațiile elastice. Al doilea obiectiv constă în evaluarea solicitărilor suplimentare la care sunt supuse elementele. Menținerea efectelor cinematice şi dinamice ale vibrațiilor în limite admisibile este legată, în mare măsură, de evitarea fenomenului de rezonanță.

În cele ce urmează se prezintă modul de aplicare a analizei elastodinamice în două cazuri reprezentative: o maşină prevăzută cu o transmisie elastică şi un mecanism cu camă.

5.2.2. Maşini cu transmisii elastice

5.2.2.1. Modelul fizic

Se consideră o maşină formată dintr-un motor rotativ M, o transmisie cu roți dințate T şi un mecanism de lucru, L (Fig.5.19). Vom face analiza dinamică a maşinii, luând în considerare deformațiile elastice ale elementelor din construcția transmisiei, aplicând un procedeu propus de M. Z. Kolovskii [9]. Modelul elastodinamic este format din două discuri în mişcare de rotație între care se interpune un element elastic şi un amortizor (Fig.5.20). Discul din stânga (M) reprezintă modelul dinamic al motorului, prin reducere la arborele de ieşire din transmisie şi se caracterizează prin parametrii cinematici φ_M, $\dot{\varphi}_M = \omega_M$, $\ddot{\varphi}_M = \varepsilon_M$ şi prin parametrii dinamici reduşi J_M şi M_M, care sunt în relație cu parametrii motorului,

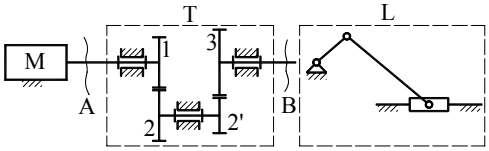


Fig. 5.19

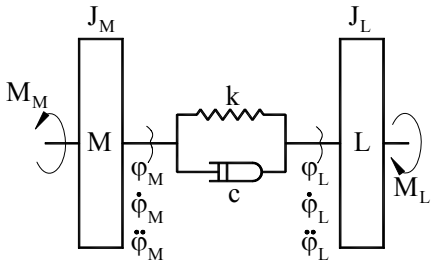


Fig. 5.20

$$\varphi_M = \frac{\varphi_{MT}}{i},\ \dot{\varphi}_M = \frac{\dot{\varphi}_{MT}}{i},\ \ddot{\varphi}_M = \frac{\ddot{\varphi}_{MT}}{i} \tag{5.50}$$

$$J_M = J_{MT} \cdot i^2 \tag{5.51}$$

$$M_M = M_{MT} \cdot i\,. \tag{5.52}$$

În aceste relații φ_M, $\dot{\varphi}_M$, $\ddot{\varphi}_M$ sunt parametrii cinematici ai motorului, J_{MT} este momentul de inerțial rotorului motorului, M_{MT} este momentul dezvoltat de motor, iar i este raportul de transmitere al mecanismului cu roți dințate care formează transmisia. Dacă aceasta are structura din Fig.5.19,

$$i = i_{13} = \frac{z_2 \cdot z_3}{z_1 \cdot z_{2'}}\,.$$

Discul din dreapta (L) reprezintă modelul dinamic al mecanismului de lucru, prin reducerea la elementul conducător al acestui mecanism (arborele de intrare) şi se caracterizează prin parametrii cinematici φ_L, $\dot{\varphi}_L = \omega_L$, $\ddot{\varphi}_L = \varepsilon_L$ şi prin parametrii dinamici J_L (momentul de inerție redus) şi M_L (momentul

rezistent redus) care se determină ca în cazul modelului dinamic cu elemente rigide (par.5.1.1). Conexiunea dintre cele două discuri, numită arbore elastic, modelează proprietățile elastice şi de amortizare ale transmisiei. Aceste proprietăţi se caracterizează prin constanta elastică, k şi coeficientul de amortizare,c. Constanta elastică, redusă la arborele de ieşire din transmisie, se defineşte cu relația

$$k = \frac{M_B}{\varphi_B}, \tag{5.53}$$

în care M_B este un moment aplicat asupra arborelui de ieşire din transmisie în secțiunea B, iar φ_B este unghiul de rotire al acestei secțiuni, în ipoteza că arborele de intrare se menține fix în secțiunea A (Fig.5.19). Unghiul φ_B este rezultatul deformațiilor elastice cauzate de răsucirea arborilor şi de încovoierea dinților roților şi se calculează prin însumarea acestor deformații reduse la secțiunea B. Astfel, de exemplu, deformația de torsiunea a arborelui 2, redusă la secțiunea B, φ_{2B} are expresia

$$\varphi_{2B} = \frac{\varphi_2}{i_{23}} = \frac{M_2}{k_2 \cdot i_{23}} = \frac{M_B}{k_2 \cdot i_{23}^2}, \tag{5.54}$$

în care φ_2 şi M_2 reprezintă deformația unghiulară şi momentul de torsiune ale arborelui 2, $i_{23} = z_3 / z_2$, iar k_2 este o constantă elastică, având expresia cunoscută

$$k_2 = \frac{G \cdot I_{p2}}{\ell_2}.$$

În această formulă G este modulul de elasticitate transversal (pentru oțel $G = 8 \cdot 10^4$ [MPa]), I_{p2} etse momentul de inerție polar al secțiunii arborelui ($I_{p2} = \pi \cdot d_2^4 / 32$), iar ℓ_2 este lungimea segmentului dintre roțile 2 şi 2', supusă torsiunii.

Rotirea roții 2 în raport cu roata 1, cauzată de încovoierea dinților angrenajului 1 – 2, redusă la secțiunea B, φ_{21B} are o expresie similară cu (5.54),

$$\varphi_{21B} = \frac{\varphi_{21}}{i_{23}} = \frac{M_2}{k_{21} \cdot i_{23}} = \frac{M_B}{k_{21} \cdot i_{23}^2} \tag{5.55}$$

în care constanta elastică k_{21} se determină astfel

$$k_{21} = \frac{M_2}{\varphi_{21}} = \frac{R_{12}^t \cdot r_{w2}}{\frac{\delta_w}{r_{w2}}} = \frac{R_{12}^t}{\delta_w} \cdot r_{w2}^2 = k_{21w} \cdot r_{w2}^2 .$$

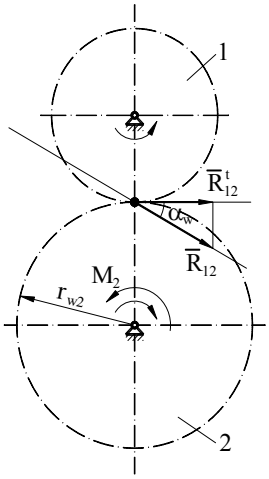


Fig. 5.21

În această relație R_{12}^t este componenta tangențială a reacțiunii R_{12} (Fig.5.21), iar δ_w este suma deformațiilor de încovoiere ale dinților, considerate la nivelul cercurilor de rostogolire. Parametrul $k_{21w} = R_{12}^t / \delta_w$ este o constantă elastică liniară, care se poate calcula cu formula $k_{21w} = k_m \cdot b$, în care b este lățimea roților iar k_m este un coeficient care depinde de material. Pentru roți de oțel $k_m = 15.000$ MPa [9].

Luând în considerare deformațiile de torsiune ale arborilor 1, 2 şi 3 precum şi deformațiile de încovoiere ale dinților în angrenajele 1 – 2 şi 2' - 3, se poate scrie

$$\varphi_B = \frac{M_B}{k_1 \cdot i_{13}^2} + \frac{M_B}{k_2 \cdot i_{23}^2} + \frac{M_B}{k_3} + \frac{M_B}{k_{21} \cdot i_{23}^2} + \frac{M_B}{k_{2'3}},$$

de unde rezultă

$$k = \frac{M_B}{\varphi_B} = \frac{1}{\frac{1}{k_1 \cdot i_{13}^2} + \frac{1}{k_2 \cdot i_{23}^2} + \frac{1}{k_3} + \frac{1}{k_{21} \cdot i_{23}^2} + \frac{1}{k_{2'3}}} \qquad (5.56)$$

În cazul vibrațiilor cu amplitudini mici se consideră o amortizare vâscoasă, caracterizată printr-un coeficient de amortizare constant, $c = ct$. Determinarea prin calcul a coeficientului de amortizare este o problemă foarte complicată. De aceea se recurge, de regulă, la determinări experimentale.

Menționăm că elaborarea acestui model elastodinamic s-a făcut în ipoteza că momentele de inerție ale roților dințate sunt mici şi, deci, neglijabile.

5.2.2.2. Modelul matematic

Pentru a analiza mişcarea maşinii se utilizează ecuațiile de tipul (5.14), scrise separat, pentru cele două discuri M şi L, care intervin în cadrul modelului elastodinamic (Fig.5.20). În aceste ecuații, pe lângă termenii întâlniți la mecanismele cu elemente rigide, intervin şi termeni care reprezintă forța

elastică şi forţa de amortizare. Având în vedere că $J_M = ct$, iar $\frac{dJ_M}{d\varphi_M} = 0$, cele două ecuaţii de mişcare au forma

$$J_M\ddot{\varphi}_M = M_M - c(\dot{\varphi}_M - \dot{\varphi}_L) - k(\varphi_M - \varphi_L) \tag{5.57}$$

$$J_L\ddot{\varphi}_L + \frac{1}{2}\frac{dJ_L}{d\varphi_L}\cdot\dot{\varphi}_L^2 = -M_L - c(\varphi_L - \phi_M) - k(\dot{\varphi}_L - \dot{\varphi}_M) \tag{5.58}$$

Funcţiile $J_M = ct$, $M_M(\dot{\varphi}_M)$, $J_L(\varphi_L)$ şi $M_L(\varphi_L)$ care intervin în ecuaţii, sunt cunoscute. Prin integrarea sistemului format din ecuaţiile (5.57) şi (5.58) se determină funcţiile $\varphi_M(t)$ şi $\varphi_L(t)$ care descriu funcţionarea maşinii şi constituie răspunsul sistemului elastic.

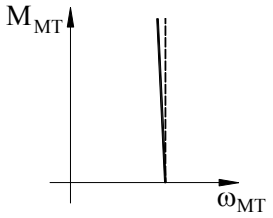


Fig. 5.22

Pentru a simplifica operaţia de integrare se face ipoteza că viteza unghiulară a motorului ω_{MT} este constantă şi cunoscută. Această ipoteză poate fi admisă dacă motorul are o caracteristică mecanică aproape rigidă, reprezentată printr-o dreaptă foarte apropiată de verticală (Fig.5.22). În aceste condiţii $\omega_M = \omega_{MT}/i$ este, de asemenea, constantă şi cunoscută, astfel încât se poate scrie

$$\begin{cases} \dot{\varphi}_M = \omega_M = ct \\ \ddot{\varphi}_M = 0 \\ \varphi_M = \omega_M \cdot t. \end{cases} \tag{5.59}$$

Astfel, rămâne ca singură necunoscută funcţia $\varphi_L(t)$ care se determină prin integrarea ecuaţiei (5.58). Funcţiile $M_L(\varphi_L)$ şi $J_L(\varphi_L)$ se scriu sub forma

$$M_L(\varphi_L) = M_{LC} + M_{LV}(\varphi_L) \tag{5.60}$$

$$J_L(\varphi_L) = J_{LC} + J_{LV}(\varphi_L) \tag{5.61}$$

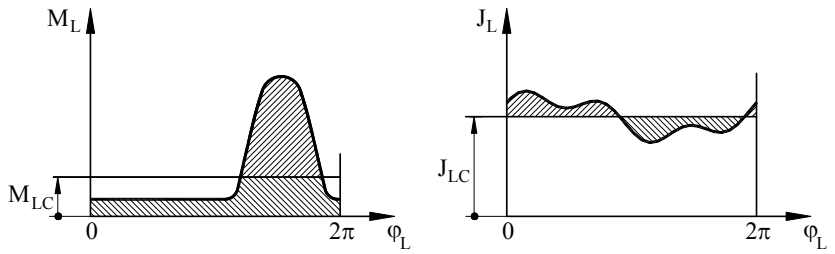
în care M_{LC} şi J_{LC} sunt constante stabilite în aşa fel încât funcţiile periodice $M_{LV}(\varphi_L)$ şi $J_{LV}(\varphi_L)$ (Fig.5.23) să satisfacă următoarele condiţii

$$\int_0^{2\pi} M_{LV}(\varphi_L)d\varphi_L = 0 \tag{5.62}$$

$$\int_0^{2\pi} J_{LV}(\varphi_L)d\varphi_L = 0. \tag{5.63}$$

Sub aspect geometric, ariile delimitate de curba $M_L = M_L(\varphi_L)$, situate deasupra şi sub dreapta de ecuaţie $M_L = M_{LC}$, trebuie să fie egale, aşa cum se

observă în Fig.5.23.a, unde aceste arii sunt haşurate în direcţii diferite. Aceeaşi observaţie se face în legătură cu curba $J_L = J_L(\varphi_L)$ reprezentată în Fig.5.23.b.



a) ***b)***

Fig. 5.23

Se poate arăta, de asemenea, că este îndeplinită condiţia

$$\int_0^{2\pi} \frac{dJ_{LV}}{d\varphi_L} d\varphi_L = J_{LV}(2\pi) - J_{LV}(0) = 0 \tag{5.64}$$

deoarece funcţia $J_{LV}(\varphi_L)$ este periodică, având perioada 2π. Introducând expresiile (5.60) şi (5.61) în ecuaţia (5.58), aceasta devine

$$\begin{aligned} J_{LC}\ddot{\varphi}_L + c(\dot{\varphi}_L - \dot{\varphi}_M) + k(\varphi_L - \varphi_M) = \\ = -M_{LC} + \left[-M_{LV} - J_{LV}\ddot{\varphi}_L - \frac{1}{2}\frac{dJ_{LV}}{d\varphi_L}\dot{\varphi}_L^2 \right]. \end{aligned} \tag{5.65}$$

Expresia din paranteza pătrată se notează

$$M_V(\varphi_L) = -M_{LV} - J_{LV}\ddot{\varphi}_L - \frac{1}{2}\frac{dJ_{LV}}{d\varphi_L}\dot{\varphi}_L^2 \tag{5.66}$$

şi reprezintă un moment variabil care constituie excitaţia sistemului. Cu această notaţie, ecuaţia de mişcare (5.65) capătă forma

$$J_{LC}\ddot{\varphi}_L + c(\dot{\varphi}_L - \dot{\varphi}_M) + k(\varphi_L - \varphi_M) + M_{LC} = M_{LV}(\varphi_L). \tag{5.67}$$

Ecuaţia (5.67) se rezolvă prin metoda aproximaţiilor succesive.

În **prima aproximaţie** se consideră $M_V = 0$. În această ipoteză, ţinând seama şi de relaţiile (5.59), ecuaţia (5.67) devine

$$J_{LC}\ddot{\varphi}_L + c\dot{\varphi}_L + k\varphi_L = -M_{LC} + c\omega_M + k\omega_M t. \tag{5.68}$$

Soluţia acestei ecuaţii, în ipoteza unui regim staţionar [9, 42], este

$$\begin{cases} \varphi_L = \omega_M \cdot t + \Delta \\ \dot{\varphi}_L = \omega_M = ct \\ \ddot{\varphi}_L = 0 \end{cases} \tag{5.69}$$

în care $\Delta = -M_{LC} / k$.

Rezultă că ambele capete ale arborelui elastic se rotesc uniform, cu aceeaşi viteză unghiulară $\omega_L = \omega_M$, iar $\Delta = \varphi_L - \varphi_M$ reprezintă deformația statică.

În **aproximația a 2-a** momentul $M_V(\varphi_L)$ se recalculează introducând în expresia sa soluția primei aproximații (5.69),

$$M_V(\varphi_L) = -M_{LV} - \frac{1}{2}\frac{dJ_{LV}}{d\varphi_L}\omega_M^2 . \tag{5.70}$$

Soluția ecuației (5.67) se caută sub forma

$$\begin{cases} \varphi_L = \omega_M \cdot t + \Delta + \varphi \\ \dot{\varphi}_L = \omega_M + \dot{\varphi} \\ \ddot{\varphi}_L = \ddot{\varphi} \end{cases} \tag{5.71}$$

în care φ este deformația dinamică a arborelui elastic. Introducând expresiile (5.71) şi (5.59) în ecuația (5.67) se obține

$$J_{LC}\ddot{\varphi} + c\dot{\varphi} + k\varphi = M_V(\varphi_L) . \tag{5.72}$$

Momentul de excitație $M_V(\varphi_L)$ are o variație periodică în funcție de parametrul φ_L şi se dezvoltă în serie Fourier pe baza formulelor

$$M_V(\varphi_L) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n \cos n\varphi_L + B_n \sin n\varphi_L) \tag{5.73}$$

$$A_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} M_V(\varphi_L)$$

$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} M_V(\varphi_L)\cdot\cos n\varphi_L \ ; \ B_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} M_V(\varphi_L)\cdot\sin n\varphi_L .$$

Dacă se ține seama de condițiile (5.62) şi (5.64), rezultă $A_0 = 0$, iar seria (5.73) se poate scrie în forma următoare

$$M_V = \sum_{n=1}^{\infty} M_{Vn}\sin(n\varphi_L + \theta_n) = \sum_{n=1}^{\infty} M_{Vn}\sin(n(\omega_M t + \Delta) + \theta_n) \tag{5.74}$$

$$M_{Vn} = \sqrt{A_n^2 + B_n^2} \ ; \ tg\theta_n = \frac{A_n}{B_n} .$$

Armonicele seriei Fourier (5.74) se înlocuiesc, succesiv, în ecuația (5.72) obținând un şir de ecuații de forma

$$J_{LC}\ddot{\varphi}_n + c\dot{\varphi}_n + k\phi_n = M_{Vn}\sin(n(\omega_M t + \Delta) + \theta_n)\,. \qquad (5.75)$$

Membrul din dreapta reprezintă un moment de excitație de formă armonică. Soluția particulară a acestei ecuații, corespunzătoare unui regim de vibrații stabilizat este [9, 42]

$$\varphi_n = \frac{M_{Vn}}{\sqrt{(k-(n\cdot\omega_M)^2\cdot J_{LC})^2 + (n\cdot c\cdot\omega_M)^2}}\cos(n(\omega_M + \Delta) + \theta_n - \psi_n) \qquad (5.76)$$

în care ψ_n se determină cu formula

$$\mathrm{tg}\psi_n = \frac{n\cdot c\cdot\omega_M}{k-(n\cdot\omega_M)^2\cdot J_{LC}}\,. \qquad (5.77)$$

Deformația dinamică φ se determină, prin însumare, folosind principiul suprapunerii efectelor,

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n\,. \qquad (5.78)$$

Această deformație este cauzată de elasticitatea sistemului şi se suprapune peste mişcarea de bază a maşinii.

Deoarece termenii din seria (5.78) converg rapid spre zero, în calculele practice este suficient să se considere numai termenul de ordinul unu (prima armonică) sau, cel mult, primii doi termeni.

Pulsația proprie a sistemului, determinată pe baza ecuației vibrațiilor libere neamortizate

$$J_{LC}\ddot{\varphi} + k\varphi = 0\,,$$

este

$$p = \sqrt{\frac{k}{J_{LC}}}\,. \qquad (5.79)$$

Amplitudinea deformației dinamice pentru $n = 1$, φ_{A1} rezultă din formula (5.76),

$$\varphi_{A1} = \frac{M_{V1}}{\sqrt{(k-\omega_M^2\cdot J_{LC})^2 + (c\cdot\omega_M)^2}}\,. \qquad (5.80)$$

Diagrama din Fig.5.24 arată dependența $\varphi_{A1}(k)$ în condiția $\omega_M = ct$. Amplitudinea maximă se înregistrează la rezonanță, când $p = \omega_M$, iar k are valoarea

$$k_{rez} = \omega_M^2 \cdot J_{LC} \,. \tag{5.81}$$

Din diagramă se observă că pentru $k < k_{rez}$, amplitudinea deformației elastice creşte atunci când rigiditatea (constanta elastică) creşte, iar pentru $k > k_{rez}$, amplitudinea scade. Această influență a rigidității asupra amplitudinii vibrațiilor trebuie luată, desigur, în considerare când se proiectează transmisia în vederea evitării fenomenului de rezonanță.

În Fig. 5.25 este reprezentată curba $\varphi_{A1}(\omega_M)$ pentru o valoare constantă a rigidității transmisiei. Rezonanța cauzată de prima armonică a momentului perturbator (de excitație) se produce la viteza

$$\omega_{M1rez} = \sqrt{\frac{2 \cdot J_{LC} \cdot k - c^2}{2 \cdot J_{LC}^2}} \tag{5.82}$$

iar amplitudinea la rezonanță se obține înlocuind această valoare în formula (5.80).

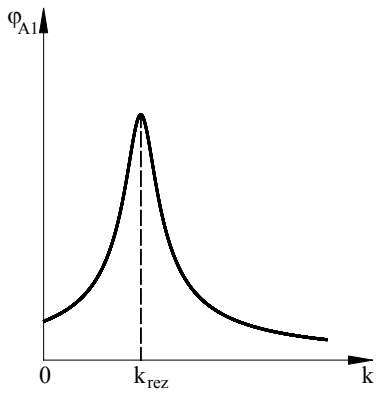


Fig. 5.24

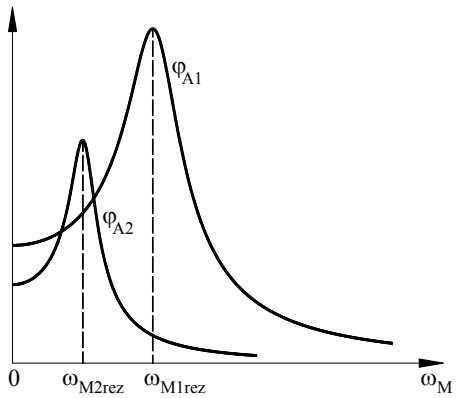


Fig. 5.25

Factorul de amplificare, definit ca raportul dintre amplitudinea deformației dinamice şi deformația statică provocată de momentul M_{V1},

$$A_1 = \frac{\varphi_{A1} \cdot k}{M_{V1}} \tag{5.83}$$

caracterizează supraîncărcarea produsă de deformațiile dinamice. La rezonanță A_1 are valoarea [42]

$$A_{1rez} = \frac{2 \cdot J_{LC} \cdot k}{c\sqrt{4 \cdot J_{LC} \cdot k - c^2}}. \qquad (5.84)$$

Se observă că A_{1rez} depinde de coeficientul de amortizare c. Dacă $c = 0$, A_{1rez} tinde la infinit, dar amortizarea există întotdeauna ($c \neq 0$), astfel încât, A_{1rez} are valori finite, care pot atinge mărimea 15 ÷ 20. De aceea funcționarea în zona de rezonanță ($\omega_M \cong \omega_{M1rez}$) nu este admisibilă. Dacă $\omega_M < \omega_{M1rez}$, trebuie verificată absența rezonanței la armonicele de ordin superior ($n \geq 2$). Armonica a doua are pulsația egală cu $2 \cdot \omega_M$, astfel încât, rezonanța apare la viteza $\omega_{M2rez} = \omega_{M1rez}/2$. În Fig.5.25 este reprezentată diagrama $\varphi_{A2}(\omega_M)$ şi este pusă în evidență viteza de rezonanță ω_{M2rez}.

5.2.3. Mecanisme cu came

5.2.3.1. Modelarea fizică şi matematică

Se consideră un mecanism cu camă prevăzut cu un arc de menținere a contactului din cupla superioară (Fig.5.26.a). Pentru analiza elastodinamică se propune modelul fizic din Fig.5.26.b în care masa tachetului (m) este concentrată în punctul B, iar proprietățile sale sunt preluate de un arc (k) şi un amortizor (c). Intervine, de asemenea, arcul de menținere a contactului având rigiditatea k_a. Deplasările punctelor A, $s_1(\varphi)$ şi B, $s_2(\varphi)$ sunt diferite datorită deformației elastice a tachetului. Funcția $s_1(\varphi)$ este legea de mişcare cunoscută, imprimată de camă. Precizăm că originile de măsură pentru coordonatele s_1 şi s_2 se adoptă astfel încât distanța dintre ele să fie egală cu a – lungimea tachetului AB în stare netensionată.

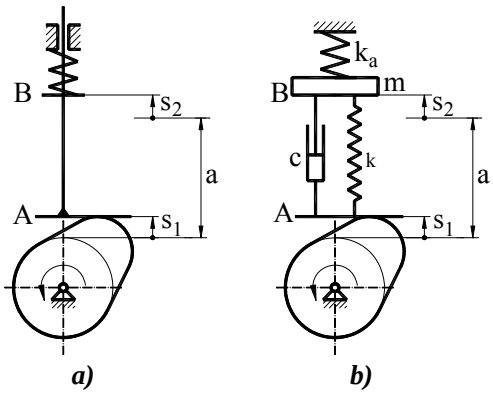


Fig. 5.26

Se scrie ecuația de mişcare a masei m pe baza principiului lui d'Alambert,

$$m \cdot \ddot{s}_2 + c(\dot{s}_2 - \dot{s}_1) + k(s_2 - s_1) + (k_a \cdot s_2 + F_{ao}) + F_t = 0. \qquad (5.85)$$

În această ecuație F_{ao} este forța de prestrângere a arcului de menținere a contactului, care se înregistrează la $s_2 = 0$, iar F_t este forța tehnologică, având caracter rezistent. Se face notația

$$\begin{cases} y = s_2 - s_1, \\ \dot{y} = \dot{s}_2 - \dot{s}_1, \\ \ddot{y} = \ddot{s}_2 - \ddot{s}_1, \end{cases} \tag{5.86}$$

în care y reprezintă deformația elastică a tachetului. În aceste condiții, ecuația (5.85) devine

$$m \cdot \ddot{y} + c \cdot \dot{y} + (k + k_a) y = -m \cdot \ddot{s}_1 - k_a \cdot s_1 - F_t - F_{ao} . \tag{5.87}$$

Membrul din dreapta reprezintă perturbația sistemului, are dimensiuni de forță şi depinde de unghiul de rotație al camei $\varphi = \omega \cdot t$. Notând

$$F(\omega t) = -m \cdot \ddot{s}_1 - k_a \cdot s_1 - F_t - F_{ao} \tag{5.88}$$

se obține ecuația diferențială

$$m \cdot \ddot{y} + c \cdot \dot{y} + (k + k_a) y = F(\omega t) \tag{5.89}$$

care se integrează, prin metode numerice, pentru a obține funcția $y(t)$. Se poate folosi, în acest sens, procedeul prezentat în par.5.2.2.2, fundamentat pe dezvoltarea funcției $F(\omega t)$ în serie Fourier, urmată de aplicarea principiului suprapunerii efectelor generate de fiecare armonică.

Cunoscând funcția $y(\varphi)$, se determină funcția $s_2(\varphi)$ pe baza relațiilor (5.86). Funcțiile $y(\varphi) = y(\omega t)$ şi $s_2(\varphi) = s_2(\omega t)$ constituie răspunsul dinamic al sistemului, iar interpretarea lor permite formularea unor concluzii cu privire la calitatea funcționării mecanismului.

5.2.3.2. Coeficientul dinamic

Funcția $s_1(\omega t)$, care intervine în expresia forței $F(\omega t)$ (5.88), are o influență directă asupra caracterului vibrațiilor masei m şi este denumită **excitație cinematică**. Această influență se apreciază prin coeficientul dinamic, K_d care se defineşte ca raportul dintre modulele maxime ale accelerației când tachetul se consideră elastic şi când se consideră rigid,

$$K_d = \frac{|\ddot{s}_{2\ max}|}{|\ddot{s}_{1\ max}|} . \tag{5.90}$$

Cu cât K_d este mai mare, cu atât supraîncărcarea cauzată de vibrații este mai importantă. Desigur, valoarea coeficientului dinamic depinde de legea de mişcare $s_1(\varphi)$. În continuare se prezintă determinarea coeficientului dinamic pentru două legi de mişcare uzuale.

▪ Legea de mişcare cu accelerație cosinusoidală

Determinarea coeficientului dinamic se face în ipoteza unei încărcări pur inerțiale ($F_t = 0$) şi în absența arcului de menținere a contactului.

În această ipoteză, ecuația (5.87) capătă forma

$$m \cdot \ddot{y} + k \cdot y = -m \cdot \ddot{s}_1$$

sau

$$\ddot{y} + p^2 \cdot y = -\ddot{s}_1 \tag{5.91}$$

în care $p = \sqrt{\frac{k}{m}}$ etse pulsația proprie a sistemului.

În cazul acestei legi de mişcare (par.3.2.3.1), ecuația spațiului este

$$s_1 = \frac{h}{2}\left(1 - \cos\frac{\pi}{\varphi_f}\varphi\right). \tag{5.92}$$

Unghiul de rotație al camei, φ şi unghiul de fază φ_f se exprimă în funcție de timp, t, de perioada unei faze, t_f şi de viteza unghiulară a camei, ω,

$$\varphi = \omega \cdot t,\ \varphi_f = \omega \cdot t_f .$$

Înlocuind aceste expresii în formula (5.92) şi notând $\frac{\pi}{t_f} = \omega_f$, se obține

$$s_1 = \frac{h}{2}\left(1 - \cos\ \omega_f t\right) \tag{5.93}$$

$$\ddot{s}_1 = \frac{h\omega_f^2}{2} \cdot \cos\ \omega_f t , \tag{5.94}$$

iar ecuația (5.91) devine

$$\ddot{y} + p^2 \cdot y = -\frac{h\omega_f^2}{2} \cdot \cos\ \omega_f t \tag{5.95}$$

Acestă ecuație diferențială este specifică vibrațiilor cu excitație armonică de pulsație ω_f şi are următoarea soluție [19, 42]

$$y = \frac{h\omega_f^2}{2(p^2 - \omega_f^2)}(\cos\ pt - \cos\ \omega_f t) . \tag{5.96}$$

Cunoscând funcția $y(t)$, se determină $s_2(t)$ şi $\ddot{s}_2(t)$,

$$s_2(t) = s_1(t) + y(t)$$

$$s_2(t) = \frac{h}{2}\left(1 + \frac{\omega_f^2}{p^2 - \omega_f^2}\cos\ pt - \frac{p^2}{p^2 - \omega_f^2}\cos\ \omega_f t\right) \tag{5.97}$$

$$\ddot{s}_2(t) = \frac{h \cdot p^2 \cdot \omega_f^2}{2(p^2 - \omega_f^2)}(\cos\ \omega_f t - \cos\ pt). \tag{5.98}$$

Se introduce notația

$$n_f = \frac{p}{\omega_f} = \frac{2\pi / t_c}{\pi / t_f} = \frac{2t_f}{t_p} \tag{5.99}$$

în care t_p este perioada vibrațiior proprii. Aşa cum rezultă din formula (5.99) $n_f / 2$ este numărul de oscilații proprii care se execută pe parcursul unei faze. Cu această notație, ecuațiile (5.97) şi (5.98) devin

$$s_2(t) = \frac{h}{2}\left(1 + \frac{1}{n_f^2 - 1}\cos\ n_f\omega_f t - \frac{n_f^2}{n_f^2 - 1}\cos\ \omega_f t\right) \tag{5.100}$$

$$\ddot{s}_2(t) = \frac{h \cdot n_f^2 \cdot \omega_f^2}{2(n_f^2 - 1)}(\cos\ \omega_f t - \cos\ n_f\omega_f t) \tag{5.101}$$

În Fig.5.27 sunt reprezentate funcțiile $\ddot{s}_1(t)$ şi $\ddot{s}_2(t)$ pentru $n_f = 2$, 4 şi 15. Coeficientul dinamic (5.90), obținut pe baza formulelor (5.94) şi (5.101), are expresia

$$K_d = \frac{n_f^2}{n_f^2 - 1}\left|\ \cos\ \omega_f t - \cos\ n_f\omega_f t\right|_{max} \tag{5.102}$$

De regulă, la mecanismele cu came, $n_f > 1$ şi creşte odată cu creşterea rigidității tachetului. În cazul acestei legi de mişcare, coeficientul dinamic tinde la valoarea $K_d = 2$, când n_f tinde la infinit. Acest lucru se observă din diagrama $K_d(n_f)$ (Fig.5.28) trasată pentru valori întregi ale variabilei n_f. Din aceeaşi diagramă rezultă că mărimea lui K_d se apropie rapid de valoarea 2, astfel încât, pentru a aprecia legea de mişcare, se poate considera $K_d = 2$.

Valoarea limită $K_d = 2$ se înregistrează la toate legile de mişcare cu dicontinuități la accelerații fără schimbare de semn, cum este, de exemplu, legea de mişcare polinomială 2 – 3 (par.3.3.3.2). În cazul legii de mişcare cu accelerație constantă (par.3.3.3.1) se produc discontinuități cu schimbarea semnului accelerației, iar K_d tinde la valoarea $K_d = 3$.

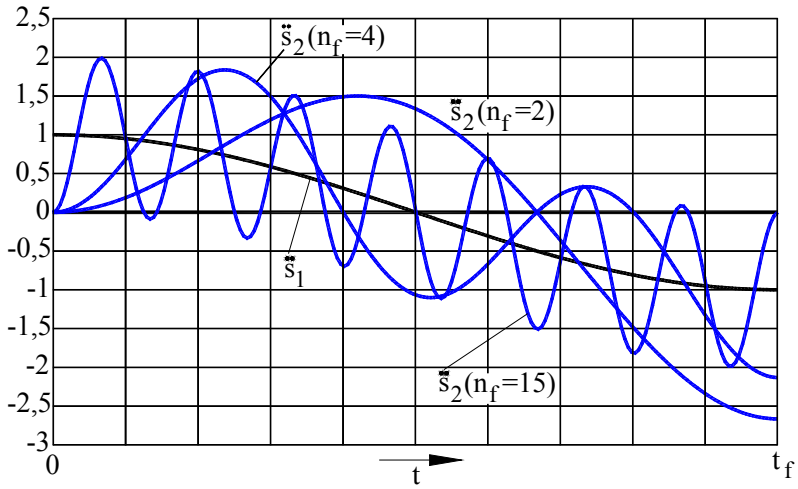


Fig. 5.27

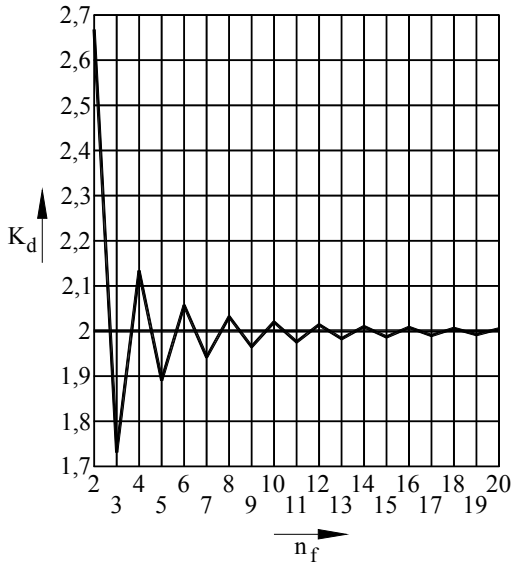


Fig. 5.28

- **Legea de mişcare cu accelerație sinusoidală**

Ecuația spațiului

$$s_1 = \frac{h}{2\pi}\left(\frac{2\pi}{\varphi_f}\varphi - \sin\frac{2\pi}{\varphi_f}\varphi\right)$$

se scrie sub forma

$$s_1 = \frac{h}{2\pi}(\omega_f t - \sin\ \omega_f t), \tag{5.103}$$

în care $\omega_f = 2\pi / t_f$. Prin derivare, în raport cu timpul, se obține ecuația accelerației

$$\ddot{s}_1 = \frac{h\omega_f^2}{2\pi}\sin\ \omega_f t. \tag{5.104}$$

Înlocuind această expresie în (5.91), rezultă ecuația de mişcare

$$\ddot{y} + p^2 y = -\frac{h\omega_f^2}{2\pi}\sin\ \omega_f t, \tag{5.105}$$

care are soluția

$$y = \frac{h\omega_f^2}{2\pi p(p^2 - \omega_f^2)}(\omega_f \sin\ pt - p\sin\ \omega_f t). \tag{5.106}$$

Trecând la variabila s_2 (5.86) şi utilizând notația $n_f = p/\omega_f = t_f / t_p$, se obțin funcțiile $s_2(t)$ şi $\ddot{s}_2(t)$,

$$s_2(t) = \frac{h}{2\pi}\left[\omega_f t + \frac{1}{n_f(n_f^2 - 1)}\sin\ n_f\omega_f t - \frac{n_f^2}{n_f^2 - 1}\sin\ \omega_f t\right] \tag{5.107}$$

$$\ddot{s}_2(t) = \frac{h\omega_f^2 n_f}{2\pi(n_f^2 - 1)}[n_f \sin\ \omega_f t - \sin\ n_f\omega_f t]. \tag{5.108}$$

Precizăm că, în acest caz, n_f reprezintă numărul de oscilații proprii înregistrate pe parcursul unei faze. În Fig.5.29 sunt reprezentate funcțiile $\ddot{s}_1(t)$ şi $\ddot{s}_2(t)$ pentru $n_f = 2$, 4 şi 15. Coeficientul dinamic se determină cu formula

$$K_d = \frac{n_f}{n_f^2 - 1}\left| n_f \sin\ \omega_f t - \sin\ n_f\omega_f t\right|_{max}, \tag{5.109}$$

iar valoarea sa tinde la $K_d = 1$ odată cu creşterea rigidității tachetului şi, implicit, a parametrului n_f. Diagrama $K_d(n_f)$, trasată pentru valori întregi ale

lui n_f (Fig.5.30), confirmă acestă evoluție. Valoarea $K_d = 1$ se inregistrează la toate legile de mişcare fără discontinuităţi la accelerații, cum este, de exemplu, legea de mişcare polinomială 3 – 4 – 5 (par.3.3.3.2).

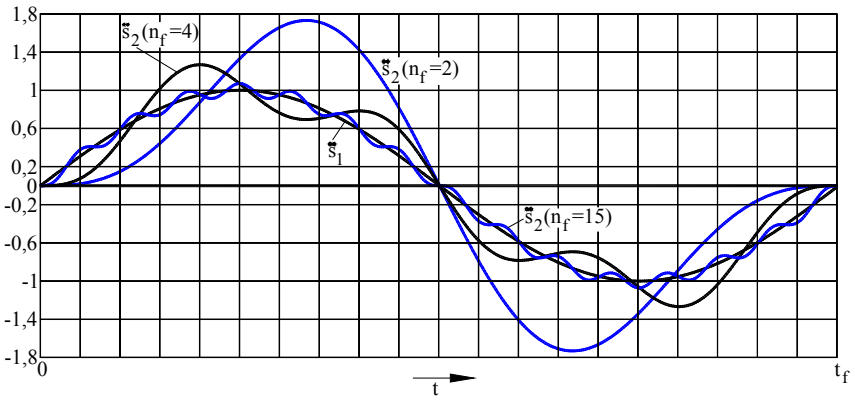


Fig. 5.29

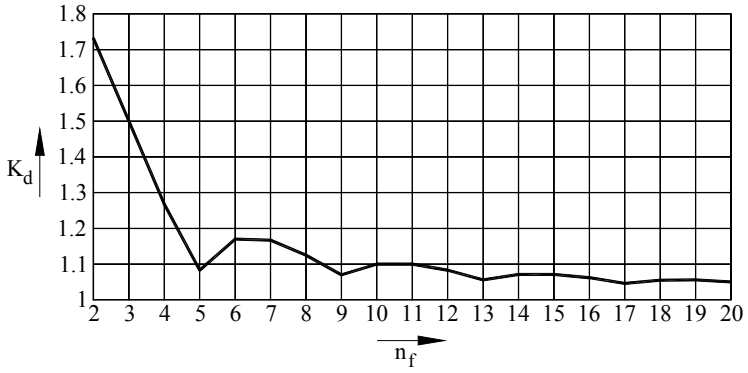


Fig. 5.30

5.2.3.3. Sinteza legii de mişcare

Influența negativă a deformațiilor elastice asupra funcționării mecanismelor cu came poate fi atenuată dacă adoptarea legii de mişcare se face luând în considerare aceste deformații. Acestă cerință se impune, în special, la mecanismele care au un regim de funcționare cu viteze şi încărcări mari.

Din ecuația de mişcare (5.85), scrisă în ipoteza absenței amortizării şi a arcului de menținere a contactului, se deduce

$$s_1 = \frac{F_t}{k} + s_2 + \frac{m}{k}\ddot{s}_2 .$$

Având în vedere relația

$$\ddot{s}_2 = \frac{d^2 s_2}{d\varphi^2}\omega^2 = s_2''\omega^2 ,$$

ecuația devine

$$s_1 = \frac{F_2}{k} + s_2 + \frac{m \cdot \omega^2}{k} s_2'' \tag{5.110}$$

În această ecuație $F_2 / k = \delta_s$ reprezintă deformația statică, iar $m\omega^2 / k = c_d$ se numeşte constantă dinamică, astfel încât ecuația (5.110) se scrie

$$s_1 = \delta_s + s_2 + c_d s_2'' \tag{5.111}$$

Prin derivare succesivă, în raport cu variabila φ, se obține

$$\begin{aligned} s'_1 &= s'_2 + c_d s_2''' \\ s''_1 &= s_2'' + c_d s_2^{iv} \end{aligned} \tag{5.112}$$

Aşa cum am arătat (par.3.3.2) funcționarea este favorabilă (fără şocuri) dacă funcțiile $s'_1(\varphi)$ şi $s''_1(\varphi)$ sunt continui. Această condiție implică asigurarea continuității şi pentru funcțiile $s'_2(\varphi)$, $s''_2(\varphi)$, $s'''_2(\varphi)$ şi $s_2^{iv}(\varphi)$. Ca urmare, pentru o fază de ridicare, amplasată între două faze de staționare, trebuie să fie îndeplinite condițiile

$$\begin{aligned} &\varphi = 0, \quad s_2 = s'_2 = s''_2 = s'''_2 = s_2^{iv} = 0 \quad \Rightarrow s_1 = \delta_s,\ s'_1 = s''_1 = 0 \\ &\varphi = \varphi_1,\ s_2 = h,\ s'_2 = s''_2 = s'''_2 = s_2^{iv} = 0 \Rightarrow s_1 = \delta_s + h,\ s'_1 = s''_1 = 0 \end{aligned} \tag{5.113}$$

Luând în considerare aceste aspecte, procesul de sinteză a legii de mişcare $s_1(\varphi)$ se desfăşoară în două etape.

1) Se adoptă legea de mişcare $s_2(\varphi)$ care să îndeplinească condițiile (5.113). De obicei se apelează la legile de mişcare polinomiale care permit să se impună un număr nelimitat de condiții. Astfel, legea de mişcare polinomială 5 – 6 – 7 – 8 – 9 asigură continuitatea până la derivata de ordin patru şi, deci, îndeplineşte condițiile (5.113), iar ecuația spațiului are forma

$$s_2 = h\left(126\left(\frac{\varphi}{\varphi_1}\right)^5 - 420\left(\frac{\varphi}{\varphi_1}\right)^6 + 540\left(\frac{\varphi}{\varphi_1}\right)^7 - 315\left(\frac{\varphi}{\varphi_1}\right)^8 + 70\left(\frac{\varphi}{\varphi_1}\right)^9\right) \tag{5.114}$$

2) Se determină funcția $s_1(\varphi)$ aplicând relația (5.111), iar cu ajutorul acestei funcții se trasează profilul camei. Poziția de lansare a tachetului ($\varphi = 0,\ s_1 = \delta_s$) se obține cu ajutorul unui profil preliminar care preia deformația statică δ_s. Dacă este necesar, la aceasta se adaugă jocul din cuplele cinematice, în special atunci când între tachet şi elementul de execuție se interpune un lanț cinematic. Acest profil pune în mişcare punctul A (Fig.5.26) fără ca punctul B să se deplaseze. Mecanismele cu came, proiectate după acest procedeu, realizează o deplasare precisă a elementului de execuție şi funcționează într-un regim de vibrații foarte atenuat. Pentru aceasta viteza camei trebuie să aibă abateri mici în raport cu valoarea luată în calcul, iar precizia de execuție trebuie să fie ridicată.

5.3. ECHILIBRAREA FORȚELOR DE INERȚIE

Forțele de inerție, generate ca urmare a mişcării elementelor, au o influență negativă asupra funcționării maşinilor. Aceste forțe intervin în cadrul echilibrului cinetostatic, conform principiului lui d'Alambert, împreună cu forțele aplicate şi cu forțele de legătură. Ca urmare, în cuplele cinematice apar componente ale reacțiunilor cauzate, în exclusivitate, de forțele de inerție, numite reacțiuni dinamice. Aceste reacțiuni provoacă solicitări suplimentare, majorează forțele de frecare şi intensifică uzura suprafețelor care formează cuplele cinematice. Sistemul forțelor de inerție este variabil ca mărime şi direcție, având un caracter ciclic. Oscilațiile acestor forțe generează vibrații care diminuează calitatea procesului tehnologic şi reduc siguranța în exploatare. Forțele de inerție sunt proporționale cu pătratul vitezei unghiulare a elementului conducător. Prin urmare, efectele negative semnalate sunt cu atât mai pronunțate cu cât viteza de funcționare este mai mare. Datorită majorării continue a vitezelor de funcționare, în vederea creşterii productivității, preocuparea pentru reducerea consecințelor provocate de forțele de inerție constitue o problemă de mare importanță.

Operația prin care componentele torsorului rezultant al forțelor de inerție se anulează sau se micşorează, ca rezultat al repartizării judicioase a maselor, se numeşte **echilibrare**. Denumirea se explică prin aceea că forțele de inerție corespunzătoare diverselor mase se echilibrează reciproc, astfel încât, torsorul rezultant să fie nul. Echilibrarea prin care se anulează numai forța de inerție rezultantă se numeşte **echilibrare statică**. Dacă se anulează atât forța de inerție cât şi momentul forțelor de inerție, **echilibrarea** este **dinamică**.

5.3.1. Echilibrarea rotoarelor

5.3.1.1. Condițiile de echilibrare

Prin **rotor** se înțelege un element cu mişcare de rotație în jurul unei axe fixe.

Se consideră un rotor şi un sistem de coordonate solidar cu el Oxyz, cu axa Oz suprapusă peste axa de rotație (Fig.5.31). Torsorul forțelor de inerție, redus în O, are componentele

$$\begin{cases} \overline{F}_i = -m \cdot \overline{a}_G \\ \overline{M}_i = (J_{xz}\varepsilon - J_{yz}\omega^2)\overline{i} + (J_{yz}\varepsilon + J_{xz}\omega^2)\overline{j} - J_z\varepsilon\overline{k} \end{cases} \tag{5.115}$$

în care m este masa elementului, a_G este accelerația centrului de masă, ω şi ε - viteza şi accelerația unghiulară, iar J_{xz}, J_{yz} şi J_z sunt momentele de inerție raportate la axele sistemului de coordonate. Condiția echilibrării statice este $\overline{F}_i = 0$, ceea ce conduce la $\overline{a}_G = 0$, deci centrul de masă G trebuie să se afle pe axa de rotație care, în acest caz, este axă centrală de inerție.

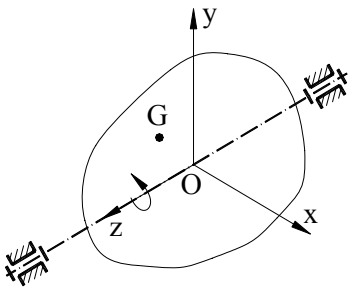


Fig. 5.31

Condiția de echilibrare statică ($\overline{F}_i = 0$): axa de rotație trebuie să fie axă centrală de inerție.

Pentru anularea momentului $\overline{M}_i$ trebuie anulate proiecțiile sale pe axele de coordonate. Proiecția $M_{iz} = -J_z\varepsilon$ se poate anula numai dacă $\varepsilon = 0$, deoarece $J_z \neq 0$. Această condiție nu depinde, însă, de distribuția masei rotorului. De altfel componenta $\overline{M}_z = -J_z\varepsilon\overline{k}$ nu provoacă reacțiuni dinamice în lagărele rotorului, iar anularea sau reducerea ei nu constituie obiectul echilibrării. În aceste condiții echilibrarea momentului $\overline{M}_i$ se reduce la anularea proiecțiilor sale pe axele Ox şi Oy,

$$\begin{aligned} M_{ix} &= J_{xz}\varepsilon - J_{yz}\omega^2 = 0 \\ M_{iy} &= J_{yz}\varepsilon + J_{xz}\omega^2 = 0 \end{aligned} \tag{5.116}$$

În ipoteza $\omega \neq 0$, soluțiile sistemului (5.116) sunt $J_{xz} = 0$ şi $J_{yz} = 0$, ceea ce înseamnă că axa de rotație este axă principală de inerție.

Condiția de echilibrare dinamică ($\overline{F}_i = 0$, $\overline{M}_i = 0$): axa de rotație trebuie să fie axă principală, centrală de inerție.

Observație

Dacă axa de rotație nu este axă centrală de inerție, iar condițiile $J_{xz} = 0$ şi $J_{yz} = 0$ sunt îndeplinite pentru un punct de reducere aparținând axei de rotație, ele nu sunt îndeplinite şi pentru celelalte puncte ale axei de rotație. Prin urmare, numai în punctul respectiv, sistemul forțelor de inerție se reduce la o forță de inerție rezultantă. Dacă axa de rotație este axă centrală de inerție, iar condițiile $J_{xz} = 0$ şi $J_{yz} = 0$ sunt îndeplinite într-un punct al axei de rotație, ele sunt îndeplinite în toate punctele, astfel încât $\overline{F}_i = 0$ şi $\overline{M}_i = 0$.

*

În vederea proiectării unor rotori echilibrați este util să se cunoască unele cazuri în care anumite axe ale corpurilor sunt axe principale sau axe principale centrale de inerție.

• Dacă un corp are o axă de simetrie în repartiția masei, această axă este axă principală centrală de inerție.

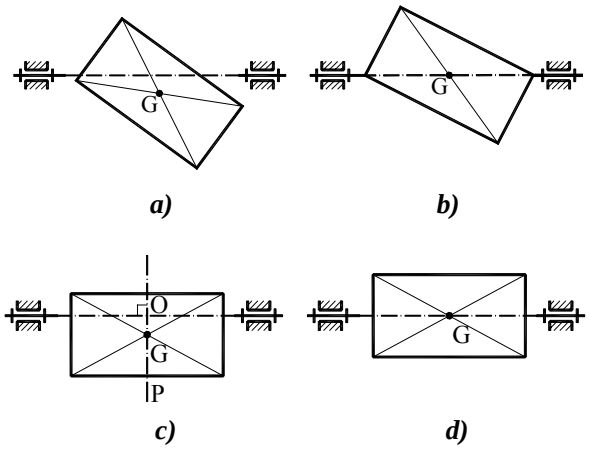


Fig. 5.32

a) *Rotor neechilibrat,* $\overline{F}_i \neq 0, \overline{M}_i \neq 0$; ***b)*** *Rotor echilibrat static,* $\overline{F}_i = 0, \overline{M}_i \neq 0$; ***c)*** *Rotor neechilibrat. Deoarece planul P este plan de simetrie, axa de rotație, perpendiculară pe planul P, este axă principală numai în raport cu punctul O, în care* $\overline{F}_i \neq 0, \overline{M}_i = 0$. *În orice alt punct al axei de rotație,* $\overline{F}_i \neq 0, \overline{M}_i \neq 0$; ***d)*** *Rotor echilibrat dinamic,* $\overline{F}_i = 0, \overline{M}_i = 0$, *deoarece axa de rotație este axă de simetrie*

• Dacă un corp prezintă simetrie de revoluție în repartiția masei, axa de rotație este axă principală centrală de inerție, iar orice dreaptă perpendiculară pe axa de simetrie este axă principală de inerție.

• Dacă un corp are un plan de simetrie în repartiția masei, orice axă perpendiculară pe planul de simetrie este axă principală pentru punctul situat în planul de simetrie. Centrul de masă este situat, de asemenea, în planul de simetrie. Prin urmare, axa care trece prin centrul de masă şi este perpendiculară pe planul de simetrie este axă principală centrală de inerție.

Pentru a ilustra cele arătate, se consideră un rotor de forma unei plăci dreptunghiulare omogene care se roteşte în jurul unei axe situate în planul său (Fig.5.32). În funcție de poziția axei de rotație, pot interveni patru cazuri privind echilibrarea unui astfel de rotor, arătate în Fig.5.32.

5.3.1.2. Reducerea forțelor de inerție în două plane. Echilibrarea experimentală

Sistemul forțelor de inerție generate de un rotor se poate reduce la două forțe de inerție, dezvoltate de două mase concentrate, situate în două plane arbitrare perpendiculare pe axa de rotație. Pentru a demonstra acest principiu se consideră un rotor şi un sistem de axe de coordonate Oxyz, având axa Oz suprapusă peste axa de rotație (Fig.5.33). Se consideră, de asemenea,

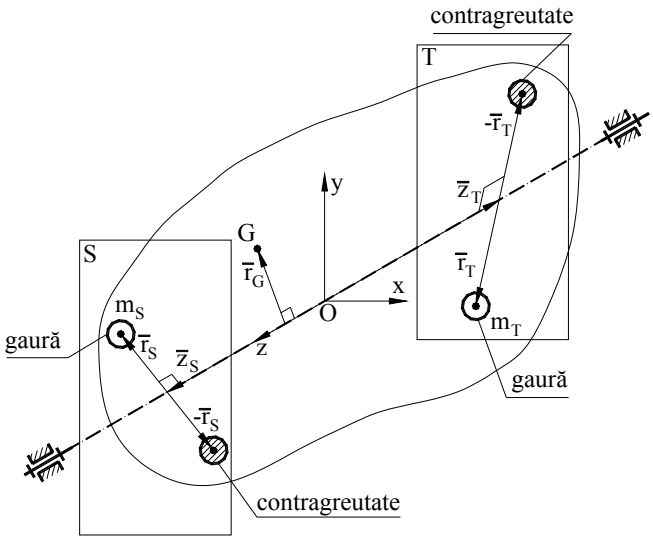


Fig. 5.33

două plane perpendiculare pe axa de rotație, notate S şi T, în care se adoptă două mase concentrate $m_s(x_s,\ y_s,\ z_s)$ şi $m_t(x_t,\ y_t,\ z_t)$, care generează forțele de inerție $\overline{F}_{is}$ şi $\overline{F}_{it}$. Se scrie condiția de echivalență între sistemul forțelor de inerție ale rotorului, redus în O, $(\overline{F}_i, \overline{M}_i)$ şi sistemul $(\overline{F}_{is},\ \overline{F}_{it})$,

$$\begin{aligned} &\overline{F}_{is} + \overline{F}_{it} = \overline{F}_i \\ &\overline{z}_s \times \overline{F}_{is} + \overline{z}_t \times \overline{F}_{it} = \overline{M}_i \end{aligned} \tag{5.117}$$

În ipoteza $\omega = ct,\ \varepsilon = 0$, vectorii $\overline{F}_i,\ \overline{M}_i,\ \overline{F}_{is}$ şi $\overline{F}_{it}$ au expresiile

$$\begin{aligned} &\overline{F}_i = -m \cdot \overline{a}_G = m \cdot \overline{r}_G \cdot \omega^2 \\ &\overline{M}_i = -J_{yz} \cdot \omega^2 \cdot \overline{i} + J_{xz} \cdot \omega^2 \cdot \overline{j} \\ &\overline{F}_{is} = -m \cdot \overline{a}_s = m \cdot \overline{r}_s \cdot \omega^2 \\ &\overline{F}_{it} = -m \cdot \overline{a}_t = m \cdot \overline{r}_t \cdot \omega^2 \end{aligned}$$

în care $\overline{r}_G$ este vectorul de poziție al centrului de masă G în planul său de rotație, iar $\overline{r}_s$ şi $\overline{r}_t$ sunt vectorii de poziție ai maselor concentrate, în planele S şi T. Introducând aceste expresii în relațiile (5.117) şi simplificând prin ω^2 se obțin ecuațiile

$$\begin{cases} m_s\overline{r}_s + m_t\overline{r}_t = m\overline{r}_G \\ \overline{z}_s \times m_s\overline{r}_s + \overline{z}_t \times m_t\overline{r}_t = -J_{yz}\overline{i} + J_{xz}\overline{j} \end{cases} \tag{5.118}$$

Vectorii $\overline{u}_s = m_s\overline{r}_s$ şi $\overline{u}_t = m_t\overline{r}_t$, care sunt necunoscutele sistemului (5.118), se numesc **vectorii dezechilibrului** raportați la planele S şi T. Pentru determinarea lor, ecuațiile (5.118) se proiectează pe axele de coordonate, obținând un sistem scalar în necunoscutele $u_{sx},\ u_{sy},\ u_{tx},\ u_{ty}$,

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & z_s & 0 & z_t \\ z_s & 0 & z_t & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} u_{sx} \\ u_{sy} \\ u_{tx} \\ u_{ty} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} mx_G \\ my_G \\ J_{yz} \\ J_{xz} \end{vmatrix} \tag{5.119}$$

Determinantul sistemului are valoarea

$$D = -(z_s - z_t)^2,$$

iar sistemul este compatibil determinat dacă $D \neq 0$, iar $z_s \neq z_t$. Prin urmare principiul reducerii forțelor de inerție în două plane distincte este demonstrat.

În cazul rotoarelor cu dimensiuni reduse pe direcția axei de rotație (discuri, plăci), se poate considera, prin aproximație, că masa rotorului este repartizată într-un singur plan. În acest caz axa de rotație este axă principală de

inerție pentru punctul O de intersecție cu planul rotorului deoarece $J_{xz} = 0$ şi $J_{yz} = 0$ ($z = 0$ pentru toate punctele rotorului)(Fig.5.34). Ca urmare $\overline{M}_i = 0$, iar sistemul forțelor de inerție se reduce, în punctul O, la o rezultantă unică. Este evident atunci că rotorul se poate înlocui, din punctul de vedere al forțelor de inerție, cu o masă concentrată situată în planul său (S), conform ecuației de echivalență

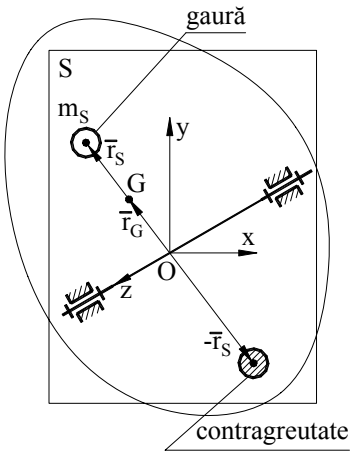


Fig. 5.34

$$\overline{F}_{is} = \overline{F}_i,$$

din care rezultă vectorul dezechilibrului

$$\overline{u}_s = m_s \overline{r}_s = m\overline{r}_G \qquad (5.120)$$

*

Cu toate că, în faza de proiectare, rotoarele se concep echilibrate, după prelucrare se constată, de multe ori, dezechilibrări. Fenomenul este cauzat de erorile de prelucrare şi de montare precum şi de caracterul neomogen al materialului, mai ales în cazul pieselor turnate. Pentru a elimina aceste dezechilibrări, în cadrul procesului tehnologic, se prevede operația de echilibrare experimentală. Se pot da numeroase exemple de rotoare pentru care se execută aceste operații: arborii cotiți, arborii principali ai maşinilor unelte, rotoarele de turbine, rotoarele de motoare şi generatoare electrice, ventilatoarele, tamburii de cardă, etc. Echilibrarea experimentală se efectuează modificând distribuția masei rotorului, fie prin eliminarea de material, fie prin adăugarea unor piese suplimentare numite **contragreutăți**. Se consideră, în acest scop, două plane perpendiculare pe axa de rotație, numite plane de corecție, notate, ca înainte, S şi T. În cadrul operației de echilibrare experimentală, vectorii dezechilibrului $\overline{u}_s$ şi $\overline{u}_t$ se determină cu ajutorul maşinilor de echilibrat sau a echipamentelor mobile de echilibrat în situ (pe lagărele proprii) prin măsurarea caracteristicilor vibrațiilor, care reprezintă consecința stării de dezechilibru. Având în vedere că $\overline{u}_s = m_s \overline{r}_s$ şi $\overline{u}_t = m_t \overline{r}_t$, parametrii m_s, r_s, m_t, r_t se pot alege convenabil. De regulă r_s şi r_t se adoptă, iar masele m_s şi m_t se calculează,

$$m_s = \frac{u_s}{r_s},\ m_t = \frac{u_t}{r_t}.$$

Cunoscând pozițiile (z_s, $\overline{r}_s$, z_t, $\overline{r}_t$) şi valorile maselor (m_s, m_t) care provoacă dezechilibrul în cele două plane, se poate efectua operația de

echilibrare. Dacă se adoptă metoda îndepărtării de material, se execută două găuri, în pozițiile indicate $(z_s, \overline{r}_s;\ z_t, \overline{r}_t)$ astfel încât să se elimine cantitățile de material având masele m_s şi m_t. În felul acesta, sistemul forțelor $(\overline{F}_{is}, \overline{F}_{it})$, generate de aceste mase, dispare, iar componentele torsorului rezultant al forțelor de inerție devin nule.

Dacă se adoptă metoda adăugării de material se montează două contragreutăți de mase m_s şi m_t şi de dimensiuni neglijabile, în două puncte de coordonate $(z_s, -\overline{r}_s)$ şi $(z_t, -\overline{r}_t)$. Contragreutățile generează două forțe de inerție $(-\overline{F}_{is},\ -\overline{F}_{it})$ care anihilează sistemul $(\overline{F}_{is},\ \overline{F}_{it})$ echivalent cu torsorul $(\overline{F}_i,\ \overline{M}_i)$.

În cazul rotoarelor în formă de discuri sau plăci care se rotesc în jurul unor axe perpendiculare pe planul lor, se poate adopta un singur plan de corecție care coincide cu planul rotorului.

Echilibrarea practică, executată cu ajutorul maşinilor de echilibrat, se execută cu un grad de aproximație. După echilibrare rotorul rămâne cu un **dezechilibru rezidual**, raportat la planele de corecție sau la planele lagărelor. Echilibrarea este satisfăcătoare dacă dezechilibrul rezidual specific (raportul dintre dezechilibru şi masa rotorului) este mai mic decât o valoare admisibilă. Aceasta din urmă este indicată în STAS 10729-76, R85 în funcție de gradul de calitate de echilibrare care, la rândul său, depinde de destinația rotorului.

*

Menționăm că prezentarea anterioară se referă la echilibrarea **rotoarelor rigide**, adică acelea care nu prezintă deformații de încovoiere importante determinate de forțele de inerție centrifugale. Conform standardului internațional SR ISO 1925, definiția rotorului rigid este: ″rotorul al cărui dezechilibru poate fi corectat în două plane arbitrare; după corectare, dezechilibru rezidual nu se schimbă în mod semnificativ pentru toate vitezele până la viteza de funcționare″. Rotoarele care nu corespund acestei definiții se numesc flexibile (elastice), iar pentru echilibrarea lor, trebuie să se ia în considerare modificarea distribuției masei cauzată de deformațiile elastice. În acest caz adoptarea planelor de corecție (în număr de două sau mai multe) nu este arbitrară, ci se stabileşte, în aşa fel, încât solicitarea rotorului să fie cât mai redusă.

5.3.2. Echilibrarea mecanismelor

5.3.2.1. Condițiile de echilibrare

Un mecanism se consideră echilibrat dacă torsorul rezultant al forțelor de inerție, corespunzătoare sistemului format din elementele mobile, este nul. În felul acesta, reacțiunile dinamice (cauzate de forțele de inerție) din cuplele cinematice formate de elementul fix cu elementele mobile, sunt, de asemenea, nule.

Se consideră un element, k, în mişcare plan paralelă, aparținând unui mecanism plan (Fig.5.35) şi un sistem de axe de coordonate $G_k x_k y_k z_k$, solidar cu elementul, având originea în centrul de masă (G_k) şi axa Gz_k orientată perpendicular pe planul mişcării. Torsorul forțelor de inerție, aferent elementului k, redus în centrul de masă G_k este

$$\begin{aligned} \overline{F}_{ik} &= -m_k \overline{a}_{G_k} \\ \overline{M}_{ik} &= (J^k_{xz}\varepsilon_k - J^k_{yz}\omega_k^2)\overline{i}_k + (J^k_{yz}\varepsilon_k + J^k_{xz}\omega_k^2)\overline{j}_k - J^k_z\varepsilon_k\overline{k}_k \end{aligned} \tag{5.121}$$

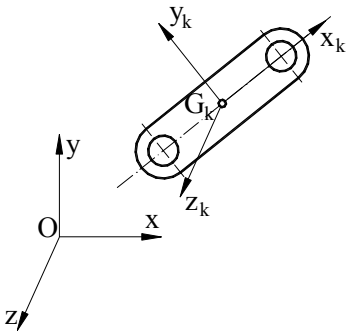


Fig. 5.35

în care $\overline{a}_{G_k}$, $\overline{\omega}_k$ şi ε_k sunt accelerația centrului de masă, viteza şi accelerația unghiulară, m_k este masa elementului, iar J^k_{xz}, J^k_{yz} şi J^k_z sunt momentele de inerție ale elementului raportate la sistemul de coordonate.

Se consideră, în continuare, un sistem de coordonate fix Oxyz cu axa Oz perpendiculară pe planul mişcării mecanismului. Torsorul forțelor de inerție, pentru sistemul format din toate elementele mobile, în număr de $n-1$, redus în punctul O, este

$$\overline{F}_{im} = \sum_1^{n-1} \overline{F}_{ik} = -m_m \overline{a}_{G_m} \tag{5.122}$$

$$\overline{M}_{im} = \sum_1^{n-1} \overline{M}_{ik} + \sum_1^{n-1} \overline{M}_O(\overline{F}_{ik}) \tag{5.123}$$

În formula (5.122), m_m este masa elementelor mobile obținută prin însumare

$$m_m = \sum_1^{n-1} m_k \ , \tag{5.124}$$

iar $\overline{a}_{G_m}$ este accelerația centrului de masă G_m al sistemului format din elementele mobile. Poziția punctului G_m se determină ca în cazul în care elementele sunt legate rigid în poziția considerată,

$$\overline{r}_{G_m} = \frac{\sum_1^{n-1} m_k \overline{r}_k}{\sum_1^{n-1} m_k} = \frac{\sum_1^{n-1} m_k \overline{r}_k}{m_m} \ , \tag{5.125}$$

în care $\overline{r}_{G_m}$ şi $\overline{r}_k$ sunt vectorii de poziție ai punctelor G_m şi G_k în raport cu punctul O.

Echilibrarea statică a mecanismului, adică anularea forței de inerție $\overline{F}_{im}$, se obține dacă $\overline{a}_{G_m} = 0$. Aşa cum se observă din formula (5.125), centrul de masă G_m are o poziție variabilă deoarece vectorii $\overline{r}_k$ sunt variabili. Punctul G_m descrie, în general, o curbă închisă situată într-un plan paralel cu planul Oxy. Printr-o poziționare corespunzătoare a centrelor de masă G_k, în raport cu fiecare element mobil, se poate ajunge la situația în care vectorul $\overline{r}_{G_m}$ să fie constant pentru întreg ciclul cinematic al mecanismului. În acest caz punctul G_m este fix , iar $\overline{a}_{G_m} = 0$.

Condiția de echilibrare statică a unui mecanism: centrul de masă al sistemului format din elementele mobile trebuie să fie fix.

Momentul $\overline{M}_{im}$ devine egal cu zero dacă se anulează cele două componente ale sale,

$$\overline{M}_{im1} = \sum_1^{n-1} \overline{M}_{ik} \, , \ \overline{M}_{im2} = \sum_1^{n-1} \overline{M}_O(\overline{F}_{ik}) \tag{5.126}$$

în care $\overline{M}_O(\overline{F}_{ik})$ este momentul forței $\overline{F}_{ik}$ în raport cu punctul O. Având în vedere formula (5.121) momentul $\overline{M}_{im1}$ se poate scrie

$$\overline{M}_{im1} = \sum_1^{n-1} \left((J_{xz}^k \varepsilon_k - J_{yz}^k \omega_k^2) \overline{i}_k + (J_{yz}^k \varepsilon_k + J_{xz}^k \omega_k^2) \overline{j}_k \right) + \sum_1^{n-1} \left(-J_z^k \varepsilon_k \overline{k}_k \right) \tag{5.127}$$

Proiecția momentului $\overline{M}_{im1}$ pe axa $Oz \| G_k z_k$ nu se poate anula deoarece $J_z^k \neq 0$, iar accelerațiile unghiulare ε_k nu pot fi constant nule pentru toate elementele. Aceste accelerații pot fi egale cu zero numai în cazul elementelor în mişcare de translație sau pentru anumite poziții discrete ale

mecanismului, în cazul celorlalte elemente. În consecință, anularea acestei proiecții nu se poate înscrie ca un obiectiv al operației de echilibrare.

Proiecțiile momentului $\overline{M}_{im1}$ pe planul $Oxy \parallel G_k x_k z_k$ se anulează dacă

$$J_{xz}^k = 0 \text{ şi } J_{yz}^k = 0 \quad (k = 1,\ n-1). \tag{5.128}$$

Cea mai simplă soluție constructivă, pentru a satisface aceste condiții, este de a proiecta elementele astfel încât să aibă un plan de simetrie paralel cu planul de mişcare. Această măsură nu este necesară în cazul elementelor cu mişcare de translație ($\omega_k = 0,\ \varepsilon_k = 0$) care au, oricum, proiecțiile momentului $\overline{M}_{ik}$, pe planul $G_k x_k y_k$, egale cu zero.

Pentru a studia componenta $\overline{M}_{im2}$, se exprimă momentul $\overline{M}_O(\overline{F}_{ik})$ prin proiecțiile sale pe axele reperului Oxyz. Având în vedere că mişcarea este plan paralelă, iar

$$\overline{F}_{ik} = F_{ikx}\,\overline{i} + F_{iky}\,\overline{j},$$

se poate scrie

$$\overline{M}_O(\overline{F}_{ik}) = \overline{r}_{G_k} \times \overline{F}_{ik} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ x_{G_k} & y_{G_k} & z_{G_k} \\ F_{ikx} & F_{iky} & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -z_{G_k} F_{iky}\,\overline{i} + z_{G_k} F_{ikx}\,\overline{j} + (x_{G_k} F_{iky} - y_{G_k} F_{ikx})\overline{k}.$$

Momentul $\overline{M}_{im2}$ se poate scrie, atunci, astfel

$$\overline{M}_{im2} = \sum_1^{n-1} z_{G_k}(-F_{iky}\,\overline{i} + F_{ikx}\,\overline{j}) + \sum_1^{n-1}(x_{G_k} F_{iky} - y_{G_k} F_{ikx})\overline{k} \tag{5.129}$$

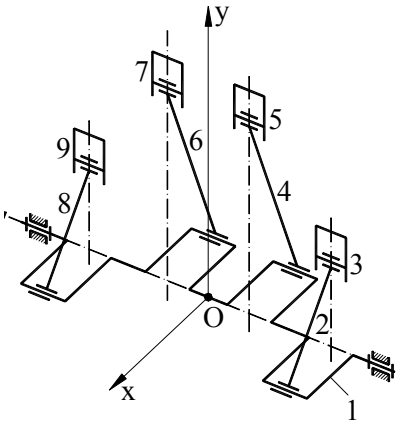


Fig. 5.36

Ca şi în situația precedentă, proiecția momentului $\overline{M}_{im2}$ pe axa Oz nu se poate anula şi nu face obiectul echilibrării. Pentru anularea proiecțiilor din planul Oxy se recomandă proiectarea mecanismului astfel încât să aibă un plan de simetrie, în repartiția maselor, paralel cu planul mişcării. O primă soluție, în acest sens constă în conceperea mecanismului astfel încât centrele de masă să se

deplaseze în acelaşi plan. Dacă punctul O se adoptă în planul centrelor de masă,

$$z_{G_k} = 0 \ \ (k = 1,\ n - 1),$$

ceea ce conduce la anularea proiecţiilor momentului $\overline{M}_{im2}$ pe planul Oxy. O altă soluţie se referă la mecanismele formate din lanţuri cinematice care funcţionează în plane paralele, având un element conducător unic. Un exemplu, în acest sens, este arătat în Fig.5.36 în care este reprezentat un mecanism din construcţia unui motor cu patru cilindri. Se observă că elementele sunt dispuse simetric faţă de planul Oxy. Elementele simetrice au coordonatele z_{G_k} egale şi de semne contrare: $z_{G_2} = -z_{G_8}$, $z_{G_3} = -z_{G_9}$, $z_{G_4} = -z_{G_6}$, $z_{G_5} = -z_{G_7}$, iar $z_{G_1} = 0$. Introducând aceste date în formula (5.123) se ajunge la concluzia că proiecţiile din planul Oxy ale momentului $\overline{M}_{im2}$ sunt egale cu zero.

În concluzie, pentru echilibrarea momentului forţelor de inerţie, se recomandă utilizarea cumulativă a următoarelor soluţii practice.

1) **Fiecare element să aibă un plan de simetrie paralel cu planul mişcării.**

2) **În cazul în care mecanismul este format din mai multe lanţuri cinematice dispuse în plane paralele, elementele trebuie amplasate simetric faţă de un plan paralel cu planul mişcării. Dacă mecanismul are un singur lanţ cinematic, centrele de masă ale elementelor trebuie să se deplaseze în acelaşi plan.**

Menţionăm că respectarea acestor recomandări nu asigură anularea componentei momentului forţelor de inerţie perpendiculară pe planul mişcării.

5.3.2.2. Echilibrarea statică. Metoda punctelor principale

■ Determinarea poziţiei centrului de masă al mecanismului

Condiţia echilibrării statice impune menţinerea centrului de masă al sistemului format din elementele mobile, numit, pentru simplificare, centrul de masă al mecanismului, într-o poziţie fixă. Metoda punctelor principale se bazează pe aplicarea unui procedeu specific de determinare a poziţiei centrului de masă al mecanismului.

Se consideră un mecanism, format dintr-un lanţ simplu închis, cu $n-1$ elemente mobile şi un element fix (Fig.5.37). Se ataşează fiecărui element mobil câte un vector $\overline{\ell}_k$ având punctul de aplicaţie şi extremitatea în articulaţiile elementului k. Orientarea vectorilor $\overline{\ell}_k$ se face, în aşa fel, ca lanţul cinematic să fie parcurs în acelaşi sens. Se consideră, de asemenea, vectorii $\overline{\rho}_k$,

care determină poziția centrului de masă G_k în raport cu originea vectorilor $\overline{\ell}_k$. Poziția centrului de masă al mecanismului se determină cu formula (5.125), în care vectorii de poziție ai centrelor de masă $\overline{r}_k$, raportați la punctul A, se pot scrie sub forma

$$\overline{r}_k = \overline{\ell}_1 + \overline{\ell}_2 + \ldots + \overline{\ell}_{k-1} + \overline{\rho}_k$$

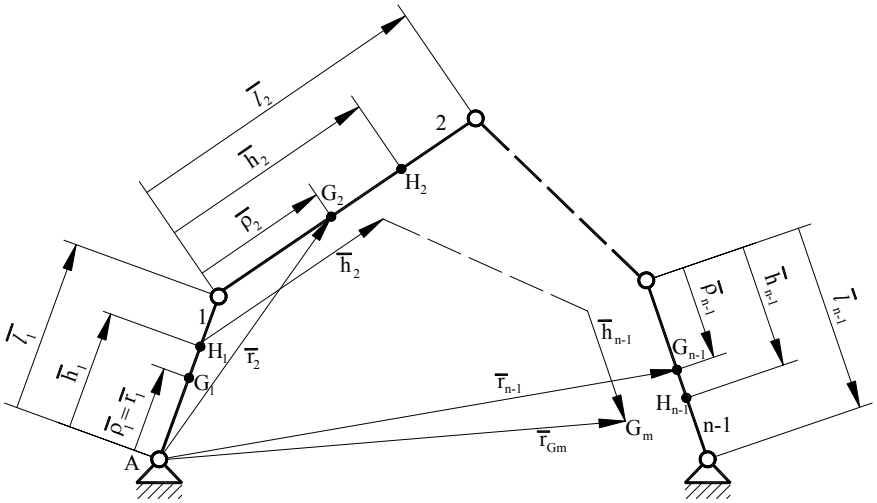


Fig. 5.37

Înlocuind în formula (5.125) expresiile vectorilor $\overline{r}_k$ se obține

$$\overline{r}_{G_m} = \frac{m_1\overline{\rho}_1 + m_2(\overline{\ell}_1 + \overline{\rho}_2) + \ldots + m_{n-1}(\overline{\ell}_1 + \overline{\ell}_2 + \ldots + \overline{\ell}_{n-2} + \overline{\rho}_{n-1})}{m_m}.$$

Printr-o reordonare a termenilor se ajunge la expresia

$$\overline{r}_{G_m} = \frac{m_1\overline{\rho}_1 + \overline{\ell}_1(m_2 + m_3 + \ldots m_{n-1})}{m_m} + \frac{m_2\overline{\rho}_2 + \overline{\ell}_2(m_3 + m_4 + \ldots m_{n-1})}{m_m} +$$

$$+ \ldots + \frac{m_{n-1}\overline{\rho}_{n-1}}{m_m}.$$

Făcând notația

$$\overline{h}_k = \frac{m_k\overline{\rho}_k + \overline{\ell}_k(m_{k+1} + \ldots + m_{n-1})}{m_m}, \qquad (5.130)$$

se obține următoarea formulă pentru calculul poziției centrului de masă al mecanismului

$$\overline{r}_{G_m} = \sum_{1}^{n-1} \overline{h}_k \ . \qquad (5.131)$$

Vectorul $\overline{h}_k$, având aceeaşi direcţie cu $\overline{\ell}_k$ şi $\overline{\rho}_k$, determină, în raport cu articulaţia iniţială a elementului k, poziţia unui punct H_k, invariabil pe element, numit **punct principal**. Acest punct are următoarea semnificaţie fizică: reprezintă centrul de masă al corpului care se obţine dacă în articulaţia iniţială se concentrează masa tuturor elementelor anterioare lui k, în G_k se concentrează masa elementului k, iar în articulaţia finală se concentrează masa tuturor elementelor care urmează lui k. Prin însumarea grafică a vectorilor $\overline{h}_k$, în vederea determinării vectorului $\overline{r}_{G_m}$, se formează un poligon care are laturile paralele cu elementele mobile ale mecanismului, cum se observă în Fig.5.37. Metoda se poate aplica, prin modificări şi dezvoltări corespunzătoare, şi pentru mecanismele formate din lanţuri cinematice complexe sau în cazul în care centrele de masă ale elementelor nu sunt coliniare cu articulaţiile acestuia [24].

▪ Echilibrarea statică a mecanismului patrulater articulat

Mecanismul are trei elemente mobile (Fig.5.38), astfel încât, condiţia de echilibrare statică se poate scrie sub forma

$$\overline{r}_{G_m} = \overline{h}_1 + \overline{h}_2 + \overline{h}_3 = \overline{c} \qquad (5.132)$$

în care $\overline{c}$ este un vector constant. Această condiţie este îndeplinită numai dacă vectorii punctelor principale au modulele proporţionale cu lungimile elementelor,

$$\frac{h_1}{\ell_1} = \frac{h_2}{\ell_2} = \frac{h_3}{\ell_3} = k \qquad (5.133)$$

În această ipoteză, vectorul $\overline{r}_{G_m}$ capătă expresia

$$\overline{r}_{G_m} = k(\overline{\ell}_1 + \overline{\ell}_1 + \overline{\ell}_1) = k\overline{\ell}_4 .$$

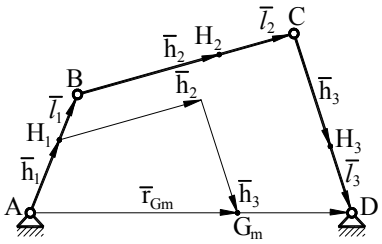


Fig. 5.38

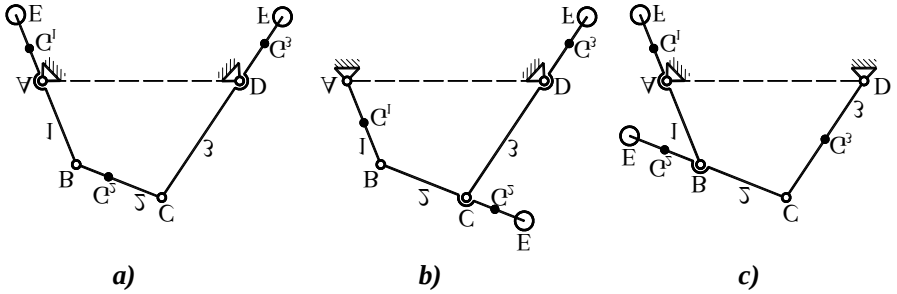
Cum $\overline{\ell}_4$ este un vector constant, înseamnă că şi $\overline{r}_{G_m}$ este constant, coliniar cu $\overline{\ell}_4$. Prin urmare, punctul G_m se găseşte pe dreapta AD, aşa cum rezultă din Fig.5.38. Introducând expresiile parametrilor h_1, h_2 şi h_3, aşa cum rezultă din formula (5.130) în proporţiile (5.133), se obţin relaţiile

$$\frac{m_1\rho_1 + \ell_1(m_2 + m_3)}{\ell_1} = \frac{m_2\rho_2 + \ell_2 m_3}{\ell_2} = \frac{m_3\rho_3}{\ell_3}, \qquad (5.134)$$

care constituie condițiile ce trebuie satisfăcute de parametrii m_1, m_2, m_3, ρ_1, ρ_2, ρ_3 pentru ca mecanismul să fie echilibrat. Analiza ecuațiilor (5.134) conduce la concluzii importante privind repartizarea maselor elementelor. În mod normal, un element cu două articulații are forma unei bare, cu centrul de masă situat între cele două articulații. Să presupunem că G_2 se află între articulațiile B şi C (Fig.5.39.a), deci $0 < \rho_2 < \ell_2$. Din egalitățile (5.134) rezultă

$$m_1\rho_1 = -m_2(\ell_2 - \rho_2)\frac{\ell_1}{\ell_2} \qquad (5.135)$$

$$m_3\rho_3 = m_3\ell_3 + m_2\rho_2\frac{\ell_3}{\ell_2}, \qquad (5.136)$$



a) *b)* *c)*

Fig.5.39

care arată că $\rho_1 < 0$ şi $\rho_3 > \ell_3$. Aceasta înseamnă că centrele de masă ale elementelor 1 şi 3 trebuie să se afle în afara articulațiilor. Pentru a le deplasa în aceste poziții, pe elementele 1 şi 3 se montează două contragreutăți, în punctele E şi F, ca în Fig.5.39.a. Pentru a determina masa (m_E) şi poziția (ρ_E) ale contragreutății din E, presupunem că inițial, înainte de montarea contragreutății, elementul 1 este caracterizat de parametrii m'_1 şi ρ'_1. În această ipoteză se poate scrie

$$m_1\rho_1 = m'_1\rho'_1 + m_E\rho_E,$$

de unde rezultă

$$m_E\rho_E = m_1\rho_1 - m'_1\rho'_1$$

în care produsul $m_1\rho_1$ are valoarea calculată cu formula (5.135). Cunoscând produsul $m_E\rho_E$, fiecare dintre parametrii m_E şi ρ_E se adoptă convenabil,

ținând seama de condițiile constructiv-funcționale. Produsul $m_F\rho_F$ se determină în mod similar.

Dacă se adoptă G_1 între articulații ($0<\rho_1<\ell_1$), din ecuațiile (5.134) rezultă

$$m_2\rho_2 = m_2\ell_2 + m_1\rho_1\frac{\ell_2}{\ell_1}$$

$$m_3\rho_3 = m_3\ell_3 + m_1\rho_1\frac{\ell_3}{\ell_1},$$

care arată că $\rho_2 > \ell_2$ şi $\rho_3 > \ell_3$. Prin urmare centrele de masă ale elementelor 2 şi 3 trebuie deplasate în afara articulațiilor cu ajutorul unor contragreutăți ca în Fig.5.39.b.

În fine, dacă G_3 se adoptă între articulații ($0<\rho_3<\ell_3$), relațiile (5.134) scrise sub forma

$$m_1\rho_1 = m_3\frac{\ell_1}{\ell_3}\left(\rho_3-\ell_3\right) - m_2\ell_1$$

$$m_2\rho_2 = m_3\frac{\ell_2}{\ell_3}(\rho_3-\ell_3)$$

conduc la inegalitățile $\rho_1<0$ şi $\rho_2<0$. Prin urmare, centrele de greutate ale elementelor 1 şi 2 trebuie deplasate în afara articulațiilor folosind două contragreutăți montate ca în Fig.5.39.c. Dintre cele trei soluții de echilibrare, cea mai recomandabilă este prima (Fig.5.39.a) deoarece montarea unei contragreutăți pe bielă este dificilă şi măreşte gabaritul mecanismului.

▪ Echilibrarea statică a mecanismului manivelă - piston

Condiția echilibrării statice are aceeaşi formă (5.132) ca la mecanismul patrulater articulat. Întrucât $\overline{h}_3$ este un vector constant (elementul 3 are mişcare de translație, deci direcția lui $\overline{h}_3$ este invariabilă), condiția de echilibrare (5.132) devine

$$\overline{h}_1 + \overline{h}_2 = \overline{c} \tag{5.137}$$

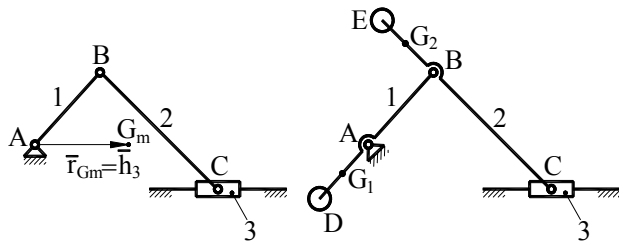
Egalitatea (5.137) este satisfăcută pentru orice poziție a mecanismului numai dacă $\overline{h}_1 = \overline{h}_2 = 0$, iar $\overline{r}_{G_m} = \overline{h}_3$ (Fig.5.40.a). Având în vedere expresiile vectorilor $\overline{h}_1$ şi $\overline{h}_2$ (5.130), rezultă

$$m_1\rho_1 + \ell_1(m_2+m_3) = 0$$

$$m_2\rho_2 + \ell_2 m_3 = 0$$

sau

$$m_1\rho_1 = -\ell_1(m_2 + m_3)$$
$$m_2\rho_2 = -\ell_2 m_3.$$



a) ***b)***

Fig. 5.40

Aceste relații arată că, pentru echilibrarea mecanismului, centrele de masă ale elementelor 1 şi 2 trebuie să se afle în afara articulațiilor ($\rho_1 < 0,\ \rho_2 < 0$). Pentru aceasta trebuie să se monteze două contragreutăți ca în Fig.5.40.b. Această soluție nu are o largă aplicație practică datorită dezavantajelor legate de montarea unei contragreutăți pe bielă. Mai frecvent se practică o echilibrare parțială urmărind numai anularea componentei perpendiculare pe axa de translație a forței de inerție rezultante. Pentru aceasta centrul de masă al mecanismului trebuie să aibă o traiectorie rectilinie paralelă cu axa de translație. În această situație, atât accelerația centrului de masă cât şi forța de inerție au aceeaşi direcție – paralelă cu axa de translație, iar forța de inerție perpendiculară pe această axă este nulă. Se poate arăta că situația descrisă se înregistrează când modulele vectorilor $\overline{h}_1$ şi $\overline{h}_2$ sunt proporționale cu lungimile ℓ_1 şi ℓ_2,

$$\frac{h_1}{\ell_1} = \frac{h_2}{\ell_2} = k. \qquad (5.138)$$

În acest caz vectorul $\overline{r}_{G_m}$ se poate scrie

$$\overline{r}_{G_m} = \overline{h}_1 + \overline{h}_2 + \overline{h}_3 = k(\overline{\ell}_1 + \overline{\ell}_2) + \overline{h}_3 = k\overline{r}_C + \overline{h}_3,$$

în care $\overline{r}_C = \overline{AC}$. Dacă se adoptă un sistem de coordonate cu originea în A (Fig.5.41.a), proiecția pe axa Ay a vectorului $\overline{r}_{G_m}$ este

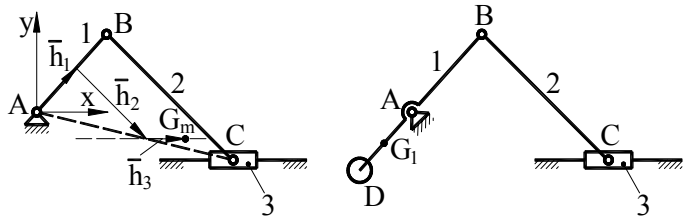
$$y_{G_m} = k \cdot y_C.$$

Deoarece y_C este constant, rezultă că şi y_{G_m} este constant, ceea ce arată că traiectoria punctului G_m este o dreaptă paralelă cu axa Ax. Introducând expresiile vectorilor $\overline{h}_1$ şi $\overline{h}_2$ (5.130) în relația (5.138) se obține

$$\frac{m_1\rho_1 + \ell_1(m_2 + m_3)}{\ell_1} = \frac{m_2\rho_2 + \ell_2 m_3}{\ell_2}$$

sau

$$m_1\rho_1 = -m_2(\ell_2 - \rho_2)\frac{\ell_1}{\ell_2}.$$



a) ***b)***

Fig. 5.41

Dacă G_2 se adoptă între articulațiile B şi C ($0 < \rho_2 < \ell_2$), rezultă $\rho_1 < 0$, deci trebuie amplasată o contragreutate pe manivelă (Fig.5.41.b) pentru a deplasa centrul de greutate în afara articulațiilor.

5.3.2.3. Metoda analizei armonice

Această metodă este utilizată, ca şi metoda punctelor principale, pentru echilibrarea statică a mecanismelor şi se bazează pe dezvoltarea în serie Fourier a forțelor de inerție. Apoi, fiecare armonică se echilibrează separat cu ajutorul contragreutăților. Pentru exemplificare, se va arăta modul de aplicare a metodei în cazul unui mecanism manivelă – piston axial (Fig.5.42).

În vederea echilibrării, masa bielei se concentrează static în punctele B şi C (par. 2.1.2.3)

$$m_{B_2} = m_2\frac{\ell_2 - \rho_2}{\ell_2},\ m_{C_2} = m_2\frac{\rho_2}{\ell_2}.$$

Masele în mişcare de rotație, concentrate în B (m_{B_2}) şi $G_1(m_1)$ se echilibrează, ca în cazul unui rotor, printr-o contragreutate montată în punctul D,

$$m_D\rho_D = -m_1\rho_1 - m_2\frac{\ell_2-\rho_2}{\ell_2}\ell_1 .$$

Masele aflate în mişcare de translaţie , concentrate în punctul C,

$$m_C = m_3 + m_{C_2} = m_3 + m_2\frac{\rho_2}{\ell_2},$$

rămân dezechilibrate. Forţa de inerţie generată de aceste mase este

$$F_{iC} = -m_C a_C .$$

Poziţia punctului C este definită prin coordonata x_C care, în ipoteza $\ell_4 = 0$, are expresia (par. 2.1.4.3)

$$x_C = \ell_1\left(\cos\varphi_1 + \frac{1}{\lambda}\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\varphi_1}\right),$$

în care $\lambda = \frac{\ell_1}{\ell_2}$. Funcţia $f(\varphi_1) = \cos\varphi_1 + \frac{1}{\lambda}\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\varphi_1}$ este periodică în raport cu φ_1 şi se poate dezvolta în serie Fourier,

$$f(\varphi_1) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty}(a_j\cos j\varphi_1 + b_j\sin j\varphi_1) .$$

Deoarece funcţia este pară, $f(-\varphi_1) = f(\varphi_1)$, coeficienţii sinusurilor sunt nuli, $b_j = 0$. Coeficienţii a_j se calculează cu formulele

$$a_j = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(f(\varphi_1)\cos j\varphi_1\right)d\varphi_1 \quad (j = 0,\ 1,\ 2,\ldots n) .$$

Aplicând aceste formule rezultă că toţi coeficienţii de ordin impar, cu excepţia $j = 1$, sunt nuli. Prin derivarea coordonatei $x_C = \ell_1 \cdot f(\varphi_1)$, de două ori în raport cu timpul, în ipoteza dezvoltării funcţiei $f(\varphi_1)$ în serie Fourier, se obţine acceleraţia punctului C,

$$\begin{aligned} a_C &= -\ell_1\omega_1^2(a_1\cos\varphi_1 + 2^2 a_2\cos 2\varphi_1 + 4^2 a_4\cos 4\varphi_1 + \ldots) = \\ &= -\ell_1\omega_1^2\sum j^2 a_j\cos j\varphi_1 \qquad (j=1, 2, 4, \ldots 2n). \end{aligned}$$

Notând $A_j = j^2 a_j$ (j=1, 2, 4, ... 2n) şi înlocuind acceleraţia a_C în expresia forţei de inerţie F_{iC}, se obţine

$$\begin{aligned} F_{iC} &= m_C\ell_1\omega_1^2(A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos 2\varphi_1 + A_4\cos 4\varphi_1 + \ldots) = \\ &= m_C\ell_1\omega_1^2\sum A_j\cos j\varphi_1 \qquad (j = 1,\ 2,\ 4,\ \ldots\ 2n) \end{aligned} \tag{5.139}$$

Valorile coeficienților A_j (j=1, 2, 4, ... 2n) sunt indicate în Tab.5.1 în funcție de valorile uzuale ale raportului λ.

Expresia forței de inerție (5.139) arată că aceasta se compune dintr-un număr de termeni, numiți **armonice**. Primul termen – **armonica fundamentală** are frecvența egală cu frecvența de rotație a elementului conducător, iar armonicele superioare au frecvențe egale cu multiplii pari ai armonicei fundamentale.

Pentru a echilibra forța de inerție $\overline{F}_{iC}$, se echilibrează, separat, fiecare dintre armonicele sale. Deoarece forțele de inerție scad foarte mult cu creşterea ordinului armonicei, aşa cum rezultă din Tab. 5.1, echilibrarea se limitează la armonicele de ordine inferioare.

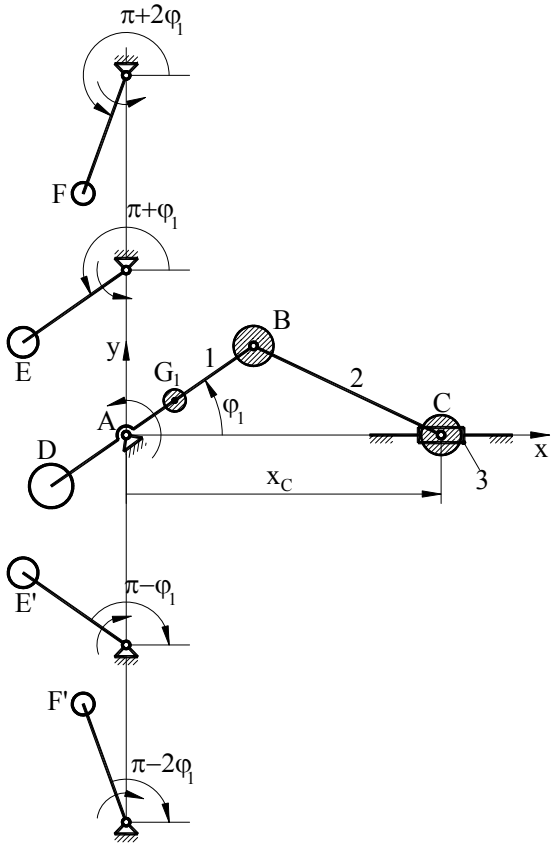


Fig. 5.42

Tabelul 5.1

λ	1/2,5	1/3	1/3,5	1/4	1/4,5	1/5	1/5,5	1/6
A_1	1	1	1	1	1	1	1	1
A_2	0,417325	0,343109	0,29178	0 ,254025	0,225031	0 ,202038	0,183345	0,167839
A_4	-0,18175	-0,010099	-0,006211	-0,004098	-0,002849	-0,002062	-0,001541	-0,001182
A_6	0,000891	0,000334	0,000149	0,000074	0,000041	0,000024	0,000015	0,000009
A_8	0,000043	0,000011	0,000004	0,000001	0,000001	0,000000	0,000000	0,000000

Armonica fundamentală

$$F_{iC1} = m_C \ell_1 \omega_1^2 A_1 \cos\varphi_1 \tag{5.140}$$

se echilibrează prin montarea a două contragreutăţi E şi E' (Fig.5.42) care se rotesc în sensuri contrare cu viteza unghiulară ω_1. Razele lor formează cu axa Ax unghiurile $(\pi - \varphi_1)$ şi $(\pi + \varphi_1)$. Pentru echilibrare, este necesar ca suma proiecţiilor, pe direcţia ghidajului, ale forţelor de inerţie generate de contragreutăţi, să fie egală şi de sens contrar cu F_{iC1},

$$m_E \rho_E \omega_1^2 \cos(\pi - \varphi_1) + m_E \rho_E \omega_1^2 \cos(\pi + \varphi_1) = -m_C \ell_1 \omega_1^2 A_1 \cos\varphi_1$$

Din această ecuaţie se calculează valoarea produsului $m_E \rho_E$, în funcţie de care se adoptă m_E şi ρ_E,

$$m_E \rho_E = \frac{m_C \ell_1 A_1}{2}. \tag{5.141}$$

Se observă că proiecţiile forţelor de inerţie ale contragreutăţilor, pe direcţie perpendiculară pe ghidaj, se echilibrează reciproc,

$$m_E \rho_E \omega_1^2 \sin(\pi - \varphi_1) + m_E \rho_E \omega_1^2 \sin(\pi + \varphi_1) = 0.$$

Antrenarea în rotaţie a contragreutăţilor se face prin transmiterea mişcării de la elementul conducător al mecanismului, cu ajutorul unor mecanisme cu roţi dinţate cu raportul de transmitere (+1) pentru o contragreutate şi (-1) pentru cealaltă contragreutate.

Pentru a echilibra armonica de ordin doi,

$$F_{iC2} = m_C \ell_1 \omega_1^2 A_2 \cos 2\varphi_1 \tag{5.142}$$

se procedează în mod similar, utilizând contragreutăţile F şi F' (Fig.5.42), care se rotesc în sensuri contrare cu viteza unghiulară $2\omega_1$ şi care formează, cu axa Ax, unghiurile $(\pi - 2\varphi_1)$ şi $(\pi + 2\varphi_1)$. Condiţia de echilibrare este

$$m_F \rho_F (2\omega_1)^2 \cos(\pi - 2\varphi_1) + m_F \rho_F (2\omega_1)^2 \cos(\pi + 2\varphi_1) = -m_C \ell_1 \omega_1^2 A_2 \cos 2\varphi_1$$

din care rezultă

$$m_F \rho_F = \frac{m_C \ell_1 A_2}{8}. \qquad (5.143)$$

Ca şi la armonica fundamentală, proiecţiile forţelor de inerţie ale contragreutăţilor F şi F', pe direcţia perpendiculară pe ghidaj, se echilibrează reciproc.

5.3.2.4. Noţiuni privind echilibrarea motoarelor policilindrice

Motoarele policilindrice sunt compuse din mai multe mecanisme manivelă – piston care funcţionează în plane paralele având o manivelă comună (arborele cotit). Recomandarea privitoare la simetria lanţurilor cinematice componente faţă de un plan paralel cu planul mişcării (par. 5.2.2.1) nu poate fi respectată întotdeauna, astfel încât, echilibrarea trebuie privită atât sub aspect static, cât şi dinamic. Aşa cum se va vedea, echilibrarea motoarelor policilindrice se realizează atât prin montarea unor contragreutăţi, cât şi prin decalarea judicioasă a manivelelor mecanismelor componente, astfel ca forţele de inerţie să se echilibreze reciproc.

- **Motorul cu doi cilindri**

Cele două mecanisme, având manivelele decalate cu 180^0, se notează ABC şi ADE (Fig.5.43). Forţele de inerţie cauzate de masele în mişcare de rotaţie, concentrate în punctele $B(\overline{F}_{iB})$ şi $D(\overline{F}_{iD})$ se echilibrează reciproc datorită decalajului manivelelor (Fig.5.43.b). Vom analiza, în continuare, modul în care acţionează forţele de inerţie de diferite ordine, obţinute prin dezvoltarea Fourier, corespunzătoare maselor în mişcare de translaţie. Notând, pentru simplificare, unghiul şi viteza unghiulară ale manivelei cu φ şi ω, forţele de inerţie, pentru cele două mecanisme, sunt

$$F_{iC1} = m_C \ell_1 \omega^2 A_1 \cos\varphi$$

$$F_{iE1} = m_E \ell_1 \omega^2 A_1 \cos(\pi + \varphi) = -m_E \ell_1 \omega^2 A_1 \cos\varphi.$$

Deoarece mecanismele sunt identice, $m_C = m_E$, iar $F_{iC1} = -F_{iE1}$ rezultă că forţele de inerţie de ordinul 1 se echilibrează reciproc fără a fi nevoie de contragreutăţi.

Forţele de inerţie de ordinul 2 au expresiile

$$F_{iC2} = m_C \ell_1 \omega^2 A_2 \cos 2\varphi$$

$$F_{iE2} = m_E \ell_1 \omega^2 A_2 \cos 2(\pi + \varphi) = F_{iC2}.$$

Se observă că cele două forțe de inerție nu se echilibrează reciproc. În aceeaşi situație se află şi forțele de inerție de ordinul 4. Echilibrarea lor se poate face cu contragreutăți în modul arătat la mecanismul manivelă – piston.

Forțele de inerție de diferite ordine pot fi interpretate ca fiind proiecțiile pe axa de translație a unor vectori care se rotesc cu viteza $n \cdot \omega$ (n – ordinul armonicei). Unghiurile acestor vectori sunt argumentele funcției cosinus din expresia forței de inerție şi se calculează cu formula

$$\varphi_k = n(\varphi + \alpha_k), \tag{5.144}$$

în care k este numărul de ordine al cilindrului, φ este unghiul de poziție al manivelei având $k = 1$, iar α_k unghiul dintre manivela k şi manivela $k = 1$. Această formulă este valabilă pentru forțele de inerție de ordinul 1, 2, 6, 8. Pentru forțele de inerție de ordinul 4, care au coeficienții A_4 negativi, se utilizează formula

$$\varphi_k = 4(\varphi + \alpha_k) + \pi. \tag{5.145}$$

Valorile unghiurilor vectorilor rotitori, pentru motorul cu doi cilindri, sunt date în tabelul următor.

n	Cilindrul 1, mecanismul ABC $\alpha_1 = 0$	Cilindrul 2, mecanismul ADE $\alpha_2 = \pi$
1	φ	$\varphi + \pi$
2	2φ	$2\varphi + (2\pi)$
4	$4\varphi + \pi$	$4\varphi + \pi + (4\pi)$
6	6φ	$6\varphi + (6\pi)$

Folosind aceste valori s-au reprezentat diagramele vectorilor rotitori pentru forțele de inerție de ordinele 1 (Fig.5.43.c), 2 (Fig.5.43.d) şi 4 (Fig.5.43.e). În aceste diagrame se observă, în mod sugestiv, faptul că forțele de inerție de ordinul 1 se autoechilibrează, iar cele de ordinul 2 şi de ordinul 4 nu se bucură de această proprietate.

Trebuie remarcat că forțele de inerție de ordinul 1 (F_{iC1} şi F_{iE1}), acționând în plane diferite, produc un cuplu (Fig.5.43.a). Momentul acestui cuplu, numit moment de răsturnare, poate fi echilibrat prin montarea a două contragreutăți, F şi F', care se rotesc în jurul unor axe perpendiculare pe axa de rotație a manivelelor, aşa cum se arată în Fig.5.43.a.

Contragreutățile sunt acționate cu ajutorul unor angrenaje conice prin care se transmite mişcarea de la arborele cotit. Deoarece momentul care trebuie echilibrat este provocat de armonica fundamentală, viteza unghiulară a contragreutăților trebuie să fie egală cu cea a manivelei, deci raportul de transmitere al angrenajelor conice trebuie să fie egal cu unitatea. Masa şi raza contragreutăților rezultă din condiția de echilibrare a cuplului creat de forțele F_{iC1} şi $F_{iE1} = -F_{iC1}$,

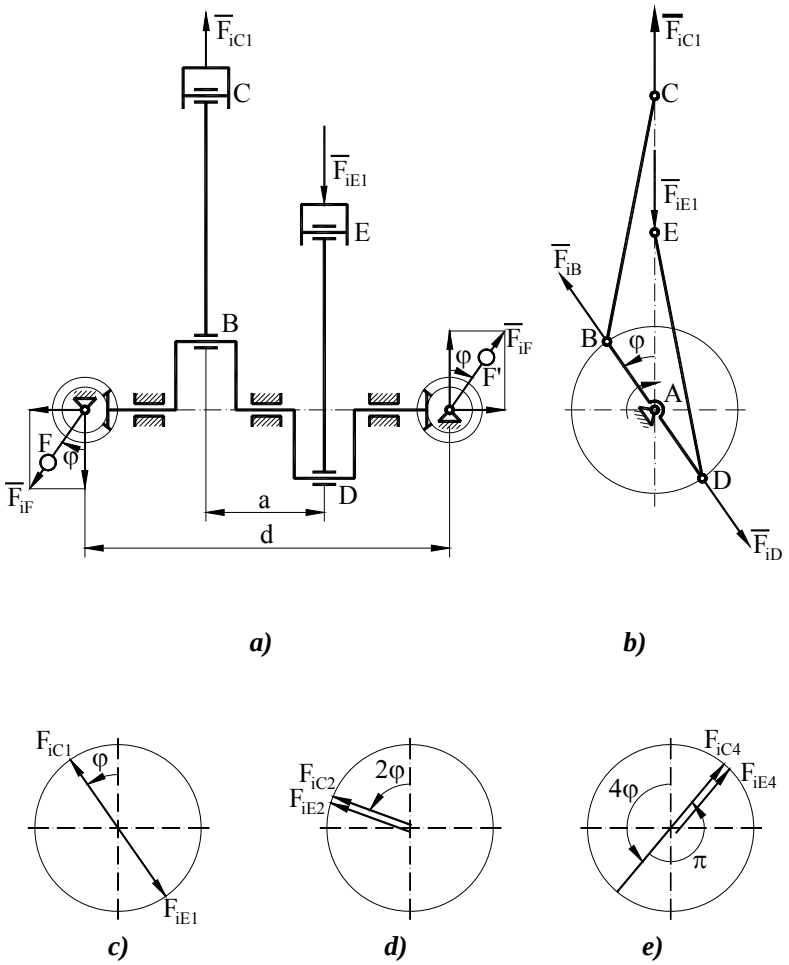


Fig. 5.43

$$F_{iF} \cdot \cos\varphi \cdot d = F_{iC1} \cdot a$$

$$(m_F \rho_F \omega^2 \cos\varphi) d = (m_C \ell_1 \omega^2 A_1 \cos\varphi) a$$

$$m_F \rho_F = m_C \ell_1 A_1 \frac{a}{d}, \qquad (5.146)$$

în care a şi d sunt distanțe puse în evidență pe desen (Fig.5.43.a).

▪ Motorul cu trei cilindri

În cazul motoarelor cu trei cilindri, având manivelele decalate cu 120^0, forțele de inerție ale maselor în mişcare de rotație $\overline{F}_{iB}$, $\overline{F}_{iD}$ şi $\overline{F}_{iF}$ se echilibrează reciproc, aşa cum reiese din Fig.5.44.a. Analiza echilibrării forțelor de inerție cauzate de masele în mişcare de translație se face pe baza diagramelor vectorilor rotit ori trasate cu ajutorul unghiurilor calculate cu formulele (5.144), (5.145) şi indicate în tabelul următor.

n	Cilindrul 1, mecanismul ABC $\alpha_1 = 0$	Cilindrul 2, mecanismul ADE $\alpha_2 = 120^0$	Cilindrul 3, mecanismul AFG $\alpha_3 = 240^0$
1	φ	$\varphi + 120^0$	$\varphi + 240^0$
2	2φ	$2\varphi + 240^0$	$2\varphi + 480^0 =$ $= 2\varphi + 120^0 + (2\pi)$
4	$4\varphi + \pi$	$4\varphi + 480^0 + \pi =$ $= 4\varphi + 300^0 + (2\pi)$	$4\varphi + 960^0 + \pi =$ $= 4\varphi + 60^0 + (6\pi)$
6	6φ	$6\varphi + 720^0 =$ $= 6\varphi + (4\pi)$	$6\varphi + 1440^0 =$ $= 6\varphi + (8\pi)$

Forțele de inerție de ordinele 1, 2 şi 4 se autoechilibrează aşa cum se observă în diagramele din Fig.5.44.b, c, şi d.

Forțele de inerție de ordinul 6 nu se echilibrează reciproc (Fig.5.44.e) dar ele sunt foarte mici, aşa încât pot rămâne neechilibrate fără ca funcționarea motorului să fie influențată vizibil. Forțele de inerție de ordinele 1, 2 şi 4 provoacă, însă, momente de răsturnare care se echilibrează cu contragreutăți aşa cum s-a arătat la motorul cu doi cilindri. Este important să fie echilibrat momentul de răsturnare cauzat de forțele de inerție de ordinul 1. Momentele provocate de forțele de inerție de ordinele 2 şi 4 sunt mai mici, dar şi dificil de echilibrat deoarece contragreutățile trebuie să se rotească cu viteze de două şi de

patru ori mai mari decât viteza arborelui cotit.

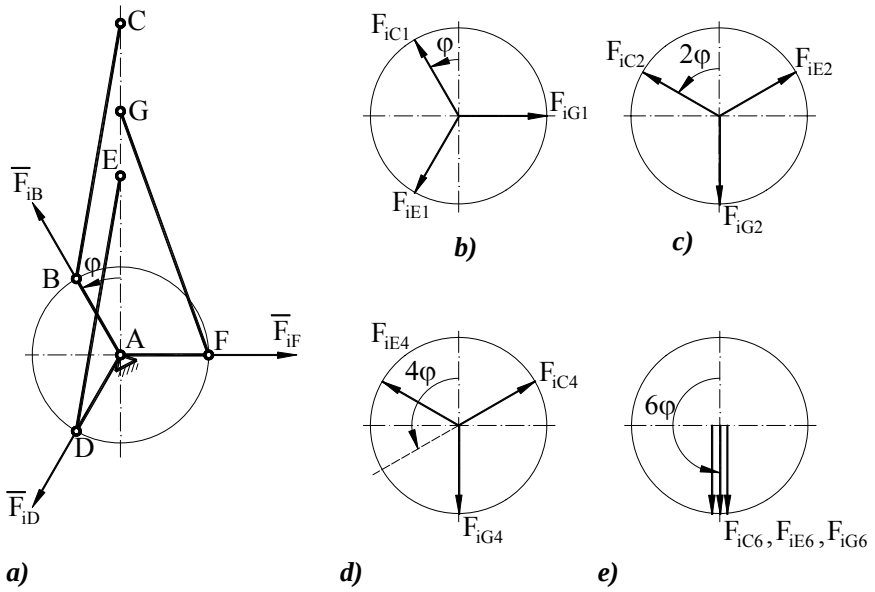


Fig. 5.44

- **Motorul cu patru cilindri**

Motorul cu patru cilindri, cu manivelele decalate la 180^0 ca în Fig.5.45, poate fi considerat ca fiind format din două motoare cu doi cilindri alăturate. Ca şi la motoarele cu doi cilindri, forţele de inerţie ale maselor în mişcare de rotaţie $\overline{F}_{iB}$, $\overline{F}_{iD}$, $\overline{F}_{iF}$, $\overline{F}_{iH}$ (Fig.5.45.b), precum şi forţele de inerţie ale maselor în mişcare de translaţie, de ordinul 1, $\overline{F}_{iC1}$, $\overline{F}_{iE1}$, $\overline{F}_{iG1}$, $\overline{F}_{iI1}$ (Fig.5.45.c) se autoechilibrează. Rămân neechilibrate forţele de inerţie de ordine superioare (Fig.5.45.d,e). Trebuie menţionat că forţele de inerţie de ordinul 1, corespunzătoare celor 4 mecanisme, formează două cupluri egale cu $F_{iC1} \cdot b$, care se autoechilibrează având sensuri contrare. Rezultă că, la acest motor, nu acţionează un moment de răsturnare.

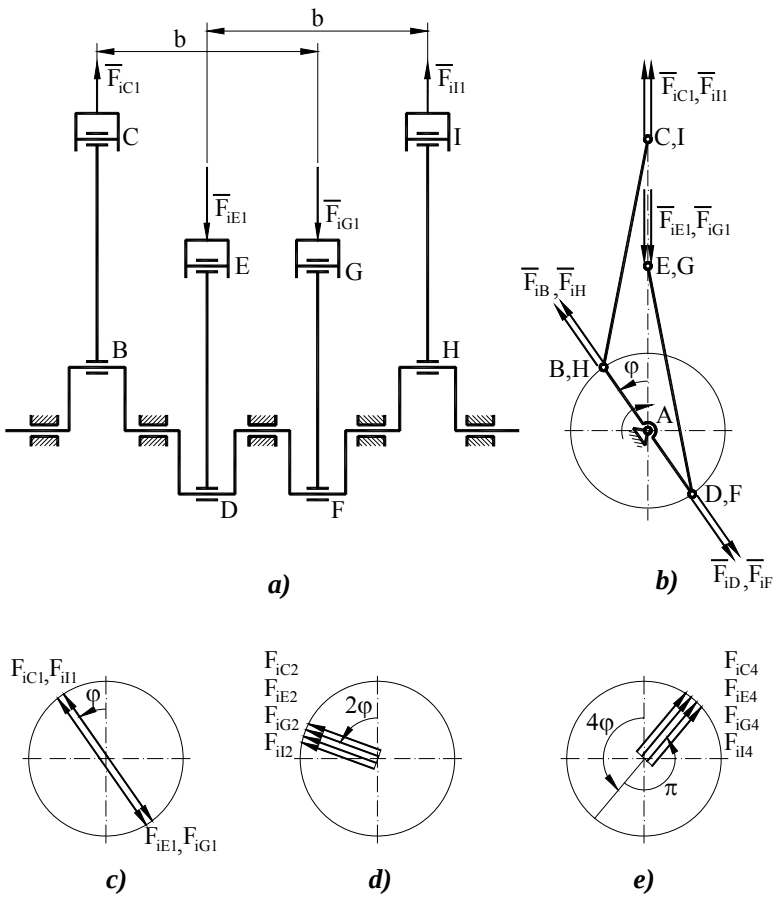

b
b
$\overline{F}_{iC1}$
$\overline{F}_{iI1}$
C
I
$\overline{F}_{iE1}$
$\overline{F}_{iG1}$
E
G
B
H
D
F
a)
$\overline{F}_{iC1},\overline{F}_{iI1}$
C,I
$\overline{F}_{iE1},\overline{F}_{iG1}$
E,G
$\overline{F}_{iB},\overline{F}_{iH}$
B,H
φ
A
D,F
$\overline{F}_{iD},\overline{F}_{iF}$
b)
F_{iC1},F_{iI1}
φ
F_{iE1},F_{iG1}
c)
F_{iC2}
F_{iE2}
F_{iG2}
F_{iI2}
2φ
d)
F_{iC4}
F_{iE4}
F_{iG4}
F_{iI4}
4φ
π
e)

Fig. 5.45

Capitolul 6

PROIECTAREA MECANISMELOR

6.1. CONSIDERAȚII GENERALE

Proiectarea este un proces complex prin care, pornind de la o **temă** dată, se elaborează **documentația tehnică** a produsului (STAS 6269-80, R-85).

Tema de proiectare stabileşte funcțiile principale cerute produsului, caracteristicile şi performanțele acestuia. În cazul proiectării unui mecanism tema de proiectare se desprinde din tema generală, stabilită pentru maşina din care face parte mecanismul. Procesul tehnologic executat de o maşină se desfăşoară în mai multe operații, iar fiecare operație este executată de un mecanism. Natura şi specificul operației determină funcțiile mecanismului aferent şi conduc la formularea temei de proiectare pentru acesta.

"**Documentația tehnică** reprezintă desenele şi documentele scrise care, independent sau împreună, determină componența şi construcția produsului şi cuprind, după caz, date de studiu şi proiectare, execuție, verificare, recepție, exploatare, întreținere sau de propagandă tehnică şi comercială a acestuia" (STAS 6269-80, R-85).

Mai pe scurt, documentația tehnică descrie complet produsul (mecanismul), astfel încât acesta să poată fi fabricat şi justifică soluțiile adoptate.

Schema de principiu, care indică fazele de proiectare a unui mecanism, este arătată în Fig.6.1. Prima fază (blocul 1) este adoptarea schemei cinematice fără precizarea parametrilor geometrici. Această problemă va fi tratată extins în par.6.2. Cea de a doua fază (blocul 2) reprezintă proiectarea propriu-zisă a mecanismului şi se concretizează prin asocierea a două grupe de operații: Analize şi Sinteze (blocul 2.1) şi Proiectarea Organologică (blocul 2.2). Operațiile de analiză şi de sinteză sunt tratate în prezentul volum. Operațiile care se înscriu în sfera proiectării organologice nu fac obiectul acestei cărți, astfel că vom explica, pe scurt, rolul lor. În linii mari, în cadrul proiectării organologice, se determină forma şi dimensiunile elementelor (pieselor, organelor) din condiții de rezistență, durabilitate şi tribologice.

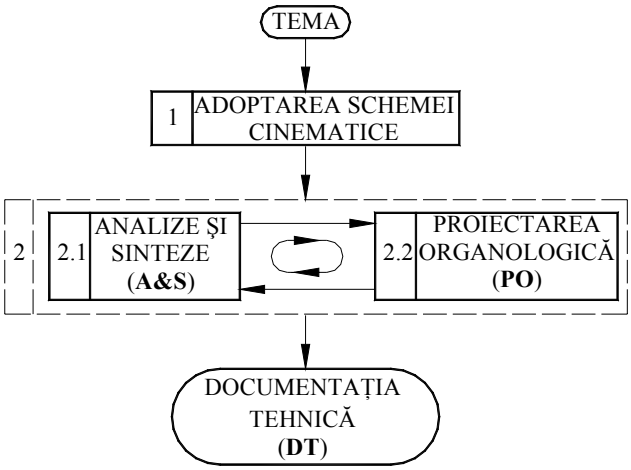


Fig.6.1

Dimensiunile care se stabilesc astfel sunt altele decât cele obţinute prin sinteza dimensională şi care se referă strict la poziţiile relative dintre suprafeţele cuplelor în raport cu fiecare element.

Pentru exemplificare, în Fig.6.2 este reprezentat desenul unui element de tip bielă care aparţine unui mecanism cu cuple inferioare. Cota care indică distanţa dintre centrele articulaţiilor, încercuită pe desen, rezultă din sinteza

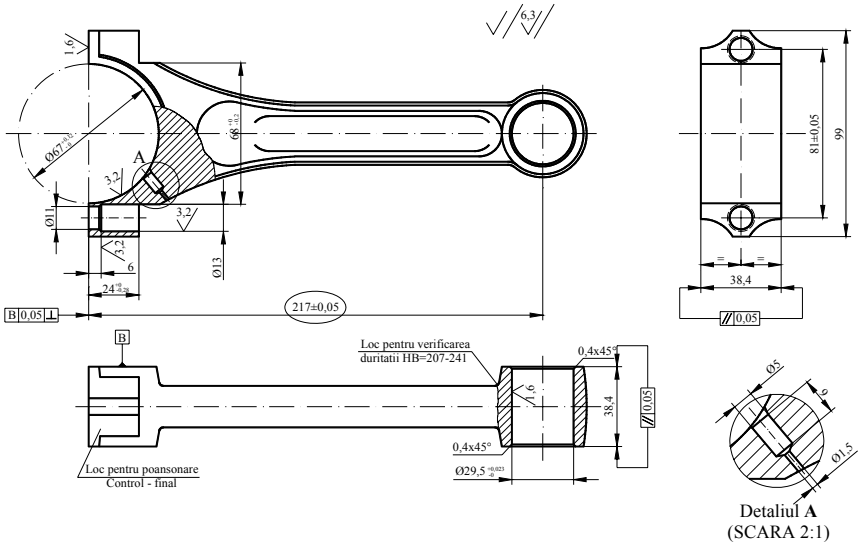


Fig.6.2

dimensională. Toate celelalte cote, care definesc complet geometria piesei, reprezintă rezultatul proiectării organologice. În acelaşi domeniu se încadrează alegerea materialelor şi a tratamentelor termice, stabilirea toleranţelor, a abaterilor geometrice şi a calităţii suprafeţelor. Cu alte cuvinte proiectarea organologică materializează, aduce la o formă reală, tehnică modelul simplificat care este schema cinematică. Între operaţiile de sinteză şi analiză, pe de o parte, şi proiectarea organologică, pe de altă parte, există o legătură strânsă, în sensul că îşi furnizează date reciproc. Astfel, de exemplu, sinteza dimensională generează parametrii geometrici ai schemei cinematice, iar analiza cinetostatică – forţele de legătură, care intervin în proiectarea organologică. Pe de altă parte, proiectarea organologică determină repartiţia maselor (valorile maselor, a momentelor de inerţie şi poziţiile centrelor de masă) care este utilizată în analiza cinetostatică şi în analiza dinamică. Această circulaţie de date conduce la formarea unui ciclu iterativ care se încheie atunci când sunt verificate o serie de condiţii cinematice, dinamice de rezistenţă sau cu caracter tribologic.

Pentru exemplificare, arătăm câteva dintre aceste condiţii: limitarea vitezei maxime a elementului de execuţie, obţinerea unui grad de neuniformitate recomandat, evitarea fenomenului de rezonanţă, menţinerea tensiunilor corespunzătoare diverselor solicitări sub valorile admisibile, instalarea ungerii hidrodinamice în diverse cuple cinematice, etc. De multe ori procesul iterativ îmbracă forma unei probleme de optimizare în care funcţia obiectiv este, de obicei, de natură economică.

Stabilirea, în detaliu, a procedurii de proiectare depinde de regimul de funcţionare şi de destinaţia mecanismului aşa cum se arată în par. 6.3.

6.2. ADOPTAREA SCHEMEI CINEMATICE

Etapa iniţială, de mare importanţă, în procesul de proiectare a unui mecanism cu un anumit rol funcţional, este adoptarea schemei cinematice.

Alegerea optimă, sau cel puţin corectă, a schemei cinematice asigură premizele unei funcţionări corespunzătoare.

Schema cinematică reprezintă un model fizic care conţine toate informaţiile necesare pentru a elabora modelul matematic de analiză cinematică. Geometria schemei cinematice este descrisă de un număr de parametri constructivi constanţi care indică poziţia relativă dintre suprafeţele cuplelor cinematice ale fiecărui element (par.2.1.4.). Cunoaşterea numerică a acestor parametri permite aplicarea modelului matematic în vederea finalizării numerice a operaţiei de analiză cinematică. În cadrul acestui subcapitol vom discuta numai despre adoptarea schemei cinematice fără a avea preocupări legate de determinarea parametrilor geometrici asociaţi cu aceasta.

Desigur, în capitolele anterioare s-au făcut unele aprecieri cu privire la adoptarea schemei cinematice, dar considerăm că o prezentare fundamentată, cu

caracter sintetic, se poate face numai în condiţiile cunoaşterii particularităţilor funcţionale specifice fiecărei categorii de mecanisme.

Aşa cum am arătat (par.1.1.2.), în construcţia maşinilor moderne se utilizează următoarele categorii de mecanisme: cu cuple inferioare (cu bare), cu came, cu roţi dinţate, cu şurub şi combinate. Vom prezenta domeniile de aplicare pentru fiecare categorie de mecanisme, determinate de o serie de criterii care guvernează alegerea schemei cinematice. Criteriul esenţial este, desigur, **rolul funcţional** al mecanismului, care se caracterizează prin condiţiile cinematice şi dinamice pe care trebuie să le îndeplinească elementul de execuţie. Alte criterii care se iau în considerare sunt legate de **simplitatea mecanismului**, de **caracteristicile tribologice ale cuplelor cinematice** şi de **posibilităţile tehnologice de fabricaţie**. Trebuie de observat că aceste criterii au, în esenţă, o finalitate economică.

Mecanismele cu cuple inferioare (cu bare) au un domeniu de aplicabilitate foarte larg. Cu ajutorul lor se pot obţine atât mişcări simple – de rotaţie sau de translaţie alternativă, cât şi mişcări complexe – plane sau spaţiale. O primă obţiune a proiectantului este de a decide între utilizarea unui mecanism **plan** sau a unuia **spaţial**. În general, se preferă mecanismele plane deoarece în construcţia mecanismelor spaţiale intervin cuple sferice sau sferice cu deget, dezavantajoase, din punct de vedere tehnologic în raport cu cuplele de rotaţie sau de translaţie. Utilizarea mecanismelor spaţiale este obligatorie dacă elementul de execuţie are o mişcare spaţială. Uneori se folosesc mecanisme spaţiale, chiar dacă elementul de execuţie are o mişcare plană, dar aceasta se execută într-un plan diferit de cel al elementului conducător. Criteriul **simplităţii** impune utilizarea unor mecanisme cu număr cât mai redus de elemente. Astfel, se recomandă ca mecanismele plane cu $M = 1$ să aibă 4 elemente şi, numai în cazuri justificate, să aibă 6 sau mai multe elemente. Utilizarea mecanismelor cu $n \geq 6$ poate fi motivată prin aceea că ele admit un număr mai mare de condiţii de sinteză şi, în felul acesta, pot răspunde mai bine cerinţelor de ordin funcţional. Astfel, în cazul sintezei pentru generarea curbelor, la mecanismul patrulater articulat se pot impune 9 puncte pentru definirea curbei, iar la un mecanism cu 6 elemente articulate se pot impune 15 puncte (par.2.4.3)

Mecanismele spaţiale cu cea mai largă utilizare au, de asemenea, 4 elemente: mecanismul patrulater articulat spaţial (par.2.1.9) şi mecanismul manivelă - piston spaţial (par.2.1.10). Un mecanism spaţial cu o destinaţie specială este mecanismul cardanic (par.2.1.8) care se utilizează cu rol de cuplaj pentru compensarea abaterilor unghiulare ale arborilor.

În ce priveşte **tipul cuplelor cinematice** se recomandă utilizarea, de preferinţă, a cuplelor de rotaţie. Acestea sunt simple din punct de vedere tehnologic, au o comportare tribologică mai favorabilă decât cuplele de translaţie şi se pot realiza uşor cu ajutorul rulmenţilor. Mecanismele plane cu 4 elemente, având cea mai largă utilizare, conţin cel mult o cuplă de translaţie:

mecanismul patrulater articulat (par.2.1.4.2), mecanismul manivelă piston (par.2.1.4.3), mecanismul cu culisă oscilantă (par.2.1.4.4).

Acționarea mecanismelor cu cuple inferioare (cu bare) se poate face cu motoare rotative (electrice sau termice) sau cu cilindri hidraulici. Prima variantă este cea mai utilizată. Acționarea hidraulică se folosește pentru regimuri caracterizate prin încărcări mari şi viteze reduse. Se pot exemplifica, în acest sens, mecanismele care echipează excavatoarele şi încărcătoarele, mecanismele pentru acționarea trenurilor de aterizare ale avioanelor, mecanismele pentru ridicare uneltelor la maşinile agricole, etc. Cel mai simplu mecanism cu acționare hidraulică este cel cu cilindru oscilant (par.2.1.4.6).

O particularitate a acestor mecanisme este aceea că permit comanda manuală a deplasării relative din cupla conducătoare cilindru – piston. Pentru a mări posibilitățile de mişcare a elementului de execuție, mecanismele cu acționare hidraulică se concep, uneori, cu gradul de mobilitate mai mare ca unitatea. Astfel, mecanismul de încărcător din Fig.6.3 are $M = 2$.

O categorie aparte de mecanisme cu cuple inferioare sunt cele din **structura roboților industriali**. Particularitatea lor este aceea că provin, în general, din lanțuri cinematice deschise, ceea ce conduce la faptul că gradul de mobilitate este egal cu numărul de cuple, iar acestea sunt, în totalitate, conducătoare (par.2.1.5.2). Respectând ideea generală, folosirea cuplelor de translație este restrictivă şi la aceste mecanisme deoarece motoarele pentru deplasarea liniară sunt mai complicate.

Mecanismele cu came se folosesc, în general, pentru a obține mişcări de rotație sau de translație alternativă la elementul condus (tachet).

Cupla superioară camă – tachet cu cea mai largă utilizare este cea obținută prin intermediul unei role articulate datorită existenței contactului cu rostogolire. Tachetul cu suprafață activă plană (sau uşor bombată) se foloseşte pentru curse mici şi în condițiile asigurării unei ungeri foarte bune, datorită existenței frecării de alunecare.

Cupla superioară se poate construi în variantă **deschisă** sau **închisă**. Cupla deschisă este mai simplă din punct de vedere constructiv, dar arcul de menținere a contactului solicită suplimentar mecanismul şi limitează mărimea cursei. Mecanismele cu cuplă superioară închisă se folosesc pentru curse mari şi asigură o funcționare bună dacă precizia de execuție este corespunzătoare.

În general, se folosesc **mecanisme cu came plane** care sunt mai tehnologice decât cele **spațiale**. Acestea din urmă se utilizează când corelația spațială cu celelalte mecanisme ale maşinii reclamă mişcări în plane diferite pentru camă şi tachet. De asemenea, mecanismele spațiale cu camă cilindrică permit obținerea unei curse foarte mari în condițiile unui gabarit redus.

Se poate constata că mecanismele cu came şi cele cu cuple inferioare au un domeniu de aplicabilitate, în mare parte, comun. Opțiunea pentru una dintre aceste categorii de mecanisme trebuie să ia în considerare următoarele particularități constructiv – funcționale.

• Mecanismele cu cuple inferioare sunt mai tehnologice deoarece suprafeţele cuplelor de rotaţie şi de translaţie se execută mai simplu şi mai economic decât profilul camei.

• Mecanismele cu came permit obţinerea, cu mare precizie, a oricărei legi de mişcare pentru elementul condus. Se pot realiza, de asemenea, faze de staţionare localizate foarte precis în cadrul ciclului cinamtic. Legea de mişcare se poate modifica, în funcţie de cerinţele de funcţionare, prin schimbarea camei.

Mecanismele cu roţi dinţate se folosesc, în general, pentru transmiterea mişcării de rotaţie cu raport de transmitere constant. Situaţiile în care sunt necesare angrenaje necirculare (cu raport de transmitere variabil) sunt rare şi nesemnificative. De regulă, transmisiile cu roţi dinţate sunt amplasate între motor şi mecanismul de lucru, având, în majoritatea cazurilor, raportul de transmitere supraunitar. Ele se fabrică şi sub formă tipizată, cu parametri constructivi şi funcţionali standardizaţi (STAS 6848 – 80), purtând denumirea de **reductoare de turaţie**. Reductoarele sunt formate din mecanisme cu roţi dinţate cu axe fixe sau din mecanisme planetare propriu-zise (par.4.2.2). Reductoarele cu roţi dinţate cu axe fixe pot avea un angrenaj (o treaptă) sau mai multe angrenaje legate în serie (mai multe trepte) (par.4.2.1). În construcţia transmisiilor pot interveni mecanisme elementare de diverse tipuri şi în diverse combinaţii.

Axele arborilor de intrare (conducător) şi de ieşire (condus) pot fi paralele sau perpendiculare. În primul caz se aplică, de obicei, angrenaje paralele formate din roţi dinţate cilindrice cu dinţi înclinaţi (par.4.1.4). În cel de-al doilea caz se utilizează fie angrenaje concurente cu roţi conice cu dinţi înclinaţi sau curbi (par.4.1.5.4) fie angrenaje melcate (par.4.1.6). Acestea din urmă sunt, de regulă, inversibile (mişcarea se poate transmite numai de la melc la roata melcată) – proprietate utilă în unele aplicaţii cum ar fi domeniul maşinilor de ridicat. Angrenajele hipode (par.4.1.8) se folosesc destul de rar şi au unele aplicaţii consacrate, cum ar fi: transmisia centrală (formată între cutia de viteze şi diferenţial) de la autovehicule. Angrenajele elicoidale (cilindrice cu axe încrucişate) (par.4.1.7) se utilizează numai cu rol cinematic datorită faptului că au contact punctual între flacuri şi nu pot transmite momente mari. Trebuie de menţionat că, în aplicaţiile practice, angrenajele neparalele au, aproape exclusiv, axele de rotaţie perpendiculare. Angrenajele interioare (par.4.1.3.5) se folosesc, în special, în construcţia reductoarelor planetare (par.4.2.2) având un domeniu de utilizare restrâns. Angrenajele roată dinţată – cremalieră au aplicaţii în structura lanţurilor cinematice de avans ale maşinilor unelte, în construcţia mecanismelor de direcţie ale autovehicolelor, etc.

Un rol aparte în aplicaţiile tehnice îl au mecanismele diferenţiale (par.4.2.2). Deşi aceste mecanisme, considerate separat, au $M = 2$, ele se utilizează în combinaţie cu lanţurile cinematice de închidere rezultând mecanisme complexe cu $M = 1$ (par.4.2.2.1). Cea mai cunoscută aplicaţie a mecanismelor diferenţiale este cea care intervine în construcţia autovehiculelor

(par.4.2.2.4). Mecanismele diferențiale se utilizează, de asemenea, în construcția unor maşini unelte cu rolul de a combina două mişcări de rotație.

Mecanismele cu şurub (par.2.2.5) se folosesc pentru obținerea, la elementul de execuție, a unei mişcări de translație rectilinii. Caracteristic pentru aceste mecanisme este faptul că mişcarea de translație condusă este uniformă în condițiile în care mişcarea de rotație conducătoare este, de asemenea, uniformă. Comparativ cu alte mecanisme, deplasarea de translație corespunzătoare unei rotații a elementului conducător este mult mai redusă. Cele mai importante aplicații ale mecanismelor cu şurub se înregistrează în construcția maşinilor unelte şi a maşinilor de ridicat.

Mecanismele combinate au, în general, o structură complexă şi se utilizează în situații speciale, când condițiile funcționale şi constructive nu pot fi îndeplinite de mecanisme mai simple. Pentru exemplificare, în Fig.6.3 este reprezentat mecanismul de introducere a firului de bătătură în rost utilizat în construcția unei maşini de țesut. Mecanismul este o combinație între un mecanism manivelă piston ABCD cu $AB = BC$ şi un mecanism planetar format din roata centrală fixă 4, sateliții 5(5'), 6 şi portsatelitul 1. Satelitul 6 este solidar cu biela BC, iar portsatelitul este solidar cu manivela AB. Elementul de execuție este tija (patina) 3. Rațiunea folosirii acestui mecanism constă în obținerea unei curse mari la elementul de execuție în condițiile unui gabarit redus. Dacă s-ar utiliza numai mecanismul manivelă – piston cu $AB = BC$, acesta ar avea unghiuri de presiune foarte mari, ajungând la 90^0, care ar produce autoblocarea. În afară de aceasta, la $\varphi_1 = 90^0,\ 270^0$ se înregistrează o poziție critică însoțită de o nedeterminare (par.2.1.4.3). Aceste dezavantaje pot fi eliminate dacă se majorează lungimea bielei, dar, în acest caz, se măreşte gabaritul funcțional al mecanismului, iar cursa are valoarea $2 \cdot AB$. Prin asociere cu mecanismul planetar, antrenarea mecanismului manivelă – piston se face atât direct, la elementul AB, cât şi prin intermediul satelitului 6, la elementul BC. Acest lucru face să se evite autoblocarea şi să se elimine nedeterminarea din poziția critică. Mai mult decât atât, la trecerea prin poziția critică ($C \equiv A$), punctul C se deplasează în acelaşi sens, astfel încât cursa este de $4 \cdot AB$. Menționăm că lanțul cinematic format din roțile dințate 4, 5(5'), 6 este pasiv (par.1.2.3.2), iar pentru funcționarea mecanismului, viteza unghiulară a bielei BC trebuie să aibă aceeaşi valoare, fie că este transmisă prin mecanismul manivelă – piston, fie prin mecanismul planetar. Pentru aceasta, între numerele de dinți ale roților 4 şi 6 trebuie să existe relația $z_4 = 2 \cdot z_6$.

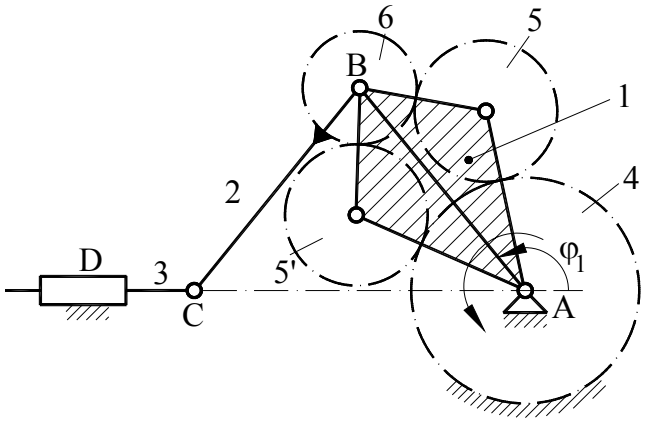


Fig.6.3

*

Procesul de adoptare a schemei cinematice are un pronunţat caracter creator. De aceea experienţa şi tradiţia trebuie îmbinate atât cu tehnicile şi metodele intuitive de creaţie, cât şi cu metode logice – combinatorice – deductive ale performanticii [43]. Este semnificativă, în acest sens, ingeniozitatea de care a dat dovadă proiectantul mecanismului din Fig.6.3, care a reuşit să găsească o soluţie subtilă ce răspunde unor condiţii contradictorii: cursă mare, gabarit redus, evitarea nedeterminării în poziţiile critice. De mare utilitate sunt culegerile, atlasele şi cataloagele de mecanisme [3], [13], [15] care reprezintă acumularea unei preţioase experienţe inginereşti.

6.3. STRATEGII (PROCEDURI) DE PROIECTARE

După cum am arătat, în procesul de proiectare intervin o serie de operaţii de analiză şi sinteză a mecanismelor în asociere cu proiectarea organologică. Relaţia dintre aceste operaţii, determinată de circulaţia datelor între ele, defineşte o strategie de proiectare. Pentru a urmări mai comod dezvoltările legate de această problemă vom trece în revistă tipurile principale de analiză şi de sinteză, tratate în lucrare, precizând, pentru fiecare, datele de intrare şi datele de ieşire. Menţionăm că într-o operaţie de analiză datele de intrare sunt de ordin constructiv, iar datele de ieşire sunt caracteristici

funcționale. În operațiile de sinteză natura acestor date se inversează. Vom caracteriza, de asemenea, modelul matematic al fiecărei operații, indicând următoarele elemente ale acestuia:

- Principiile şi legile mecanice pe care se fundamentează;
- Metodele care derivă din acestea;
- Proprietățile matematice ale modelului.

1) Analiza cinematică (AK) – par.2.1.

Date de intrare:

- Parametrii geometrici constructivi ai schemei cinematice (**pg**)
- Legea de mişcare din cupla conducătoare ($\boldsymbol{\omega(\varphi)}$)

De regulă mişcarea relativă din cupla conducătoare se consideră uniformă, iar viteza $\omega = \text{ct.}$ este dată prin tema de proiectare şi pusă de acord cu viteza nominală a motorului.

Date de ieşire:

- Parametrii care determină complet poziția şi mişcarea (distribuția de viteze şi accelerații) pentru orice element al mecanismului (**pk(φ)**)

Modelul matematic:

- Ecuațiile cinematice ale solidului rigid şi ale sistemelor de rigide;
- Metoda intersecției locurilor geometrice, metoda ecuațiilor vectoriale, metoda contururilor vectoriale închise, metoda transformării de coordonate, metoda funcțiilor de transmitere şi altele;
- Problema pozițiilor: sisteme de ecuații algebrice neliniare; problema vitezelor şi accelerațiilor: sisteme de ecuații algebrice liniare.

2) Analiza cinetostatică (AKS) – par.2.2.

Date de intrare:

- **pg**;
- **pk(φ)**;
- Forțele tehnologice $\mathbf{F_t(\varphi)}$;

• Parametrii masici – masele elementelor, poziţiile centrelor de masă, momentele de inerţie (**pm**);
• Parametrii tribologici – coeficienţii de frecare din cuplele cinematice şi parametrii constructivi ai acestora care determină comportarea tribologică (**pt**).

Date de ieşire:
• Forţele de legătură – reacţiunile din cuplele cinematice şi forţele de frecare (**R(φ)**);
• Momentul de echilibrare (**Me(φ)**);
• Randamentul mecanic (η).

Modelul matematic:
• Principiul lui d'Alembert;
• Metoda cinetostatică, exprimată prin ecuaţii de echilibru în care intervin forţele aplicate şi de inerţie – ca date cunoscute şi forţele de legătură – ca necunoscute;
• Analiza cinetostatică fără frecare: sisteme de ecuaţii algebrice liniare; analiza cinetostatică în prezenţa frecării: sisteme de ecuaţii algebrice neliniare.

3) Analiza preciziei (AP) – par.2.3.

Date de intrare:
• **pg**;
• **pk(φ)**;
• Abaterile elementare (**ae**) şi legile lor de distribuţie.

Date de ieşire:
• Abaterile funcţionale (**af(φ)**) şi legile lor de distribuţie.

Modelul matematic:
• Ecuaţiile cinematice ale sistemelor de rigide şi teoria probabilităţilor;
• Metoda deterministă (liniară), metoda stocastică;

• Sisteme de ecuații similare cu cele de la analiza cinematică (**AK**) şi prelucrări stocastice de date numerice.

4) Sinteza dimensională (SD) – par.2.4.

Date de intrare:

• Condițiile de sinteză **(cs)**

Condițiile de sinteză pot avea caracter cinematic (transmiterea mişcării) sau dinamic (transmiterea forțelor). Aceste condiții sunt numeroase şi variate generând o problematică foarte diversificată.

Date de ieşire:

• Parametrii geometrici ai schemei cinematice (**pg**)

Modelul matematic:

• Principii şi metode care intervin la analiza cinematică (**AK**) şi la analiza cinetostatică (**AKS**), teoria aproximării funcțiilor, optimizarea neliniară şi altele;

• Sisteme de ecuații şi inecuații algebrice liniare şi neliniare, algoritmi de optimizare.

Modelele matematice ale sintezei dimensionale provin, de multe ori, din cele utilizate în analiza cinematică (**AK**) sau în analiza cinetostatică (**AKS**) prin schimbarea parametrilor necunoscuți. Problemele de sinteză sunt, uneori, nedeterminate, iar pentru precizarea unei soluții unice se pot formula ca probleme de optimizare. Alegerea funcției obiectiv are, în general, finalitate economică urmărind, de exemplu, minimizarea gabaritului cu consecințe legate de consumul de materiale sau maximizarea randamentului pentru reducerea consumului de energie.

5) Echilibrarea forțelor de inerție (ECH) – par.5.3.

Date de intrare:

• **pg**;

• **pk(φ)**;

• **pm**.

Date de ieşire:
- **pm**.

În cadrul operației de echilibrare a forțelor de inerție se modifică repartiția maselor astfel că paraemtrii masici (**pm**) de ieşire sunt diferiți în raport cu cei de intrare.

Modelul matematic:
- Expresia torsorului forțelor de inerție pentru solidul rigid şi pentru sistemele de rigide;
- Metoda punctelor principale, metoda analizei armonice, etc.
- Ecuații algebrice liniare.

Operația de echilibrare poate fi considerată o operație de sinteză deoarece condițiile inițiale sunt de natură funcțională: anularea forțelor de inerție, iar rezultatele finale au caracter constructiv: redistribuția maselor.

6) Analiza dinamică (AD) – par.5.1.

Date de intrare:
- **pg**;
- **pk(φ)**;
- **pm**;
- $\mathbf{F_f(\varphi)}$;
- **Me(φ)**;
- Gradul de neuniformitate recomandat (δ).

Date de ieşire:
- Legea de mişcare a elementului de reducere exprimată sub forma $\boldsymbol{\omega(\varphi)}$ sau $\boldsymbol{\varphi(t)}$;
- momentul de inerție al volantului ($\mathbf{J_v}$).

Modelul matematic:
- Ecuația energiei cinetice aplicată sistemului de rigide;
- Ecuații diferențiale.

Operația de analiză dinamică conține şi elemente de sinteză care se referă la determinarea momentului de inerție al volantului (parametru constructiv) în funcție de gradul de neuniformitate recomandat (parametru funcțional).

7) Analiza elastodinamică (AED) – par.5.2.

Date de intrare:

- **pg**;
- **pk(φ)**;
- **pm**;
- $\mathbf{F_t(\varphi)}$;
- **Me(φ)**;
- Parametrii elastici şi de amortizare (**pea**).

Date de ieşire:

- Legea de mişcare a elementului condus $\boldsymbol{\psi(t)}$;
- Parametrii fenomenului vibrator (**pv**).

Dacă modelul fizic are mai multe grade de libertate datele de ieşire conțin un număr de legi de mişcare corespunzător.

Modelul matematic:

- Ecuația energiei cinetice, principiul lui d'Alambert;
- Ecuații diferențiale.

Adoptarea unei strategii de proiectare, mai simple sau mai complexe, depinde de destinația mecanismului, regimului de funcționare, nivelul de siguranță în exploatare, condițiile tehnice privind nivelul zgomotului şi a vibrațiilor, etc. În cele ce urmează se propun câteva strategii (proceduri) de proiectare precizându-se situațiile în care se recomandă utilizarea lor. Astfel, în cazul unui mecanism care funcționează la o viteză relativ redusă, fără pretenții tehnice deosebite, se poate adopta strategia ilustrată prin schema din Fig.6.4 în care se folosesc numai sinteza dimensională (**SD**), analiza cinematică (**AK**) şi analiza cinetostatică (**AKS**) în asociere, desigur, cu proiectarea organologică (**PO**). Se observă că între blocurile **3(AKS)** şi **4(PO)** se formează un ciclu iterativ. În prima fază a acestui ciclu se efectuează operația **4(AKS)** luând în

considerare numai forțele tehnologice $\mathbf{F_t(\varphi)}$ şi neglijând forțele de inerție şi de greutate care depind de parametrii masici **pm**, necunoscuți. Iterațiile se opresc dacă sunt îndeplinite condițiile de rezistență şi durabilitate testate în blocul **4(PO)**.

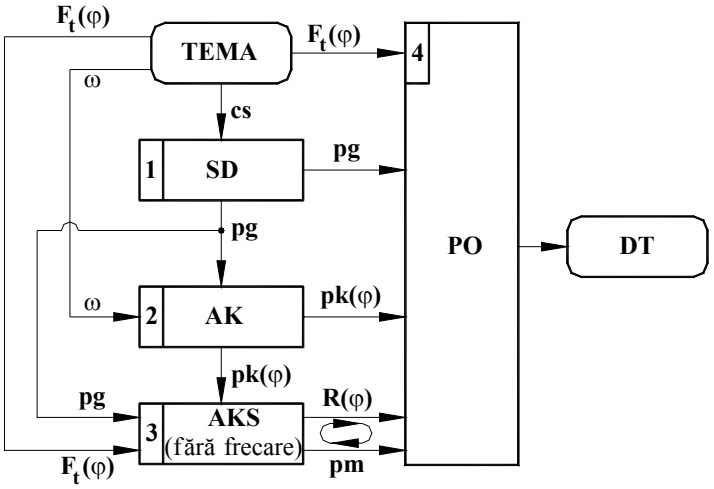


Fig.6.4

În cazul în care viteza de funcționare conduce la forțe de inerție mari, care trebuie echilibrate, iar precizia de funcționare este importantă în raport cu domeniul de utilizare al mecanismului, se recomandă procedura arătată în Fig.6.5. Se observă că, pe lângă operațiile care intervin la procedura precedentă (Fig.6.4), se utilizează operațiile de echilibrare (**4, ECH**) şi de analiză a preciziei (**5, AP**). Ca şi în cazul anterior, între blocurile **3(AKS)** şi **6(PO)** se formează un ciclu iterativ care începe şi se finalizează în acelaşi mod. Dacă, prin operația de sinteză dimensională, comportarea cinematică nu este controlată suficient, după efectuarea acestei operații (**1(SD)**), se fac unele verificări în cadrul blocului (**7**). Astfel, se poate testa valoarea maximă a vitezei sau a accelerației elementului de execuție. Dacă rezultatul este favorabil (**DA**) se trece la faza următoare. În caz contrar (**NU**), se revine la blocul 1(SD) în vederea modificării parametrilor constructivi **pg**. Dacă proiectantul consideră că randamentul mecanismului trebuie controlat, se poate introduce un bloc de testare (**8**) după analiza cinetostatică (**3(AKS)**). În cazul în care valoarea randamentului este prea mică se poate acționa în blocul **1(SD)** şi/sau în blocul **6(PO)**. În primul caz se recomandă redimensionarea schemei (parametrii **pg**) astfel încât să se reducă unghiurile de presiune. În cazul al doilea trebuie să se revadă proiectarea cuplelor şi, în special, a cuplelor de translație (par.2.2.3.2) pentru a reduce forțele de frecare, astfel încât se revine în blocul **6(PO)** pentru a

modifica parametrii **pt**. Existența blocului de analiză a preciziei (**5(AP)**) impune verificarea abaterilor funcționale (**af**) în secvența (**9**), care se pot corecta modificând abaterile elementare (**ae**) în cadrul proiectării organologice (**6(PO)**).

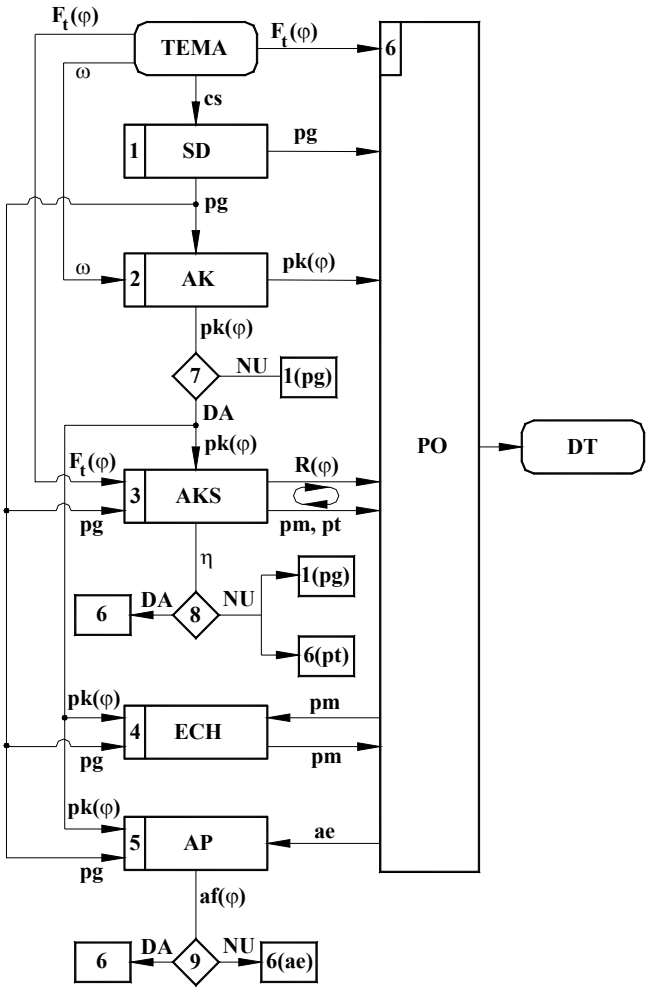


Fig.6.5

În cazul în care mecanismul funcționează la viteză mare, iar efectele dinamice (forțe de inerție, deformații elastice) sunt importante se poate utiliza o procedură ca cea din Fig.6.6. În această schemă intervin şi operațiile de analiză dinamică (**5(AD)**) şi de analiză elastodinamică (**6(AED)**). Testările prezentate la procedura anterioară (Fig.6.5) pot apărea şi aici, astfel încât nu au mai fost indicate în schemă. Legea de mişcare a elementului conducător **ω(φ)**, rezultată

din analiza dinamică (**5(AD)**), poate fi introdusă în analiza cinematică (**2(AK)**) şi, prin intermediul parametrilor cinematici (**pk**), în analiza cinetostatică (**3(AKS)**). Aceasta conduce la o determinare mai precisă a forţelor de inerţie şi a solicitărilor elementelor. Prin analiza elastodinamică (6(AED)) se determină legea de mişcare a elementuluid e execuţie $\boldsymbol{\psi(t)}$, care se abate de la aceeaşi lege determinată din condiţii cinematice. Dacă aceste abateri nu sunt admisibile (blocul **8**) se revine în blocul **7(PO)** pentru a modifica parametrii masici (**pm**) şi cei elastici şi de amortizare (**pea**). Analiza elastodinamică permite, de asemenea, determinarea parametrilor vibraţiilor (**pv**) – pulsaţia proprie, coeficientul de amplificare, coeficientul dinamic, etc. Testarea acestora, în blocul **9**, conduce la formularea unei concluzii privind efectul fenomenului vibrator asupra funcţionării mecanismului. În cazul în care acest efect trebuie atenuat se acţionează în blocul **7(PO)** pentru a modifica parametrii **pm** şi **pea**.

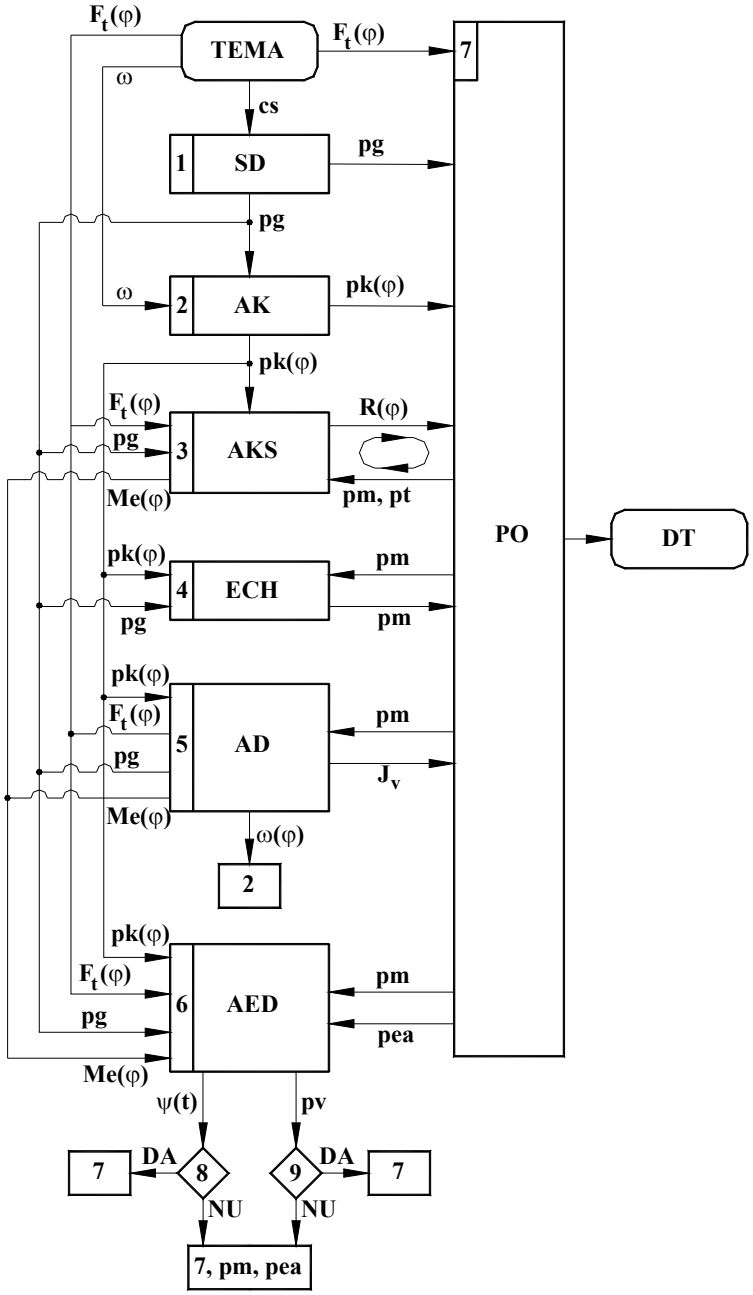

TEMA
SD
AK
AKS
ECH
AD
AED
PO
DT
cs
pg
pk(φ)
R(φ)
pm, pt
pm
pea
Me(φ)
ω(φ)
ψ(t)
pv
DA
NU
7, pm, pea

Fig.6.6

Anexe

ANEXA 1

NOȚIUNI DE GEOMETRIE ANALITICĂ ŞI DIFERENȚIALĂ

1.1. Transformări de coordonate

- **Transformări între două sisteme carteziene plane** (Fig.A.1)

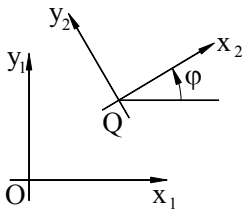


Fig.A.1

Poziția sistemului Qx_2y_2 în raport cu sistemul Ox_1y_1 este dată prin unghiul φ şi prin coordonatele punctului Q : x_{1Q} şi y_{1Q}.

Transformarea $Qx_2y_2 \rightarrow Ox_1y_1$

$$\begin{cases} x_1 = x_{1Q} + x_2\cos\varphi - y_2\sin\varphi \\ y_1 = y_{1Q} + x_2\sin\varphi + y_2\cos\varphi \end{cases} \qquad (A.1)$$

Dacă $O \equiv Q$ se obține

$$\begin{cases} x_1 = x_2\cos\varphi - y_2\sin\varphi \\ y_1 = x_2\sin\varphi + y_2\cos\varphi \end{cases} \qquad (A.2)$$

Dacă $\varphi = 0$ se obține

$$\begin{cases} x_1 = x_{1Q} + x_2 \\ y_1 = y_{1Q} + y_2 \end{cases} \qquad (A.3)$$

Transformarea $Ox_1y_1 \rightarrow Qx_2y_2$

$$\begin{cases} x_2 = -x_{1Q}\cos\varphi - y_{1Q}\sin\varphi + x_1\cos\varphi + y_1\sin\varphi \\ y_2 = x_{1Q}\sin\varphi - y_{1Q}\cos\varphi - x_1\sin\varphi + y_1\cos\varphi \end{cases} \qquad (A.4)$$

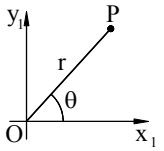
Dacă $O \equiv Q$ se obține

$$\begin{cases} x_2 = x_1 \cos\varphi + y_1 \sin\varphi \\ y_2 = -x_1 \sin\varphi + y_1 \cos\varphi \end{cases} \tag{A.5}$$

Dacă $\varphi = 0$ se obține

$$\begin{cases} x_2 = -x_{1Q} + x_1 \\ y_2 = -y_{1Q} + y_1 \end{cases} \tag{A.6}$$

- **Transformări dintr-un sistem cartezien într-un sistem polar** (Fig.A.2)



$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ tg\theta = \dfrac{y}{x} \end{cases} \tag{A.7}$$

Fig.A.2

1.2. Tangenta şi normala la o curbă

Fie o curbă dată prin ecuațiile parametrice în coordonate carteziene

$$\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \end{aligned} \tag{A.8}$$

Ecuațiile tangentei într-un punct $P(x_P, y_P)$ este

$$\frac{y - y_P}{x - x_P} = \frac{y'_P}{x'_P}, \tag{A.9}$$

în care x'_P şi y'_P sunt derivatele $x'(t)$ şi $y'(t)$ în punctul P.

Ecuația normalei în P este

$$\frac{y - y_P}{x - x_P} = -\frac{x'_P}{y'_P}. \tag{A.10}$$

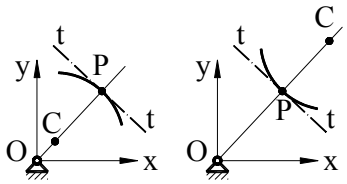
1. 3. Raza de curbură, convexitatea, concavitatea

Raza de curbură într-un punct $P(x, y)$, a unei curbe dată sub forma (A.8), este

$$|R_c| = \frac{(x'^2_P + y'^2_P)^{3/2}}{|x'y'' - y'x''|}. \qquad (A.11)$$

Această formulă nu oferă informații cu privire la orientarea concavității (convexității) curbei în P.

În terminologia camelor plane de rotație, se spune că un profil este **convex** într-un punct P, când centrul de rotație O şi centrul de curbură C se găsesc de aceeaşi parte a tangentei la curbă în P (Fig.A.3.a). Desigur, profilul este **concav** când cele două puncte O şi C se află de o parte şi de cealaltă parte a tangentei (Fig.A.3.b).



***a)** convex* ***b)** concav*

Fig. A.3

Tangenta la profil în P are ecuația

$$f(x, y) = (y - y_P)x'_P - (x - x_P)y'_P = 0.$$

În cazul profilului convex există inegalitatea

$$f(x_0, y_0) \cdot f(x_C, y_C) > 0,$$

iar în cazul profilului concav,

$$f(x_0, y_0) \cdot f(x_C, y_C) < 0.$$

Având în vedere că $x_0 = y_0 = 0$, iar x_C şi y_C au expresiile [11]

$$x_C = x_P - \frac{y'_P(x'^2_P + y'^2_P)}{x'_P y''_P - y'_P x''_P}; \quad y_C = y_P + \frac{x'_P(x'^2_P + y'^2_P)}{x'_P y''_P - y'_P x''_P}$$

se obține

$$f(x_0, y_0) \cdot f(x_C, y_C) = \frac{(x'^2_P + y'^2_P)(x_P y'_P - y_P x'_P)}{x'^2_P y'^2_P (x'_P y''_P - y'_P x''_P)}.$$

Eliminând factorii pozitivi, rezultă că semnul produsului $f(x_0, y_0) \cdot f(x_C, y_C)$ depinde numai de semnul expresiei

$$E_{s1} = \frac{x_P y'_P - y_P x'_P}{x'_P y''_P - y'_P x''_P}.$$

În felul acesta, raza de curbură R_C, pentru un punct curent al profilului, de coordonate (x, y), se calculează cu formula

$$R_C = \frac{(x'^2+y'^2)^{3/2}}{|x'y''-y'x''|} \cdot \mathrm{SGN}\left(\frac{xy'-yx'}{x'y''-y'x''}\right)$$

sau, mai simplu,

$$R_C = \frac{(x'^2+y'^2)^{3/2}}{x'y''-y'x''} \cdot \mathrm{SGN}(xy'-yx'), \qquad (A.12)$$

în care funcția $\mathrm{SGN} = \pm 1$ după cum expresia din paranteză este pozitivă sau negativă.

Dacă R_C rezultă, din formula (A.12), cu semnul (+) profilul este convex, iar dacă rezultă cu semnul (-) este concav.

În cazul camelor în mişcare de translație paralelă cu axa Ox, se spune că profilul este convex într-un punct P dacă $y_P - y_C > 0$ (Fig.A.4.a) şi concav dacă $y_P - y_C < 0$ (Fig.A.4.b). Diferența $y_P - y_C$ are expresia

$$y_P - y_C = -\frac{x'_P\,(x'^2_P+y'^2_P)}{x'_P\,y''_P - y'_P\,x''_P},$$

iar semnul său depinde numai de semnul expresiei

$$E_{s2} = \frac{-x'_P}{x'_P\,y''_P - y'_P\,x''_P}.$$

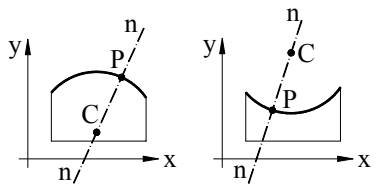
Astfel, raza de curbură într-un punct curent se calculează cu formula

$$R_C = \frac{(x'^2+y'^2)^{3/2}}{|x'y''-y'x''|} \cdot \mathrm{SGN}\left(\frac{-x'}{x'y''-y'x''}\right)$$

sau, mai simplu,

$$R_C = \frac{-(x'^2+y'^2)^{3/2}}{x'y''-y'x''} \cdot \mathrm{SGN}(x'). \qquad (A.13)$$

Dacă R_C rezultă, din formula (A.13), cu semnul (+) profilul este convex, iar dacă rezultă cu semnul (-) este concav.



***a)** convex* ***b)** concav*

Fig. A.4

1.4. Unghiul de poziție al unui vector

Se consideră vectorul $\overline{r} = \overline{AB}$ (Fig.A.4.1) exprimat în funcție de proiecțiile sale pe axele unui sistem de coordonate

$$\overline{r} = \overline{AB} = \overline{i}(x_B - x_A) + \overline{j}(y_B - y_A).$$

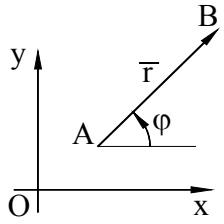


Fig. A.4.1

Unghiul de poziție φ al acestui vector, măsurat în sens trigonometric, de la semiaxa pozitivă Ox este

$$\varphi = \text{arctg}\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}, \qquad \text{(A.13.1)}$$

Cadranul în care se înscrie unghiul se stabileşte din tabelul următor, în funcție de semnele proiecțiilor vectorului $\overline{r}$.

$x_B - x_A$	+	-	-	+
$y_B - y_A$	+	+	-	-
$\varphi \in$	$[0,\ \pi/2]$	$[\pi/2,\ \pi]$	$[\pi,\ 3\pi/2]$	$[3\pi/2,\ 2\pi]$

Precizăm că limbajele de programare şi sistemele de programe (MATHCAD, MATLAB) au funcții speciale pentru calculul acestui unghi. Astfel în MATHCAD există funcția

angle(x, y)

care calculează unghiul φ şi în care

$$x = x_B - x_A$$
$$y = y_B - y_A.$$

ANEXA 2

NOȚIUNI DE ANALIZĂ MATEMATICĂ

2.1. Derivatele funcțiilor inverse

$$y = f(x) \tag{A.14}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{df}{dx}} = \frac{1}{f'(x)} \tag{A.15}$$

$$\frac{d^2x}{dy^2} = -\frac{\frac{d^2f}{dx^2}}{\left(\frac{df}{dx}\right)^3} = -\frac{f''(x)}{\left(f'(x)\right)^3} \tag{A.16}$$

2.2. Derivatele funcțiilor implicite

$$F(x, y) = 0 \tag{A.17}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} \tag{A.18}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 - 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\cdot\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2}{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^3} \tag{A.19}$$

2.3. Derivatele funcțiilor date parametric

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \tag{A.20}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{y'(t)}{x'(t)} \tag{A.21}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d^2y}{dt^2}\cdot\frac{dx}{dt}-\frac{d^2x}{dt^2}\cdot\frac{dy}{dt}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3}=\frac{y''(t)x'(t)-x''(t)y'(t)}{(x'(t))^3} \tag{A.22}$$

ANEXA 3

MIŞCAREA RELATIVĂ DINTRE DOUĂ CORPURI (ROȚI DINȚATE) CARE EXECUTĂ MIŞCĂRI ABSOLUTE DE ROTAȚIE ÎN JURUL A DOUĂ AXE FIXE

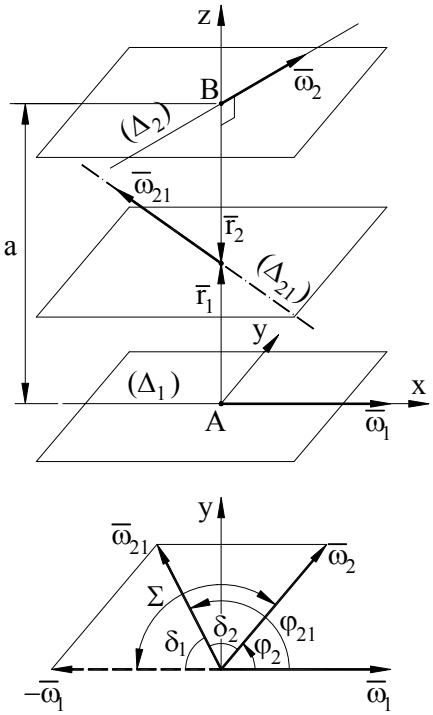


Fig. A.5

Se consideră două corpuri (roți dințate) care se rotesc cu vitezele unghiu-lare $\overline{\omega}_1$ şi $\overline{\omega}_2$ în jurul axelor fixe (Δ_1) şi (Δ_2) (Fig.A.5).

Se definesc următorii parametri:

a – distanța dintre axele (Δ_1) şi (Δ_2) măsurată pe perpendiculara comună ;

Σ - cel mai mic unghi cu care trebuie rotit vectorul $\overline{\omega}_1$ pentru a fi adus în poziția de paralelism cu vectorul $\overline{\omega}_2$, în aşa fel ca sensurile să fie opuse ;

i_{12} - raportul de trans-mitere definit prin relația

$$i_{12}=\frac{|\overline{\omega}_1|}{|\overline{\omega}_2|}.$$

3.1. Axa instantanee a mişcării relative

Direcția axei instantanee a mişcării relative este indicată de suportul vectorului $\overline{\omega}_{21} = \overline{\omega}_2 - \overline{\omega}_1$.

$$\overline{\omega}_{21} = \bar{i} \cdot |\omega_2| \cos\varphi_2 + \bar{j} \cdot |\omega_2| \sin\varphi_2 - \bar{i} \cdot |\omega_1| = \bar{i} \cdot (|\omega_2| \cos\varphi_2 - |\omega_1|) +$$
$$+ \bar{j} \cdot |\omega_2| \sin\varphi_2$$

$$\mathrm{tg}\varphi_{21} = \frac{|\omega_2| \sin\varphi_2}{|\omega_2| \cos\varphi_2 - |\omega_1|} = \frac{\sin\varphi_2}{\cos\varphi_2 - i_{12}}.$$

Se determină direcția vectorului $\overline{\omega}_{21}$ cu ajutorul unghiurilor δ_1 şi δ_2 formate de acest vector cu $-\overline{\omega}_1$ şi $\overline{\omega}_2$, având în vedere că $\delta_1 = \pi - \varphi_{21}$, $\delta_2 = \varphi_{21} - \varphi_2$ şi $\varphi_2 = \pi - \Sigma$,

$$\mathrm{tg}\delta_1 = \frac{\sin\Sigma}{i_{12} + \cos\Sigma} \tag{A.24}$$

$$\mathrm{tg}\delta_2 = \frac{i_{12} \sin\Sigma}{1 + i_{12} \cos\Sigma}. \tag{A.25}$$

Poziția axei instantanee a mişcării relative este determinată de vectorii $\bar{r}_1$ şi $\bar{r}_2$ (Fig.A.5). Vectorul $\bar{r}_2 = \overline{BC}$ rezultă din relația [12]:

$$\bar{r}_2 = \overline{BC} = \frac{\overline{\omega}_{21} \times \overline{v}_{B21}}{\omega_{21}^2} = \frac{\overline{\omega}_{21} \times (-\overline{\omega}_1 \times \overline{AB})}{\omega_{21}^2} = \overline{AB} \cdot \frac{\overline{\omega}_1 \times (\overline{\omega}_2 - \overline{\omega}_1)}{\omega_{21}^2} =$$
$$= \overline{AB} \cdot \frac{|\omega_1| \cdot |\omega_2| \cos\varphi_2 - \omega_1^2}{\omega_1^2 + \omega_2^2 - 2|\omega_1| \cdot |\omega_2| \cos\varphi_2} = \overline{AB} \cdot \frac{i_{12}(\cos\varphi_2 - i_{12})}{1 + i_{12}^2 - 2i_{12} \cos\varphi_2}$$

$$\bar{r}_1 = \overline{AB} + \bar{r}_2 = \overline{AB} \cdot \frac{1 - i_{12} \cos\varphi_2}{1 + i_{12}^2 + 2i_{12} \cos\varphi_2}$$

$$r_1 = a \frac{1 + i_{12} \cos\Sigma}{1 + i_{12}^2 + 2i_{12} \cos\Sigma} \tag{A.26}$$

$$r_2 = a \frac{-i_{12}(\cos\Sigma + i_{12})}{1 + i_{12}^2 + 2i_{12} \cos\Sigma}. \tag{A.27}$$

Din relațiile (A.24) – (A.27) se deduc următoarele formule utile pentru calculul raportului de transmitere,

$$i_{12} = \frac{\sin\delta_2}{\sin\delta_1} \tag{A.28}$$

$$i_{12} = -\frac{r_2}{r_1} \cdot \frac{\cos\delta_2}{\cos\delta_1}. \qquad (A.29)$$

3.2. Axoidele mişcării relative

Axoidele mişcării relative sunt generate prin rotirea axei instantanee (Δ_{21}) în jurul axelor (Δ_1) şi (Δ_2). Axoida solidară cu roata 1 se obține prin rotirea dreptei (Δ_{21}) de ecuații

$$\begin{aligned} y &= -z \cdot tg\delta_1 \\ z &= r_1 \end{aligned} \qquad (A.30)$$

în jurul dreptei (Δ_1) de ecuație

$$y = z = 0.$$

Cercul generator [28] are ecuațiile

$$\begin{aligned} x &= \lambda \\ y^2 + z^2 &= \mu^2. \end{aligned} \qquad (A.31)$$

Din sistemul format de ecuațiile (A.30) şi (A.31) rezultă o relație între parametrii λ şi μ,

$$\lambda^2 \cdot tg^2\delta_1 + r_1^2 = \mu^2. \qquad (A.32)$$

Axoida căutată se obține eliminând parametrii λ şi μ între relațiile (A.32) şi ecuațiile cercului generator (A.31), rezultând

$$x^2 \cdot tg^2\delta_1 - y^2 - z^2 + r_1^2 = 0$$

sau

$$\frac{y^2}{r^2} + \frac{z^2}{r_1^2} - \frac{x^2 tg^2\delta_1}{r_1^2} - 1 = 0. \qquad (A.33)$$

Ecuația (A.33) reprezintă un hiperboloid de rotație cu o pânză. Intersecțiile sale cu planele Axz ($y = 0$) şi Ayz ($x = 0$) reprezintă o hiperbolă,

$$\frac{z^2}{r_1^2} - \frac{x^2 tg^2\delta_1}{r_1^2} - 1 = 0$$

şi un cerc,

$$x^2 + z^2 = r_1^2.$$

Desigur, axoida solidară cu roata 2 este tot un hiperboloid de rotație în jurul axei (Δ_2). În Fig.A.6 se reprezintă cei doi hiperboloizi în ipoteza uzuală $\Sigma = \frac{\pi}{2}$ şi $i = 1{,}5$ ($\delta_1 = 33{,}69^0$, $\delta_2 = 56{,}31^0$).

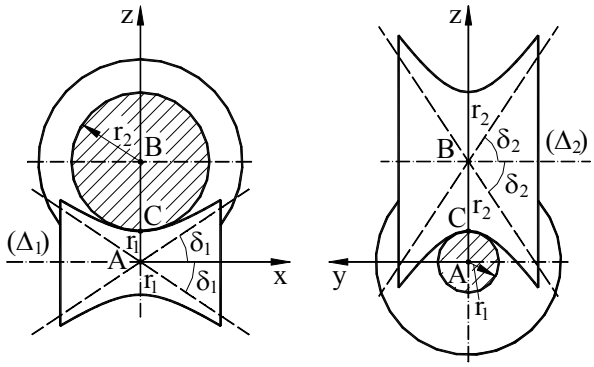


Fig. A.6

ANEXA 4

DEMONSTRAȚIA RELAȚIEI $a_x \geq a$

a, α_w - distanța dintre axe şi unghiul de angrenare la un angrenaj paralel, în ipoteza absenței jocului dintre profile.

a_w, α_{wx} - distanța dintre axe şi unghiul de angrenare în ipoteza obținerii jocului radial standardizat.

Distanța a se calculează cu relația

$$a = m \cdot \frac{z_1 + z_2}{2} \cdot \frac{\cos\alpha_0}{\cos\alpha_w} \tag{4.39}$$

în care α_w se determină din relația

$$\mathrm{inv}\alpha_w = \mathrm{inv}\alpha_0 + 2 \cdot \frac{x_1 + x_2}{z_1 + z_2} \cdot \mathrm{tg}\alpha_0 . \tag{4.37}$$

Distanța a_x se calculează cu relația

$$a_x = m\frac{z_1 + z_2}{2} + m(x_1 + x_2) , \tag{4.43}$$

iar unghiul de angrenare α_{wx} rezultă, în funcție de a_x, dintr-o relație similară cu (4.39),

$$a_x = m \cdot \frac{z_1 + z_2}{2} \cdot \frac{\cos\alpha_0}{\cos\alpha_{wx}} . \tag{A.34}$$

În ipoteza

$$a_x \geq a , \tag{A.35}$$

din (4.39) şi (A.34) se obține

$$\cos\alpha_{wx} \leq \cos\alpha_w \tag{A.36}$$

sau

$$\alpha_{wx} \geq \alpha_w , \ \alpha_w \in \left(0, \ \frac{\pi}{2}\right). \tag{A.37}$$

Deci, pentru a arăta că relația (A.35) este adevărată este suficient să demonstrăm relația (A.36).

Din (4.37) rezultă

$$2 \cdot \frac{x_1 + x_2}{z_1 + z_2} = \frac{\mathrm{inv}\alpha_w - \mathrm{inv}\alpha_0}{\mathrm{tg}\alpha} , \tag{A.38}$$

iar din (4.43) şi (A.34) se obține

$$2 \cdot \frac{x_1 + x_2}{z_1 + z_2} = \frac{\cos\alpha_0}{\cos\alpha_{wx}} - 1 . \tag{A.39}$$

Egalitățile (A.38) şi (A.39) conduc la o relație între α_{wx} şi α_w,

$$\cos\alpha_{wx} = \frac{\sin\alpha_0}{\mathrm{tg}\alpha_w - \alpha_w + \alpha_0} . \tag{A.40}$$

Introducând $\cos\alpha_{wx}$ (A.40) în (A.36) se obține relația

$$\frac{\sin\alpha_0}{\mathrm{tg}\alpha_w - \alpha_w + \alpha_0} \leq \cos\alpha_w \tag{A.41}$$

care trebuie demonstrată. Deoarece $\mathrm{tg}\alpha_w - \alpha_w + \alpha_0 > 0$, se poate scrie

$$\cos\alpha_w \cdot (\mathrm{tg}\alpha_w - \alpha_w + \alpha_0) - \sin\alpha_0 \geq 0$$

$$f(\alpha_w) = \sin\alpha_w - (\alpha_w - \alpha_0) \cdot \cos\alpha_w - \sin\alpha_0 \geq 0 . \tag{A.42}$$

Se derivează funcția $f(\alpha_w)$ şi se egalează cu zero, pentru a determina valorile extreme,

$$f'(\alpha_w) = (\alpha_w - \alpha_0)\sin\alpha_w = 0 .$$

Rezultă că în punctul $\alpha_w = \alpha_0$ se înregistrează un minim global pentru funcția $f(\alpha_w)$, având valoarea $f(\alpha_0) = 0$ deoarece $f''(\alpha_0) = \sin\alpha_0 > 0$. Aceasta înseamnă că $f(\alpha_w) \geq 0$ şi, deci, relațiile (A.42), (A.41), (A.37), (A.36) şi, în final, (A.35) sunt adevărate.

Diagrama $\alpha_{wx}(\alpha_w)$ (Fig.A.7) trasată după formula (A.40) confirmă relația (A.37) şi arată că $\alpha_{wx} = \alpha_w$ în punctul $\alpha_w = \alpha_0$.

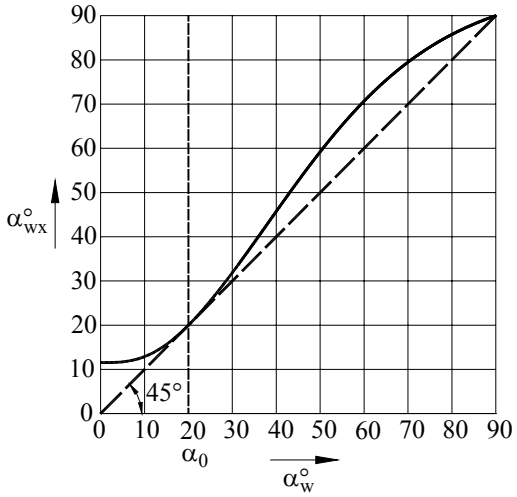


Fig. A.7

BIBLIOGRAFIE

1.**Alexandru, P., ş.a.,** Proiectarea funcţională a mecanismelor, Ed. Lux. Libris, Braşov.

2.**Antonescu P., ş.a.,** Mecanisme, Teme de proiect, Ed. PRINTECH, Bucureşti, 2000.

3.**Artobolevskii, I.I.,** Mehanizmî v Sovremennoi Tehnike, I-V, Izd. NAUKA, 1979-1981.

4.**Duca, C., Popovici A., Oprişan, C.,** Bazele Proiectării Mecanismelor cu came, Ed. Gh. Asachi, Iaşi, 1999.

5.**Duca, Cezar,** Mecanisme, institutul Politehnic Iaşi, 1983.

6.**Dudiţă, Fl., Diaconescu, D.** Optimizarea Structurală a Mecanismelor**,** Ed**.** Tehnică, Bucureşti, 1997.

7.**Dudiţă, Fl.,** Transmisii Cardanice, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1966.

8.**Dudiţă, Fl.,ş.a.,** Mecanisme Articulate, Inventica, Cinematica, Ed.Tehnică, Bucurşti, 1989.

9.**Frolov, K.V., ş.a.,**Teoria Mehanizmov i maşin, Vîsşaia Şkola, Moskva, 1987.

10.**Handra-Luca, V., Stoica, A.V.,** Introducere în Teoria Mecanismelor, Ed. Dacia, Cluj-Napoca,

11.**Ionescu, Gh.,D.,** Teoria Diferenţială a Curbelor şi Suprafeţelor cu Aplicaţii Tehnice, Ed. Dacia, Cluj-Napoca, 1984.

12.**Irimiciuc, N.,** Mecanica, Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1965.

13.**Jensen, P.W.,** Classical and Modern Mechanisms for Engineers and Inventors, Marcel Dekker, Inc., New-York, 1991.

14.**Jula, A., ş.a.,** Proiectarea Angrenajelor evolventice, ed. Scrisul Romanesc, Craiova, 1989.

15.**Krainev, A.F.,** Slovari - Spravocinîh po Mehanizmam, Maşinostroenie, Moskva, 1987.

16.**Kreinin, G.V., ş.a.,** Dinamika maşin i upravlenie maşinami, Maşinostroenie, 1988.

17.**Kreinin, G.V., ş.a.,** Kinematika, Dinamika i Tocinosti Mehanizmov, Spravocinik, Maşinostroenie, Moskva, 1984

18.**Lebedev, P.A.,** Kinematika prostranstvennîh Mehanizmov, Maşinostroenie, Moskva, Leningrad, 1966.

19.**Leviţkii, N.I.,** Kolebania v Mehanizmah, NAUKA, Moskva, 1988.

20.**Leviţkii, N.I.,** Teoria Mehanizmov i Maşin, NAUKA, Moskva, 1979.

21.**Manafu, V.,** Teoria mecanismelor şi a Maşinilor, Cinematica şi Structura Mecanismelor, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1959.

22.**Mangeron, D., Irimiciuc, N.,** Mecanica Rigidelor cu Aplicaţii în Inginerie, Mecanica Sistemelor de Rigide, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1980.

23.Manolescu, N., Kovacs, Fr., Orănescu, A., Teoria Mecanismelor şi a Maşinilor, Ed. Did. şi Pedagogică, Bucureşti, 1972.
24.Manolescu, N.I., Maros, D., Teoria Mecanismelor şi a Maşinilor, Cinetostatica şi Dinamica, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1958.
25.Maros, D., Mecanisme (I), Institutul Politehnic Cluj-Napoca, 1980.
26.Maros, Desideriu, Teoria Mecanismelor şi a Maşinilor, Cinematica Roților Dințate, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1958.
27.Moise, V., ş.a.,Analiza mecanismelor plane cu bare articulate, Ed. BREN, Bucureşti, 2001.
28.Murgulescu, E., ş.a., Geometrie Analitică şi Diferențială, Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1965.
29.Pelecudi, Chr., Bazele Analizei Mecanismelor, Ed. Academiei R.S.R., Bucureşti, 1967.
30.Pelecudi, Chr., Precizia Mecanismelor, Ed. Academiei R.S.R., Bucureşti, 1975.
31.Pelecudi, Chr., ş.a., Mecanisme, Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1985.
32.Pelecudi, Chr., Teoria Mecanismelor Spațiale, Ed. Academiei R.S.R., Bucureşti, 1972.
33.Perju, D., Mecanisme de mecanică fină, vol.1-2, Litografia Universității Tehnice Timişoara, 1986/1990.
34.Reshetov, L., Self-aligning mechanisms, Mir Publishers, Moskow, 1979.
35.Sauer, L., ş.a., Angrenaje, vol. 1,2, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1970.
36.Simionescu, I., Dranga, M., Moise, V., Metode numerice în tehnică, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1995.
37.Simionescu, I., Moise, V., Mecanisme, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1999.
38.Suh, C.H., Radcliffe, C.W., Kinematics and Mechanisms Design, John Wiley & Sons, New-York, 1978.
39.Szekely, I., Teoria Mecanismelor şi Organe de Maşini, Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1968.
40.Voinea, R.,ş.a., Mecanica, Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1975.
41.Buzdugan, Gh., Fetcu, L., Radeş, M., Vibrații mecanice, Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1982.
42.Buzdugan, Gh., Fetcu, L., Radeş, M., Vibrațiile sistemelor mecanice, Ed. Academiei R.S.R., Bucureşti, 1975.
43.Belous, V., Bazele performanței, Ed. „Performantica”, Iaşi, 1995.
44.Gafițanu, M., Organe de maşini, Vol. 1,2, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1999.
45.Sandor, G.N., Erdman, A.G., Advanced Mechanism Design: Analysis and Synthesis, Vol. 2, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1984.

AFTERWORD

The authors intend this work to be a handbook of academic level, including the fundamentals of Mechanisms. Taking into account this character, drawing up this work, we laid the stress on rigorous defining of specific notions and logically, easy to follow, treating the problems. The content of book and its systematization are those established in technical literature, but some formal are essential aspects appear too. These aspects have an original character and we set off them below.

This handbook contents six chapters: 1.Structure of Mechanisms, 2.Linkages, 3.Cam Mechanisms, 4.Gears, 5.Dynamics of Mechanisms and Machines, 6.Mechanism Design. In Chapter 1 we defined the fundamentals of this discipline and we presented the classification of mechanisms, taking into account-varied criteria. A very important and difficult problem treated in this chapter, is the degree of freedom and number of passive links determining. We tried to solve this problem as rigorously as possibly in the limits of an enough restricted space. So, we introduced and used the notions of constructive and functional classes of joints.

In the Chapters 2, 3, and 4 we treated separately the three great categories of mechanisms: linkages, cam mechanisms and gears. Each of these chapter contents generally the following problems: Kinematics, Kinetostatical analysis and mechanical efficiency, accuracy and synthesis. Reported to other handbook, we considered opportunely treating kinetostatical analysis and mechanical efficiency to each mechanism category, because the solutions present specifically aspects. We underline too, the presence of an under chapter associated to each mechanism category. We justify this option by the great importance of accuracy problem in the modern technology. At the same time with the methods of kinematics and kinetostatical analysis, we formulated the conditions to obtain the real solutions. The interpretation of these conditions is tied to self-blocking phenomenon and critical positions. So, these are presented in a new situation. At the dimensional synthesis of linkages we proposed a systematization of the problem by limiting of a current used domain – named elementary synthesis, exhaustively treated. In Chapter 3 we presented an original interpretation of the undercut phenomenon of cams, based on an unpublished formula to calculate the curvature radius and permitting to determine the convex or concave character of profile. In connection with cam mechanisms, we also indicated a new method of precision analysis of running. The calculus expressions of the cam mechanism and gear efficiency have also an

original character. We mention that in Chapter 5, in addition to established problems regarding dynamics and balancing of inertial forces, we introduced an under chapter for elasto-dynamic analysis. There we tried a more thoroughgoing approach, reported to other similar handbooks, of the vibratory phenomenon in mechanisms.

In Chapter 6, the authors proposed to show how analysis and synthesis intervene in mechanism design in connection to detail designing. The goal of this attempt is to demonstrate the place and utility in practical design of scientific domain associated to didactic matter of Mechanisms.

An essential feature of this handbook, imposed by the authors is in connection with numerical application of the presented methods and procedures. So we offer concise indications about applying the numerical methods or programs to solve the mathematical models of the problems. Otherwise, all diagrams of this handbook are obtained, based on the calculations, with concrete values of the intervening parameters.

We hope this handbook will be useful as for students in technical universities or for engineers in manufacturing or design.

Ph. D. Eng. Cezar DUCA
Ph. D. Eng. Florentin BUIUM
Eng. Gabriel PÂRĂOARU

CONTENTS

Page		
1	**Chap. 1**	**STRUCTURE OF MECHANISMS**
1	1.1.	Fundamental notions
1	1.1.1.	Links and joints
7	1.1.2.	Kinematic chains, Mechanisms
11	1.2.	Degree of freedom
11	1.2.1.	Calculus formulas
15	1.2.2.	Mechanism family, Examples
16	1.2.2.1.	The Family $f = 4$ ▪Sliding Joint Mechanisms ▪The Screw Mechanisms ▪ Friction-Whell Mechanisms
19	1.2.2.2.	The Family $f = 3$ ▪Planar Mechanisms (Exception which Contain Sliding Joints) ▪Spherical Mechanisms
23	1.2.2.3.	The Family $f = 0$
23	1.2.3.	Particularities in Determining the Degree of Freedom
24	1.2.3.1.	Local Mobilities
24	1.2.3.2.	Passive Kinematic Chains
26	1.3.	Structural classification of linkages
26	1.3.1.	The substitution of higher pair
28	1.3.2.	The structural group ▪The structural group $L = 0$ (Assur) ▪The driving group (Duca, Simionescu) cu $L = 1$
31	1.3.3.	Forming of linkages and their decomposing in structural group
39	**Chap. 2**	**LINKAGES**
39	2.1.	Kinematics
39	2.1.1.	General consideration
41	2.1.2.	The method of the geometrical places intersection ▪The structural group RRR ▪ The structural group RRT ▪ The structural group RTR ▪ The structural group RTRR
51	2.1.3.	The vectorial equations method
51	2.1.3.1.	General presentation ▪The 1th type equations ▪ The 2nd type equations
53	2.1.3.2.	Kinematical analysis of the structural groups ▪ The structural group RRT ▪ The structural group 0 / 3 / 3 cu with revolute joints
65	2.1.4.	The vectorial-loop method
65	2.1.4.1.	General presentation
67	2.1.4.2.	Four-bar linkage

Page		
72	2.1.4.3.	The slider - crank ▪ Approximate formulas
74	2.1.4.4.	The crank – shaper mechanism
76	2.1.4.5.	The scotch – yoke mechanism
77	2.1.4.6.	The turning cylinder mechanism
79	2.1.5.	Coordinate changing method
79	2.1.5.1.	General presentation
81	2.1.5.2.	Kinematics of a robot mechanism
83	2.1.6.	Transmission function method
85	2.1.7.	Indirect methods of kinematics
86	2.1.7.1.	Driving joint changing method
88	2.1.7.2.	Frame changing method
91	2.1.8.	The spherical mechanism
94	2.1.9.	The spatial four–bar mechanism ▪Position problem ▪Velocity and acceleration problem
102	2.1.10.	The spatial slider-crank mechanism ▪ Position problem ▪ Velocity and acceleration problem
106	2.2.	Kinetostatic analysis
106	2.2.1.	The forces in mechanisms
106	2.2.1.1.	The kinetostatic analysis subject
106	2.2.1.2.	The applied forces
108	2.2.1.3.	The inertia forces ▪Inertia forces reduction ▪The concentrating mass method ▪Static concentrating in two points ▪Dynamic concentrating in two points ▪Dynamic concentrating in three, collinear points among one in mass center
111	2.2.1.4.	Link forces ▪Normal reaction ▪Frictional forces
117	2.2.2.	Kinetostatic analysis without friction ▪General considerations
118	2.2.2.1.	Kinetostatic analysis of structural group ▪The structural group RRT ▪The structural group 0 / 3 / 3 with turning joints
131	2.2.2.2.	The four-bar linkage
133	2.2.3.	Kinetostatic analysis with friction
133	2.2.3.1.	General considerations
138	2.2.3.2.	The mathematical model ▪The Group RRT ▪The successive approximations method
140	2.2.3.3.	The self-blocking phenomenon ▪The self-blocking phenomenon explanation ▪The structural groups behavior analysis
148	2.2.4.	Mechanical efficiency
153	2.2.5.	The screw mechanism

Page		
159	2.3.	Precision analysis
159	2.3.1.	Introduction. Elementary errors
161	2.3.2.	The deterministic method ▪The clearances influence
164	2.3.3.	The stochastic method
166	2.4.	Dimensional synthesis
166	2.4.1.	General considerations
168	2.4.2.	Elementary synthesis
168	2.4.2.1.	The elementary synthesis problem ▪The rotability problem ▪Synthesis depending on the forces transmission quality ▪Synthesis depending on the driven link limit positions ▪Synthesis depending on the productivity coefficient
170	2.4.2.2.	The four-bar linkage ▪ The rotability problem ▪Synthesis depending on the pressure angle ▪Synthesis depending on the rocker limit positions ▪Synthesis depending on the productivity coefficient ▪The combined elementary synthesis
186	2.4.2.3.	The slider-crank ▪The rotability problem ▪Synthesis depending on the pressure angle ▪Synthesis depending on the slider limit positions ▪Synthesis depending on the productivity coefficient ▪The combined elementary synthesis
191	2.4.2.4.	The rocking slider mechanism ▪The rotability problem ▪Synthesis depending on the forces transmission quality ▪The combined elementary synthesis
192	2.4.2.5.	The rocking cylinder mechanism
195	2.4.3.	Mechanism synthesis for curves generation
195	2.4.3.1.	Application on the four-bar linkage ▪Robert– Cebyshew's law
198	2.4.3.2.	Mechanisms generating linear or circular paths
201	2.4.4.	Mechanisms synthesis for link guide (guidance mechanism synthesis)
204	2.4.5.	Function-generating mechanisms synthesis
206	2.4.6.	Dwell mechanisms synthesis
206	2.4.6.1.	Step mechanisms ▪Pawl-ratchet mechanisms ▪Geneva mechanisms
209	2.4.6.2.	Dwell mechanisms with changing direction
212	2.4.7.	Mechanisms synthesis to reproduce similar curves (pantographs)
214	**Chap. 3**	**CAM MECHANISMS**
214	3.1.	Classification, transformations

Page		
214	3.1.1.	Classification
216	3.1.2.	Transformations
216	3.1.2.1.	Transformation by changing the frame (kinematic inversion)
217	3.1.2.2.	Transformation by rolle-elimination
218	3.1.2.3.	Transformation of spatial mechanisms into planar ones
219	3.1.2.4.	Transformation of cam mechanism into lower pair mechanisms
220	3.2.	Kinematics
223	3.3.	Motion laws
223	3.3.1.	The working cycle
224	3.3.2.	Adopting of the motion law ▪Working criterion ▪Dynamic criterion ▪Technological criterion
226	3.3.3.	The usual motion laws
226	3.3.3.1.	Elementary motion laws ▪Motion law with constant velocity ▪motion law with constant acceleration (uniform accelerated) ▪Motion law with cosine acceleration ▪Motion law with sine acceleration
228	3.3.3.2.	Polynomial motion laws ▪Polynomial 2-3 ($k=1$) motion law ▪Polynomial 3-4-5($k=2$) motion law ▪Polynomial 4-5-6-7($k=3$) motion law ▪Polynomial 3-4-5-6($k=2$) motion law
231	3.3.3.3.	Combined motion law ▪Motion law with trapezium velocity ▪Motion law with sine modified trapezium velocity ▪Motion law with trapezium acceleration
235	3.4.	Geometry and kinematics
235	3.4.1.	General problems ▪Mechanism constructive characterizing ▪Theoretic cam profile synthesis ▪Higher pair kinematics ▪Pressure angle ▪Real cam profile synthesis ▪Curvature radius, undercutting
241	3.4.2.	Planar mechanism with sliding cam follower and roller ▪Constructive characterizing ▪Theoretical cam profile synthesis ▪Higher pair kinematics ▪Pressure angle ▪Real cam profile synthesis ▪Radius of curvature
245	3.4.3.	Planar mechanism with rotation cam follower and roller ▪Constructive characterizing ▪Theoretical cam profile synthesis ▪Higher pair kinematics ▪Pressure angle ▪Real cam profile synthesis ▪Radius of curvature
249	3.4.4.	Planar mechanism with sliding cam follower and runner ▪Constructive characterizing ▪Higher pair kinematics ▪Cam profile synthesis ▪Radius of curvature

Page		
251	3.4.5.	Spatial mechanism with cylindrical cam and sliding cam follower ▪Constructive characterizing ▪Theoretical cam profile synthesis ▪Higher pair kinematics ▪Pressure angle ▪Real cam profile synthesis ▪Radius of curvature
254	3.5.	Kinetostatic analysis
254	3.5.1.	Link forces in higher pair
254	3.5.1.1.	Simple higher pair
255	3.5.1.2.	Higher pair with roller
258	3.5.2.	Planar mechanism with sliding cam follower and roller
258	3.5.2.1.	Kinetostatic analysis
261	3.5.2.2.	Mechanical efficiency, self-blocking
264	3.5.3.	Planar mechanism with oscillating cam follower and roller
264	3.5.3.1.	Kinetostatic analysis
265	3.5.3.2.	Mechanical efficiency, self-blocking
266	3.5.4.	Planar mechanism with sliding cam follower and runner
266	3.5.4.1.	Kinetostatic analysis
269	3.5.4.2.	Mechanical efficiency, self-blocking
270	3.6.	Precision analysis
274	3.7.	Dimensional synthesis
274	3.7.1.	General formulating of problem
278	3.7.2.	Planar mechanism with sliding cam follower and roller
280	3.7.3.	Planar mechanism with rotation cam follower and roller
283	3.7.4.	Spatial mechanism with cylindrical cam and sliding cam follower
284	**Chap. 4**	**GEARS**
284	4.1.	Elementary gears
284	4.1.1.	Gears characteristic surfaces and lines
288	4.1.2.	Gears classification ▪Transmission ratio variation ▪Relative axes position and rolling surface shape ▪Spur and internal gears ▪The shape of the flank pitch lines ▪Geometrical defining ▪The shape of the radial profile
294	4.1.3.	Spur gears
294	4.1.3.1.	The transmission ratio (gear ratio). The fundamental law of gearing
296	4.1.3.2.	The use of involute curve as tooth profile ▪The involute curve. Definition, equations, characteristics ▪Verifying of the fundamental law of gearing for involute profiles
300	4.1.3.3.	Geometrical definition of spur gear ▪The referential spur rack ▪The principal geometrical parameters of the spur gear ▪The geometrical parameters on a certain cycle

Page		
307	4.1.3.4.	The pair of spur gear ▪Geometrical parameters ▪Gearing with standard circular backlash
310	4.1.3.5.	The pair of internal gear and external gear
313	4.1.3.6.	Forming and interrupting the contact between teeth. Contact ratio
317	4.1.3.7.	The interference phenomenon
322	4.1.3.8.	Specific slide
325	4.1.3.9.	Kinetostatic analysis. Mechanical efficiency
331	4.1.3.10.	Adopting the coefficient of profile shifted
332	4.1.4.	Helical gears
332	4.1.4.1.	Definition of helical gear ▪Helical rack ▪The principal geometrical parameter of helical gear
337	4.1.4.2.	The pair of helical gear ▪Geometrical parameters ▪Specific aspects of the pair of helical gear
341	4.1.5.	Intersecting axes gear
341	4.1.5.1.	The equivalent gear
342	4.1.5.2.	Definition of the straight bevel gear
344	4.1.5.3.	The pair of straight bevel gear
345	4.1.5.4.	The pair of helical bevel gear and spiral bevel gear
347	4.1.6.	Worm gear
350	4.1.7.	Screw gear
352	4.1.8.	Hypoid gear
353	4.1.9.	Precision of gears
353	4.1.9.1.	The backlash problem ▪Modification of profile shifted ▪Increment of center distance
356	4.1.9.2.	Geometrical bases of teeth measurement ▪Pitch chord and constant chord ▪Span measurement of teeth ▪Over pin diameter
360	4.2.	Gear systems
360	4.2.1.	Gear trains
360	4.2.1.1.	Kinematical analysis
362	4.2.1.2.	Mechanical efficiency, moment (torque) transmission
363	4.2.2.	Planetary gear systems
363	4.2.2.1.	Structure of planetary gear mechanisms
366	4.2.2.2.	Kinematical analysis
369	4.2.2.3.	Moment (torque) transmission, mechanical efficiency
372	4.2.2.4.	Differential mechanism of motorcar
376	**Chap. 5**	**DINAMICS OF MECHANISMS AND MACHINES**
376	5.1.	Dynamic analysis
376	5.1.1.	Dynamic models

Page		
378	5.1.2.	Phases of machine working
380	5.1.3.	Motion equation of machine
383	5.1.4.	Solution of motion equations
383	5.1.4.1.	The case $M_{red}^{m}(\omega)$, $M_{red}^{r}(\omega)$, $J_{red} = ct$.
387	5.1.4.2.	The case $M_{red}^{m}(\omega)$, $M_{red}^{r}(\varphi)$
388	5.1.4.3.	The case $M_{red}^{m}(\varphi)$, $M_{red}^{r}(\varphi)$
391	5.1.5.	Uniformization of machine motion
394	5.1.6.	Power behavior of machine
395	5.2.	Elasto-dynamic analysis
395	5.2.1.	General consideration
398	5.2.2.	Elastic drives machines
398	5.2.2.1.	Physical model
400	5.2.2.2.	Mathematical model
406	5.2.3.	Cam mechanisms
406	5.2.3.1.	Physical and mathematical modeling
407	5.2.3.2.	Dynamical coefficient ▪Cosine acceleration motion law ▪Sine acceleration motion law
412	5.2.3.3.	Synthesis of motion law
414	5.3.	Balancing of inertial forces
415	5.3.1.	Balancing of rotors
415	5.3.1.1.	Conditions of balancing
417	5.3.1.2.	Two plane inertial forces reduction. Experimental balancing
420	5.3.2.	Balancing of mechanisms
420	5.3.2.1.	Balancing conditions
424	5.3.2.2.	Static balancing. Principal points method ▪The mechanism center of mass ▪Static balancing of four-bar linkage ▪Static balancing of slider-crank
430	5.3.2.3.	Harmonical analysis method
434	5.3.2.4.	Problems regarding balancing of poly-cylinder engines ▪Two cylinder engine ▪Three cylinder engine ▪Four cylinder engine
440	**Chap. 6**	**MECHANISMS DESIGN**
440	6.1.	General consideration
442	6.2.	Adopting kinematics scheme
447	6.3.	Strategies (procedures) of design
457		**APPENDICES**
457	App. 1	Notions of analytical and differential geometry

Page		
457	1.1.	Transformations of coordinates ▪Transformation between two plane Cartesian systems ▪Transformations from one Cartesian system into a polar one
458	1.2.	Tangent and normal on a curve
459	1.3.	Curvature radius, convexity, concavity
461	1.4.	Position angle of a vector
462	App. 2	Notions of mathematical analysis
462	2.1.	Inverse function derivatives
462	2.2.	Implicite function derivative
462	2.3.	Parametrical function derivatives
463	App. 3	Relative motion between two body (gear) which have absolute revolution motion around two fixed axes
464	3.1.	Instantaneous axis of relative movement
465	3.2.	Axoides of relative motion
466	App. 4	The demonstration of relation $a_x \geq a$
469		**REFERENCES**
471		**AFTERWORD**
473		**CONTENTS**

Data aparitiei: OCTOMBRIE 2003
Comanda nr. 109, Tiraj: 120
Coli tipar: 31

UNIVERSITATEA TEHNICĂ "GH. ASACHI"
IASI
TIPOGRAFIA

Str. Lascăr Catargi nr. 38
Tel./Fax: 0232- 21 59 49

UNIVERSITATEA TEHNICA IASI

EDITURA

"GH. ASACHI"

ISBN 973-621-048-0